LA PROCÉDURE FREQ DE S.A.S.®

TESTS D'INDÉPENDANCE ET MESURES D'ASSOCIATION DANS UN TABLEAU DE CONTINGENCE

Josiane Confais *   Yvette Grelet * *   Monique Le Guen * * *

* Université Paris 6-ISUP, Tour 45 - Boîte157, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
* * CEREQ-LES Université Paris 1, 90 rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13
* * * CNRS-INSEE Timbre F410, 18 Bd Adolphe Pinard, 75675 Paris Cedex 14

Introduction

La procédure FREQ de S.A.S. permet :
- de produire des tableaux de fréquences à une dimension, et des tableaux croisés.
- d'analyser des **associations** entre **variables** dans des **tables de contingence.**

Après avoir précisé la terminologie employée au chapitre I , et présenté le type de tableaux sur lequel nous voulons porter un diagnostic au chapitre II, nous passerons en revue le catalogue des tests et mesures d'association disponibles dans la procédure FREQ de S.A.S.[1], selon les grands types de variables **nominales** au chapitre III, ou **ordinales** au chapitre IV.
Au chapitre V, nous présenterons les tests d'association de Cochran-Mantel-Haenszel qui s'appliquent aux 2 types de variables. Au chapitre VI, nous aborderons l'approche probabiliste basée sur les odds-ratios et le modèle logit.
Afin de montrer les doutes que l'on doit avoir lors d'un test unique nous rapporterons en annexe une « curiosité », révélant les discordances des résultats selon les points de vue. En annexe également, un historique sur le test de Fisher permettra au lecteur de conforter son opinion.

Au cours du premier chapitre nous allons préciser la terminologie élémentaire.

I - Terminologie

I - 1 Variables

Dans FREQ les objets de base sur lesquels on travaille sont des variables.
Exemple : couleur = 'bleu' ; ou couleur = 1 ;
couleur est le nom de la variable, 'bleu' ou 1 est une valeur de la variable ou une modalité de la variable.

---
[1] version 6.08

Les variables peuvent être segmentées selon plusieurs critères :

- approche par les qualités ou propriétés des variables
- approche liée aux techniques de traitement
- approche plus française

I - 1 . 1 Approche par les « qualités » ou « propriétés » d'une variable

- variable *caractère* / *numérique*
- variable *qualitative* / *quantitative*
- variable *discrète* / *continue*

Plutôt que de commenter nous allons donner des exemples :

- qualité ou propriété informatique

variable caractère	couleur='bleu'
variable numérique	couleur=1

- qualité ou propriété de mesurabilité

variable qualitative	sexe='féminin' ou '2'
variable quantitative	revenu=10 KF

- qualité de l'échelle de mesure utilisée

variable discrète	poids=10 kg
variable continue	poids=10,236...kg

I - 1 . 2 Approche liée aux techniques de traitement

Terminologie S.A.S. :

- variables **nominales**
- variables **ordinales**
- variables d'**intervalle**
- variables de **rapport**
- variables **catégorisées**

- **Variables nominales** *(nominal data)*

Exemple: sexe='Masculin' / 'Féminin' (variable caractère)
ou sexe= '1' / '2' (variable caractère)
ou sexe= 1 / 2 (variable numérique)

Ici il n'existe aucune notion de mesure ni de comparabilité entre les **modalités** de la variable sexe.
Cette variable est dite nominale.

• **Variables ordinales** *(ordinal data)*

Exemple : opinion = 'un peu'
= 'beaucoup'
= 'passionnément' etc...... 'pas du tout'

On peut positionner ces modalités les unes par rapport aux autres, en les représentant sur un axe :

Axe des opinions

-					+
	pas du tout	un peu	beaucoup	passionnément	
	1	5	10	15	← code
	1	2	3	4	← rang

Les variables ordinales sont des variables pour lesquelles il existe une graduation. On peut donc affecter une valeur numérique en utilisant une échelle.

Cas particulier : l'échelle peut être un rang.
Pour ces variables les analyses statistiques doivent prendre en compte l'**ordre** des valeurs, et **non les distances** entre les valeurs numériques.

• **Variables d' intervalle** (*interval data*)

Exemples: température = 10
10 est une valeur exprimée dans une certaine unité

Une température est une variable d'intervalle.
On parle de variable d'intervalle (*interval data*) lorsque la différence entre deux valeurs distinctes de la variable a un sens.
Dans le cas de la variable température, la différence de température entre 5° et 10° est comparable à la différence entre 15° et 20°.

• **Variables de rapport** (*ratio data*)

Exemple : revenu = 10232 valeur exprimée dans une certaine unité

On parle de variable de rapport (*ratio data*) lorsque la mesure du rapport entre deux valeurs dictinctes de la variable a un sens.
Dans le cas de la variable revenu, un revenu de 10000 francs par exemple est 2 fois plus élevé, qu'un revenu de 5000 francs.
Dans le cas de la variable température, cela n'aurait aucun sens de dire que 30° est 2 fois plus élevé que 15°, c'est seulement beaucoup plus chaud.
De plus la valeur 0° n'a pas le même statut que 0 francs. Le 0° est une référence exprimée en Celsius qui transposée en Kelvin donnerait 273° Kelvin.
Tandis que 0 francs même traduit en Deutsche-Mark donnerait toujours 0 DM !

• **Variables catégorisées** (*categorical data*)

Le schéma de la page suivante résume ce que S.A.S. appelle les Categorical Data.
Les variables catégorisées peuvent être soit des variables nominales, soit des variables ordinales, ou encore des variables, à l'origine, d'intervalle ou de ratio, qui ont été recodées en "tranches".

Remarque : Dans la procédure Freq de S.A.S. la distinction entre variables d'intervalle et variables de rapport n'est jamais faite.

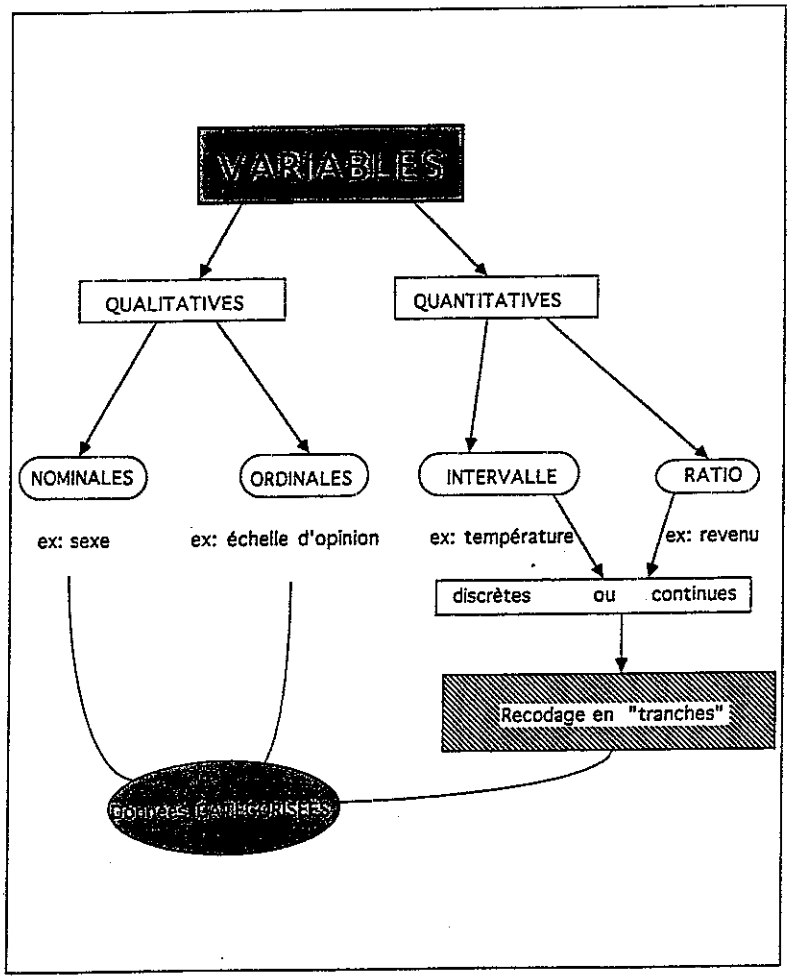
I - 1 . 3 Approche plus française

• **Variables nominales**
même définition que S.A.S

• **Variables ordinales**
variables numériques, discrètes avec un faible nombre de modalités et pouvant être ordonnées.

• **Variables «mesures»**
Ce sont des variables numériques à valeurs continues, pour lesquelles il existe une échelle de mesures.

Dans la littérature française la distinction entre variables d'intervalle et variables de rapport n'est pas toujours faite.



I - 2 Tableaux de fréquences - Tables de contingence

A partir des objets de base (les variables), on peut constituer des tableaux. Le tableau le plus élémentaire que l'on puisse construire est un tableau d'effectifs dit aussi tableau de fréquences.

I - 2 . 1 Tableaux de fréquences pour 1 variable

Tableau d'effectifs ou de fréquences

Age	effectifs
1	22
3	25
6	12
7	13

Un tableau de fréquences associe à chaque valeur de la variable, ici l'âge, l'effectif ou fréquence absolue, totalisé dans l'échantillon observé.
Un tableau de fréquences apparaît comme une structure qui résume ou condense une partie de l'information contenue dans les données. Il permet d'avoir une vue synthétique de l'information apportée par la variable, mais en perdant les détails individuels.

Note : Pour des <u>variables d'intervalle</u> ou des <u>variables ratio</u>, il est aussi possible d'avoir un tableau de fréquences à **condition** que la variable soit mesurée sur une **échelle discrète** et que le nombre d'occurrences de la variable ne soit pas trop élevé. Cependant pour ces deux types de variables, il existe des méthodes d'analyse mieux adaptées.

Aussi selon les types de variables on utilisera certaines méthodes «résumé» que l'on trouve dans plusieurs procédures de S.A.S..

Types de variables et méthodes "résumé".

Variables	tableau de fréquences	Statistiques descriptives	
nominales	*		
ordinales	*	*	certaines statistiques
intervalle	*	*	
rapport	*	*	

↓ ↓

Proc FREQ **Proc UNIVARIATE**
Proc MEANS

La procédure FREQ concerne plutôt les variables nominales et ordinales.

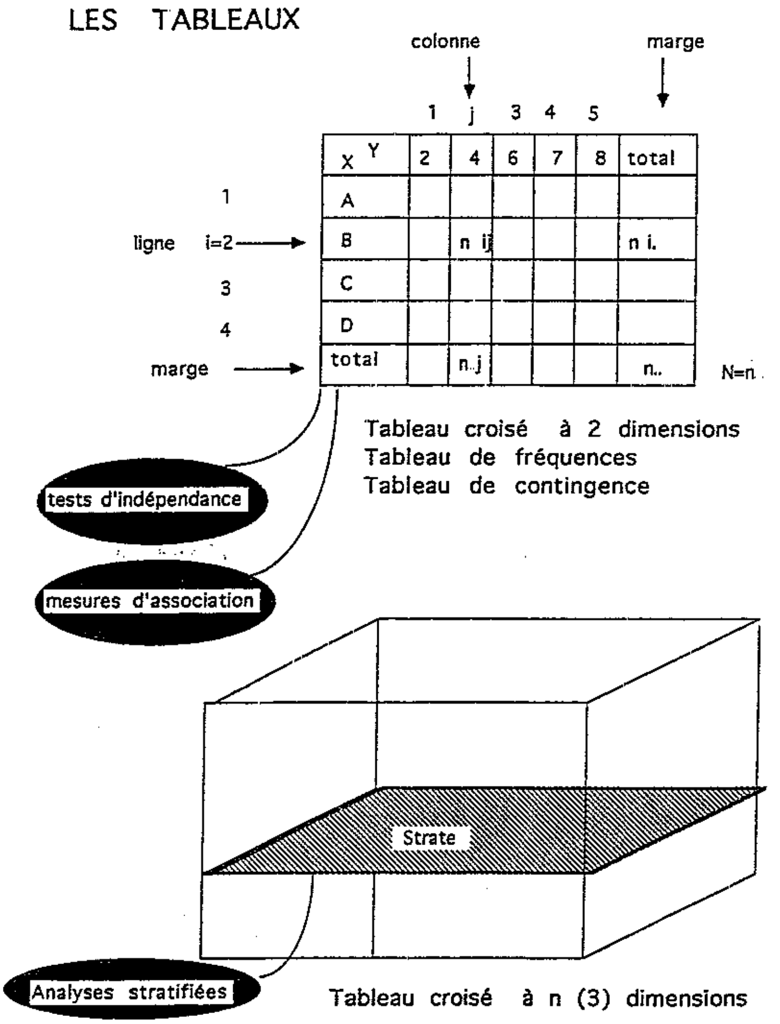
I - 2 . 2 Tableaux de fréquences pour 2 ou n variables

Un tableau de fréquences croisant 2 variables encore appelé tableau de contingence, est un tableau qui croise les modalités x_i d'une variable ligne X, avec les modalités y_j d'une variable colonne Y. Dans le schéma de la page suivante, la variable X peut prendre 4 modalités (A,B,C,D) et la variable Y 5 modalités (2,4,6,7,8).

Par convention on note :

n_{ij}	l'effectif de la cellule de rang i en ligne et de rang j en colonne	
$n_{i.}$	l'effectif total sur la ligne i	$n_i = \sum_{j=1}^{p} n_{ij}$
$n_{.j}$	l'effectif total sur la colonne j	$n_{.j} = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}$
$n_{..}$	l'effectif total global	$n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} n_{ij}$

Le tableau de base analysé par la procédure FREQ est un tableau qui croise 2 variables.



Si on croise plus de 2 variables, on obtient un hyper-tableau. Il faut alors effectuer des analyses stratifiées. Chaque section de dimension 2 définit une **strate**.

I - 3 Exemples de structure dans des tableaux

Un tableau de contingence permet de révéler une éventuelle structure.
Nous allons donner 3 exemples.

• Exemple 1 : couleur des yeux et couleur des cheveux[2].

Soit un échantillon de 124 individus pour lesquels on a relevé la couleur des yeux et la couleur des cheveux.

cheveux **yeux**	blond	brun	noir	roux	**Total**
bleu	**25**	9	3	7	44
vert	13	**17**	10	7	47
marron	7	**13**	8	5	33
Total	45	39	21	19	124

Si on regarde en colonnes le tableau croisé ci-dessus, on remarque que la distribution des blonds est différente de la distribution des roux. Il y a des points d'accumulation (attractions) ou des vides (répulsions) à des endroits différents.
Les cheveux blonds et les yeux bleus sont souvent associés (25), comme le sont les cheveux bruns (17) avec les yeux marrons (13).
On parle alors d'une association entre modalités des lignes et modalités des colonnes.

Lecture : Il y a **une dépendance** entre la variable ligne et la variable colonne du tableau.
La question que l'on se pose est : *Comment mesurer cette dépendance ?*

• Exemple 2 : Niveau des élèves selon la CSP du père

Niveau élèves **CSP père**	- -	-	+	+ +	**Total**
cadre	2	2	12	24	40
% en ligne	***5%***	***5%***	***30%***	***60%***	***100%***
employé	1	1	6	12	20
% en ligne	***5%***	***5%***	***30%***	***60%***	***100%***
Total	3	3	18	36	60
% en ligne	***5%***	***5%***	***30%***	***60%***	***100%***

La comparaison à partir des effectifs n'est pas facile lorsque les marges sont trés différentes (ici 40,20,60). Pour rendre les profils de ligne homogènes, on compare les pourcentages.

---

[2] exemple cité par D. Schwartz p79.

Règle : Pour comparer 2 distributions on compare les %.

Lecture : On remarque alors que les profils sont dans le tableau précédent strictement identiques.

Il y a **indépendance** entre la variable ligne et la variable colonne du tableau.

• Exemple 3 : une liaison particulière, l'association parfaite

Epreuve de course à pied

performances / **entraînement**	< 4'	4-5'	> 5'
2 fois/semaine	0	0	**13**
4 fois / semaine	0	**12**	0
8 fois / semaine	**15**	0	0

Ici existe une association ou une liaison évidente : plus on s'entraîne plus on court vite.
C'est une structure très forte qui conduit à une **structure de linéarité,** ou de corrélation linéaire lorsque le nombre de modalités est plus important.

Conclusion
Les 3 exemples précédents ont montré qu'il existe des «organisations» différentes dans les tableaux croisés. A partir d'un tableau croisé on peut se poser différentes questions.

Questions que l'on peut se poser sur un tableau de contingence

- Existe-t-il une structure dans le tableau ?
- Quels liens existent entre la variable ligne et la variable colonne du tableau ?
- Existe-il des points d'accumulation et/ou des vides ?
- Le fait d'être dans la modalité i de la variable ligne permet-il de prévoir, avec une certaine probabilité, l'appartenance à une modalité j de la variable colonne ?
- La structure d'un tableau peut-elle être comparée à celle d'un autre tableau ?
- Comment comparer deux structures ?

Toutes ces questions peuvent trouver partiellement une réponse en ayant recours à des indicateurs globaux que sont les **mesures d'association** et les **tests d'indépendance**.

Nous avons vu qu'il y a différentes formes « d'organisation » dans un tableau croisé aussi, il y a différentes manières d'évaluer. D'où la multiplicité des mesures et des tests.

I - 4 . Mesures d'association - Tests d'indépendance

I - 4 . 1 Qu'est-ce qu'une association ?

On dit qu'il y a association si la répartition des modalités d'une variable c'est à dire la distribution diffère selon les modalités de la deuxième variable.

Une **mesure d'association** indique avec quelle force deux variables sont reliées entre elles sur la base de l'échantillon étudié. Mais une mesure d'association ne permet pas d'inférer[3] sur la population dont est issu l'échantillon.

I - 4 . 2 Qu'est-ce qu'un test d'indépendance ?

Le rôle d'un **test** est de fournir une significativité statistique, qui permet d'étendre à la population les résultats obtenus sur l'échantillon.
Un **test d'indépendance** sert à tester la vraisemblance d'une absence de liaison, dans une population, à partir d'un échantillon.
Il renseigne sur la **force de l'évidence** et non sur la force de l'association.
La difficulté est qu'un nombre unique ne peut représenter les différentes facettes des liaisons entre 2 variables. Chaque test, chaque mesure, a une capacité plus ou moins orientée à révéler un phénomène.

Aussi **l'utilisateur est-il totalement désorienté** devant la multiplicité des tests et des mesures proposés dans la Proc FREQ : pour un premier coup d'oeil, on trouvera en annexes A1 A2 A3 les sorties listing de la Proc FREQ effectuées sur les 3 exemples du § I.3.

Nous verrons bien cette différence d'objectif entre un test d'indépendance comme le χ^2 et une mesure d'association dans les chapitres suivants. Pour le lecteur sceptique, citons une remarque de D. Schwartz :
« On notera qu'un χ^2 très élevé permet de rejeter avec une grande sécurité l'hypothèse d'indépendance, mais ne prouve pas que la liaison soit très forte, car lorsqu'il existe une liaison, la valeur de χ^2 augmente avec l'effectif de l'échantillon. Le χ^2 ne mesure pas l'intensité de la liaison, intensité qu'il est d'ailleurs difficile de définir.»

Avec cette dernière phrase de D. Schwartz nous voilà prévenus pour la suite, l'intensité d'une liaison est difficile à définir. C'est pour cette raison qu'il existe un grand nombre de tests et de mesures, et les plus courants sont disponibles dans la Proc FREQ.

Le chapitre suivant en dresse l'inventaire selon les champs d'application, c'est à dire le type des variables.

---

[3] Dans la démarche *inférentielle*, on considère un échantillon de N individus comme tiré d'une population plus large, sur laquelle on peut faire des déductions d'autant meilleures que l'échantillon est grand. Dans le cadre *descriptif*, ces individus constituent l'univers observé ; on y constate et mesure les liaisons structurelles éventuelles.
C'est pourquoi Rouanet distingue les statistiques inférentielles, qui dépendent de la taille de l'échantillon, des statistiques descriptives.

I - 5 Inventaire des Tests et Mesures

• Le χ^2 et ses dérivés

champ d'application : tous types de variables traitées **nominales**	TEST
• Chi-Square	oui
• Likelihood ratio Chi-Square	oui
• Continuity Adj Square (TABLE 2*2)	oui
• Fisher's Exact test 1-tail /2-tail	oui
• Phi	
• Contingency Coef	
• Cramer's V	

• Mesures d'association : Lambda et coefficient d'incertitude

champ d'application : tous types de variables traitées **nominales**
• Lambda Asymétrique C/R
• Lambda Asymétrique R/C
• Lambda Symétrique
• Coefficient d'Incertitude C/R
• Coefficient d'Incertitude R/C
• Coefficient Symétrique

• Autres mesures

champ d'application : variables au minimum **ordinales**	
• Gamma	
• Tau b de Kendall	
• Tau c de Stuart	
• DC/R de Somer	
• DR/C de Somer	
• Corrélation de Pearson	
• Corrélation de Spearman	
• Mantel-Haenszel Chi-Square	oui

champ d'application : tous types de variables	
• Cochran-Mantel-Haenszel : 3 statistiques	oui

champ d'application : variables dichotomiques pour les tables (2*2)
• relative risk
• odds ratio

II - Analyse d'un tableau de contingence

II - 1 Description élémentaire du tableau

Considérons le tableau ci-dessous (source : enquête d'insertion 1990 CEREQ/ DEP).
Le tableau croise en ligne la variable DIPLOME qui définit deux groupes :

- les jeunes sortis de l'école *sans diplôme* ,
- les *diplômés* d'un CAP ou d'un BEP,

et en colonne la variable SITUATION, qui définit quant à elle trois classes de jeunes selon qu'ils sont, au moment de l'enquête

- au *chômage*,
- sur une *mesure* d'aide à l'insertion des jeunes,
- en *emploi* ordinaire.

TABLES DIPLOME*SITU;

ATELIER SAS PROC FREQ
SOURCE: ENQUETE D'INSERTION CEREQ-DEP
DE TERMINALE CAP OU BEP COMMERCE EN L.P. (SN. APPRENTIS EXCLUS)

TABLE OF DIPLOME BY SITU

DIPLOME / SITU Frequency Percent Row Pct Col Pct	CHOMAGE	MESURE	EMPLOI	Total
NON DIPL	54 10.84 36.99 30.68	52 10.44 35.62 34.90	40 8.03 27.40 23.12	146 29.32
DIPLOMES	122 24.50 34.66 69.32	97 19.48 27.56 65.10	133 26.71 37.78 76.88	352 70.68
Total	176 35.34	149 29.92	173 34.74	498 100.00

Le quadrant supérieur gauche du tableau indique (en anglais) le contenu de chaque case (i,j), à savoir :

- l'effectif n_{ij} («Frequency»)
- le pourcentage («Percent») correspondant à $f_{ij} = n_{ij}/N$
- le pourcentage-ligne («Row Pct») correspondant à $n_{ij}/n_{i.}$
- le pourcentage-colonne («Col Pct») correspondant à $n_{ij}/n_{.j}$

- **Ligne et colonne marginales**

Sur la ligne «Total» on peut lire :

- les effectifs $n_{.j}$ des modalités de la variable colonne,
- les pourcentages ligne correspondant aux proportions $f_{.j}=n_{.j}/N$

C'est la **ligne marginale** donnant la distribution (le tri-à-plat) de la variable SITUATION sans distinction du diplôme.
Sur la colonne «Total», **colonne marginale**, on lit de même la distribution de la variable DIPLOME dans l'ensemble de la population (effectifs $n_{i.}$ et pourcentages colonne correspondant à $f_{i.}=n_{i.}/N$).

- **Distribution conditionnelle**

Pour une modalité i de la variable DIPLOME, **l'ensemble des pourcentages-lignes correspondant aux fréquences** $n_{ij}/n_{i.}$ aussi notées f_j^i (qui se lit «f de j sachant i») donne la **distribution conditionnelle** de la variable SITUATION, c-à-d la distribution de cette variable, conditionnée par le fait qu'on se trouve dans la sous-population définie par cette modalité i. On parlera aussi du **profil** de la sous-population i.
De même pour une modalité j de la SITUATION : **l'ensemble des pourcentages-colonnes** correspondant aux f_{ij}, donne la distribution du DIPLOME **conditionnellement** à la modalité j de la SITUATION.
On pourra par exemple se demander si la distribution d'une colonne j diffère de la distribution observée dans l'ensemble de la population, c-à-d de la colonne marginale.
Le test approprié pour comparer une distribution observée à une distribution théorique est le **test du** χ^2. La répartition diplômés / non diplômés est-elle la même chez les jeunes chômeurs que dans l'ensemble de la population des jeunes sortants ?

II - 2 Inférences sur les proportions

II - 2 . 1 Estimation d'une proportion

Le pourcentage de chômeurs dans l'échantillon est de 35,3%, soit une **proportion** $p_0=0.353$.
Ce chiffre donne une **estimation** de la vraie proportion p de chômeurs dans la population des jeunes sortants, avec une certaine marge d'erreur qu'on peut calculer aisément aux conditions que :

- l'échantillon soit issu d'un tirage aléatoire,
- p (théorique) ne soit pas trop proche de 0 ni de 1,
- N soit assez grand (≥ 30). *(Schwartz précise $Np \geq 10$ et $Nq \geq 10$)*

Sous ces conditions en effet, la proportion de chômeurs, observée dans un échantillon de taille N suivant une loi binomiale B(N,p), peut être approximée par **une loi normale de moyenne p et d'écart-type** $\sigma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$.

Avec 5% de risque de se tromper, on peut dire que p est dans l'intervalle :

$$[p_0 - 2s, p_0 + 2s] \text{ , avec } s=\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}$$

C'est l'**intervalle de confiance** de la proportion p, calculé à partir de l'échantillon.
On remarque que plus N est grand, plus s est petit, donc aussi la largeur de l'intervalle.
Ici N = 498, p_0 = 0.353, et 2s = 0.043 ; soit $0.31 < p < 0.396$

II - 2 . 2 Comparaison à une proportion théorique

Si on *suppose* que la proportion de chômeurs dans l'ensemble de la population est de 0.353 *(proportion théorique)*, peut-on dire que le pourcentage observé chez les non diplômés (0.37) s'en écarte «significativement» ?

Ici N = 146, p_0 = 0.37, et 2s = 0.0799 ; soit $0.29 < p < 0.45$.
Au risque de 5% la réponse est non, puisque 0.353 tombe dans l'intervalle calculé ci-dessus.
Peut-être un échantillon plus grand aurait-il amené à conclure à une différence significative.

II - 2 . 3 Comparaison de deux proportions

Les proportions de chômeurs observées dans les échantillons correspondant aux non-diplômés et aux diplômés sont respectivement $p_1 = 0.37$ et $p_2 = 0.347$. Cet écart est-il «significatif» ?
On teste l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre p_1 et p_2, c-à-d. que les deux échantillons sont extraits de la même population dans laquelle on suppose que la proportion est p = 0.353.
Sous les conditions édictées plus haut, d'approximation normale de la loi binômiale, la différence $p_1 - p_2$ suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type $\sigma=\sqrt{[p(1-p)((1/N_1)+(1/N_2))]}$.
Au risque de 5% on rejettera l'hypothèse si $|p_1 - p_2| > 2\sigma$.

Ici $N_1 = 146$, $N_2 = 352$, $p_1 - p_2 = 0.0233$, σ = 047 ,
⇒ l'écart n'est pas significatif.

II - 3 Association entre variables ligne et colonne

II - 3 . 1 Indicateur global d'association : le χ^2

Si on n'a pas conclu à une différence entre diplômés et non diplômés sur le taux de chômage, l'examen de l'ensemble du tableau laisse à penser qu'il y a pourtant un lien entre le diplôme et l'insertion de ces jeunes sur le marché du travail.
Pour tester ce lien, on va calculer le χ^2 («CHI-2») associé au tableau : c'est la **somme**, sur toutes les cases (i,j) du tableau, **des carrés des écarts entre l'effectif observé nij et l'effectif théorique ni.n.j/N** qu'on aurait dans la case si les deux variables étaient indépendantes ; de plus, pour ne pas donner trop d'importance aux cases lourdes, on **divise l'écart-carré par l'effectif théorique** ; puis comme pour un calcul de variance, on élève au carré pour que les écarts ne s'annulent pas.

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(n_{ij} - \left(n_{i.} n_{.j}/N\right)\right)^2}{\left(n_{i.} n_{.j}/N\right)}$$

L'**option CHISQ** de l'instruction TABLES édite, après le tableau croisé, la **valeur de cette statistique** (et d'autres informations qu'on verra plus loin) ainsi que le nombre de degrés de liberté, ou nombre de cases n_{ij} qu'il suffit de connaître pour en déduire toutes les autres connaissant $n_{i.}$ et $n_{.j}$ et aussi la probabilité associée (voir plus loin le test du χ^2).

```
    TABLES DIPLOME*SITU/ CHISQ CELLCHI2 DEVIATION EXPECTED;

                      ATELIER SAS PROC FREQ
               SOURCE: ENQUETE D'INSERTION CEREQ-DEP
DE TERMINALE CAP OU BEP COMMERCE EN L.P. (SN, APPRENTIS EXCLUS)

                     TABLE OF DIPLOME BY SITU

      DIPLOME         SITU

      Frequency       |
      Expected        |
      Deviation       |
      Cell Chi-Square |
      Percent         |
      Row Pct         |
      Col Pct         |CHOMAGE |MESURE  |EMPLOI  |  Total
      ----------------+--------+--------+--------+
      NON DIPL        |     54 |     52 |     40 |    146
                      | 51.598 | 43.683 | 50.719 |
                      | 2.4016 | 8.3173 | -10.72 |
                      | 0.1118 | 1.5836 | 2.2653 |
                      |  10.84 |  10.44 |   8.03 |  29.32
                      |  36.99 |  35.62 |  27.40 |
                      |  30.68 |  34.90 |  23.12 |
      ----------------+--------+--------+--------+
      DIPLOMES        |    122 |     97 |    133 |    352
                      |  124.4 | 105.32 | 122.28 |
                      | -2.402 | -8.317 | 10.719 |
                      | 0.0464 | 0.6568 | 0.9396 |
                      |  24.50 |  19.48 |  26.71 |  70.68
                      |  34.66 |  27.56 |  37.78 |
                      |  69.32 |  65.10 |  76.88 |
      ----------------+--------+--------+--------+
      Total               176      149      173      498
                        35.34    29.92    34.74   100.00

            STATISTICS FOR TABLE OF DIPLOME BY SITU

    Statistic                       DF      Value        Prob
    ------------------------------------------------------
    Chi-Square                       2      5.604       0.061
    Likelihood Ratio Chi-Square      2      5.681       0.058
    Mantel-Haenszel Chi-Square       1      2.376       0.123
    Phi Coefficient                         0.106
    Contingency Coefficient                 0.105
    Cramer's V                              0.106

    Sample Size = 498
```

II - 3 . 2 Analyse locale des associations

Chaque case contribue au χ^2, d'autant plus fortement qu'il y a attraction (écart positif) ou répulsion (écart négatif) entre les modalités i et j.
Les options EXPECTED, DEVIATION et CELLCHI2 de l'instruction TABLES donnent dans chaque case respectivement :

- l'**effectif attendu** (théorique) dans la case sous l'hypothèse d'indépendance,
- la valeur (signée) de l'**écart entre effectifs observé et attendu,**
- la **contribution** de la case («cell») au χ^2.

EXPECTED (attendu ou théorique) = $N f_{i.} f_{.j} = N(n_{i.}/N)(n_{.j}/N) = n_{i.} n_{.j}/N$

DEVIATION (observé - théorique) = $\left(n_{ij} - \left(n_{i.} n_{.j}/N\right)\right)$

CELLCHI2 (contribution au χ^2) = $\dfrac{\left(n_{ij} - \left(n_{i.} n_{.j}/N\right)\right)^2}{\left(n_{i.} n_{.j}/N\right)}$

Pour sélectionner les cases les plus contributives on se basera sur le CELLCHI2 moyen (χ^2 divisé par le nombre de cases).
Ces informations sont très précieuses pour analyser finement la structure du tableau. Si le tableau est de grande dimension, la lecture peut cependant en être difficile et on gagnera à tenter une analyse des correspondances ....

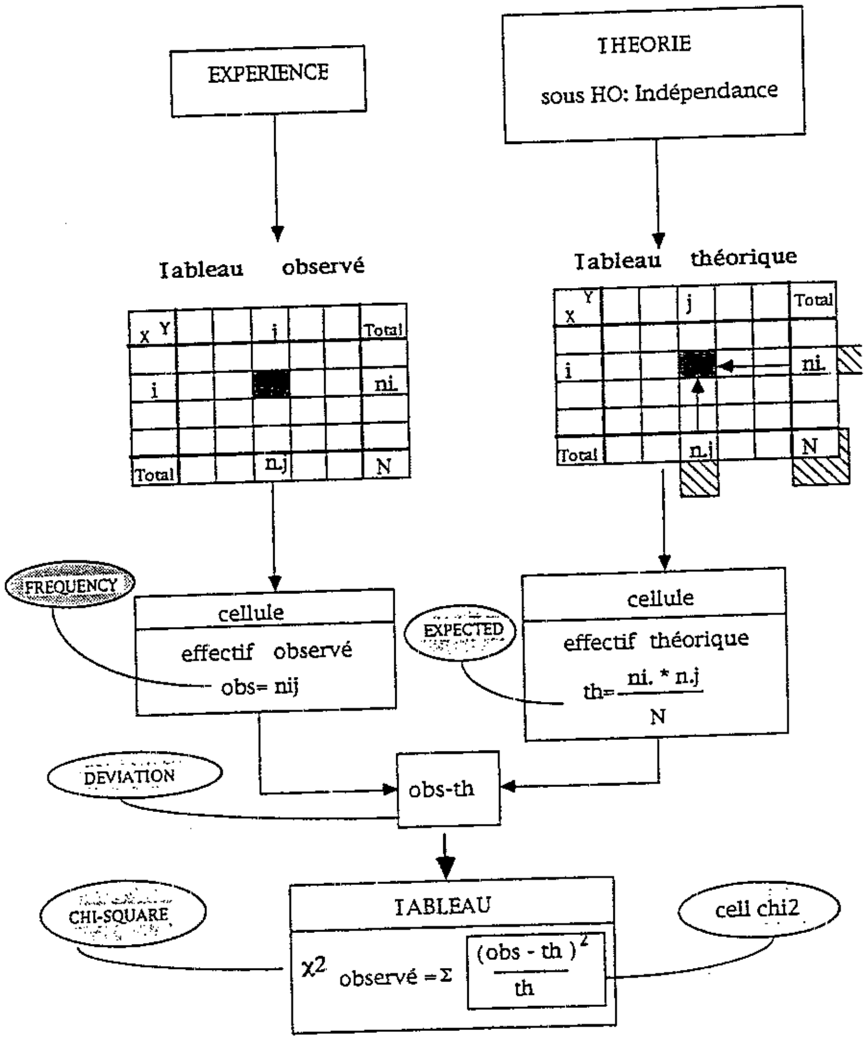
III Indépendance-Association entre variables nominales

III - 1 Le Test du χ^2

Dans le cas d'une recherche d'indépendance entre la variable ligne et la variable colonne d'un tableau de contingence, on va comparer la distribution statistique observée dans l'échantillon, à une distribution théorique.
Cette distribution théorique est celle que l'on doit avoir **si les 2 variables sont indépendantes,** c'est à dire sous l'hypothèse Ho.
On veut savoir si les écarts entre ces deux distributions sont imputables aux fluctuations d'échantillonnage, ou si au contraire, les écarts sont trop importants pour que l'on puisse accepter l'hypothèse Ho.
Le schéma de la page suivante montre le parallèle qui est fait entre l' **Expérience,** partie gauche du graphique et la **Théorie,** partie droite du graphique.

Note : les «bulles» du schéma font référence au vocabulaire S.A.S. en sortie de la Proc FREQ.

Le $\chi 2$



Le nombre de degrés de liberté d'une table de contingence à r lignes et c colonnes est donné par :

$$\boxed{\begin{array}{l} ddl = (r-1) * (c-1) \\ DF \end{array}}$$

DF : Degree of Freedom

Comme pour tous les tests de S.A.S., à chaque valeur d'une statistique calculée (observée) S.A.S. associe la probabilité appelée **p-value**, qui est ici la probabilité d'obtenir une valeur au moins égale à la valeur observée du χ^2 si les deux variables étaient indépendantes. Cette p-value résulte du calcul automatique fait dans S.A.S. en utilisant la fonction PROBCHI.

$$\boxed{\textbf{p-value} = 1 - \text{PROBCHI}\,(\,\boldsymbol{\chi 2\ \text{obs}}\,,\ \text{ddl}\,)}$$

Raisonnement sur la p-value :

Si p-value petit	**⇒**	**rejet de Ho**	**⇒**	**association**
Si p-value grand	**⇒**	**non rejet de Ho**		

Conditions de validité : quelques rappels

• Le test du χ^2 peut s'appliquer sur **tous les types de variables**, variables nominales, variables ordinales, variables d'intervalle ou de ratio. Cependant pour les 3 derniers types il existe d'autres indicateurs ou mesures d'association mieux adaptés.
• Les effectifs théoriques dans toutes les cases doivent être **au moins égaux à 5** pour que le test du χ^2 soit valide. Cette règle fait a peu près l'unanimité des théoriciens de la Statistique.
Si cette règle n'est pas vérifiée S.A.S. le signale. On peut alors procéder à des regroupements de modalités, si cela est possible et a un sens, ou utiliser le test exact de Fisher.
• Pour appliquer le test du χ^2 on fait la supposition que les proportions marginales dans la population totale sont les mêmes que celles observées sur l'échantillon.
• Le test du χ^2 **ne s'applique que dans un cadre d'inférence**. C'est à dire lorsque l'on dispose d'un échantillon, et que l'on souhaite étendre les résultats observés à la population totale.
Si l'échantillon recouvre toute la population, faire un test du χ^2 n'a pas de sens.
• Pour l'analyse des tableaux obtenus en seconde main les tests du χ^2 doivent être effectués sur les tableaux **avant redressement**.
• Le test du χ^2 **est sensible à la taille de l'échantillon.**
Jean-Marie Grosbras fait la remarque malicieuse :
« Il y a toujours moyen d'obtenir un χ^2 significatif (c'est à dire dépassant les valeurs critiques de la table à 5% ou 1%), c'est d'avoir un gros échantillon ».
• Si on multiple tous les effectifs des cellules d'un tableau par 100 par exemple, alors la statistique du χ^2 est multipliée aussi par 100 et pourtant la force de la liaison n'a pas changé.
• **association ne signifie pas causalité**

Exemple :
Complications lors d'un accouchement, en présence ou absence de médecin.

Complications avec médecin	oui	non	Total
oui	60	440	500
non	20	480	500
Total	80	920	1000

χ^2 obs = 21 p-value = 0.000 $\Rightarrow$ test significatif $\Rightarrow$ rejet de l'indépendance

Interprétation sans bon sens :
Les complications sont plus fréquentes en présence d'un médecin. Le médecin est-il la cause ?
En fait, les 2 groupes « avec médecin » et « sans médecin » sont constitués de cas inégalement graves. Les 2 groupes ne sont pas comparables.

III - 2 Mesures dérivées du χ^2 d'indépendance

III - 2 . 1 Cas général d'une table rxc

Ces mesures sont obtenues par l'option CHISQ de l'instruction TABLE.

Les notations : 2 variables nominales X à r modalités et Y à c modalités (r = row nombre de lignes et c = column nombre de colonnes) ; table (n_{ij}) avec $N = \sum_{ij} n_{ij}$ effectifs observés

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(n_{ij}-\left(n_{i.}n_{.j}/N\right)\right)^2}{\left(n_i\, n_j/N\right)}$$

L'hypothèse H0 est l'indépendance, c'est à dire $n_{ij} = \left(n_i\, n_j\right)/N$

- **Rappel des propriétés du χ^2 d'indépendance :**

Le χ^2 de Pearson prend des valeurs positives.
Il est nul sous H0 ; en cas d'association «parfaite» entre les 2 variables, il prend une valeur qui dépend de N et du nombre de modalités : N x minimum (r-1, c-1).
Il permet de tester l'hypothèse d'indépendance à l'aide d'une statistique de test qui suit aymptotiquement (c'est-à-dire si N est grand) une loi du CHI-2 à (r-1)(c-1) degrés de liberté.

Pour remédier à l'influence de N dans le calcul, Pearson a proposé le coefficient phi^2.

- **phi^2 :** $\phi^2 = \chi^2/N$

Le ϕ^2 ne dépend pas de la taille de l'échantillon. C'est une statistique descriptive. Il prend lui aussi la valeur 0 sous indépendance ; sous association parfaite, il vaut minimum (r-1, c-1).
S.A.S donne $\phi = \sqrt{\phi^2}$ avec un signe : positif si dans la table l'association se retrouve suivant la diagonale, négatif si celle-ci se retrouve sur «l'anti-diagonale».
La loi de ϕ n'étant pas connue de façon théorique, on ne peut l'utiliser dans les logiciels pour tester l'indépendance.

Pour obtenir une autre mesure qui ne dépende pas de l'effectif total N, et soit plus petite que 1, Pearson a proposé le coefficient de contingence C.

- **C Contingency coefficient :**

Il est calculé suivant la formule suivante :

$$C = \sqrt{\chi^2/\left(N+\chi^2\right)} = \sqrt{\phi^2/\left(1+\phi^2\right)}$$

Il est compris entre 0 et 1, mais la valeur 1 n'est pas atteinte : s'il vaut encore 0 sous indépendance, sa valeur sous association parfaite dépend de r et c (si r = c, c'est $\sqrt{1-1/r}$), et peut être très éloignée de 1.
La loi de C n'étant pas connue, on ne peut l'utiliser pour tester l'indépendance.

Pour obtenir un coefficient qui puisse atteindre la valeur 1, Cramer a proposé le coefficient V.

- **V de Cramer :**

Il est obtenu par la formule suivante :

$$V = \phi/\sqrt{\min(r-1, c-1)}$$

Ses valeurs possibles sont donc comprises entre -1 et +1 ; il vaudra 0 sous indépendance et +1 ou -1 sous association parfaite.

C'est donc une mesure d'association ressemblant au coefficient de corrélation linéaire entre variables quantitatives. On ne connait pas la loi suivie par V, donc on ne peut pas l'utiliser pour tester l'indépendance.

Remarques sur les mesures dérivées du χ^2 d'indépendance :

- ces mesures sont symétriques en lignes et colonnes ;
- elles sont invariantes par permutations de 2 lignes et/ou 2 colonnes ; il faut donc choisir d'autre mesures si les lignes et/ou colonnes sont ordonnées (variables ordinales) comme on le verra au chapitre IV.
- elles dépendent des valeurs r et c, c'est-à-dire de la taille de la table (sauf V) : on ne peut donc comparer 2 mesures que pour des tables de dimensions voisines ;
- ϕ^2, V et C ne dépendent pas de l'effectif total N. Ce sont des statistiques descriptives.
- elles ne sont pas marginalement invariantes (c'est-à-dire changent si les lignes et/ou les colonnes sont multipliées par des constantes).
- Le test d'indépendance associé est fait à marges fixées qui sont déterminées par celles observées (n_i /N et n_j /N).

S.A.S. donne dans l'option CHISQ deux autres mesures qui ont la propriété de suivre des lois du CHI-2 , mais qui ne sont pas dérivées du χ^2 d'indépendance.

- **G^2 likelihood ratio :**

Il s'agit de la statistique du test d'indépendance construite à partir du Rapport de Vraisemblance Maximum de l'échantillon (RVM) .

$$G^2 = -2\,Log(RVM)$$

$$G^2 = 2\sqrt{n_{ij}\,Log\left(n_{ij}/\left(n_i\,n_j\right)/N\right)}$$

Ses valeurs sont positives. Il vaut 0 sous indépendance. Asymptotiquement (si N grand), il suit une loi du CHI-2 à (r-1)(c-1) degrés de libertés, et donc peut être utilisé pour tester l'indépendance.

Remarque : G^2 est proche du χ^2 d'indépendance si on est «près» de l'indépendance Ho, ou si N est grand.

- **Qmh appelé Mantel-Haenszel CHI-2 :**

Qmh mesure l'association entre les variables X et Y. Il est calculé à partir du coefficient de corrélation linéaire ρ entre les variables dont les modalités sont codées numériquement (ce codage est défini par l'option SCORES) : il n'est donc à utiliser que si les variables sont ordinales.

$Qmh = (N\text{-}1)\ \rho^2$

Il vaut 0 sous indépendance et ((N-1)/N) x minimum (r-1, c-1) sous association parfaite.
Il a la propriété de suivre une loi du CHI-2 à 1 degré de liberté quelle que soit la taille de la table.
On retrouvera cette mesure au chapitre V.

Exemple : enquête d'insertion CEREQ-DEP (cf. § II - 1)

X = diplômes à deux modalités
Y = situations à trois modalités.
Ici r = 2 et c = 3 donc V = ϕ.
De plus ϕ est petit donc C est proche de ϕ.

STATISTICS FOR TABLE OF DIPLOME BY SITU

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	2	5.604	0.061
Likelihood Ratio Chi-Square	2	5.681	0.058
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	2.376	0.123
Phi Coefficient		0.106	
Contingency Coefficient		0.105	
Cramer's V		0.106	

Sample Size = 498

III - 2 . 2 Cas d'une table 2x2

Les variables X et Y sont dichotomiques : la table devient $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_{1.} \\ n_{2.} \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_{.1} & n_{.2} \end{array} & N \end{array}$

La formule du χ^2 d'indépendance se simplifie alors : $\chi^2 = N\dfrac{(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}} = N\phi^2$

Le χ^2 prend des valeurs comprises entre 0 (indépendance) et N (association parfaite). Le test d'indépendance se fait avec une loi du CHI-2 à 1 degré de liberté.
Le ϕ^2 prend ses valeurs dans [0, 1]. Il est strictement égal au carré du V de Cramer (soit ϕ = V).
Le coefficient C de contingence a des valeurs comprises entre 0 (sous indépendance) et $\sqrt{1/2} \approx$ 0.707 (sous association parfaite).

Remarque : les variables étant dichotomiques, $\phi^2 = r^2$ (r = coefficient de corrélation linéaire) quel que soit le codage numérique associé aux modalités.

- **Qc continuity adjusted χ^2 :**

Pour corriger le fait qu'on applique une loi continue (le CHI-2) à une quantité qui est discontinue, Yates a proposé une correction au calcul du χ^2 d'indépendance suivant la formule suivante :

$$Q_c = N\frac{(|n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21}|-N/2)^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}} \quad \text{si} \quad |n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21}|>N/2$$

Qc = 0 sinon.

Qc a les mêmes propriétés que le χ^2 d'indépendance.

- **Qmh Mantel-Haenszel CHI-2 :**

Ici il peut être calculé indifféremment par la formule : $(N-1)\,r^2$ ou $((N-1)/N)\,\chi^2$.
il vaut 0 sous indépendance et (N-1) sous association parfaite. Le test d'indépendance utilise une loi du CHI-2 à 1 degré de liberté.

<u>Exemple</u> : Extrait de Radelet (1981) et cité dans Agresti (1990)
Verdict de 326 procès en Floride de 1976 à 1977.
X = race de l'accusé à deux modalités Blanc / Noir
Y = verdict de mort à deux modalités oui / non

```
etude d'une table 2x2 :   RACE / VERDICT

                TABLE OF RACE BY MORT

         RACE      MORT

         Frequency|
         Percent  |
         Row Pct  |
         Col Pct  |OUI     |NON     |  Total
         ---------+--------+--------+
         BLANC    |     19 |    141 |    160
                  |   5.83 |  43.25 |  49.08
                  |  11.88 |  88.12 |
                  |  52.78 |  48.62 |
         ---------+--------+--------+
         NOIR     |     17 |    149 |    166
                  |   5.21 |  45.71 |  50.92
                  |  10.24 |  89.76 |
                  |  47.22 |  51.38 |
         ---------+--------+--------+
         Total          36      290      326
                     11.04    88.96   100.00

         STATISTICS FOR TABLE OF RACE BY MORT

Statistic                      DF     Value       Prob
------------------------------------------------------
Chi-Square                      1     0.221      0.638
Likelihood Ratio Chi-Square     1     0.221      0.638
Continuity Adj. Chi-Square      1     0.086      0.769
Mantel-Haenszel Chi-Square      1     0.221      0.638
Fisher's Exact Test (Left)                       0.741
                    (Right)                      0.384
                    (2-Tail)                     0.725
Phi Coefficient                       0.026
Contingency Coefficient               0.026
Cramer's V                            0.026
```

III - 3 Test exact de Fisher dans le cas 2x2

Le test exact de Fisher s'obtient dans FREQ avec l'option CHISQ si la table est 2x2 (sinon ajouter l'option EXACT).
Il s'applique quand les conditions de validité du test du χ^2 d'indépendance sont violées : si N est petit (N < 20) ou s'il existe des cases d'effectif < 5.
Il s'applique également au cas où le test donne une probabilité critique voisine du seuil 5 % (donc la conclusion du test est «délicate»).

Théorie : il s'agit d'un test à marges fixées.
$(n_{1.}, n_{2.})$ et $(n_{.1}, n_{.2})$ étant fixés, on peut calculer sous l'hypothèse d'indépendance Ho la probabilité d'obtenir le tableau de contingence :

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_{1.} \\ n_{2.} \end{array} \\ n_{.1} \quad n_{.2} & N \end{array}$$

(a b c d effectifs observés)

Remarque : si l'effectif en case (1,1) est donné, les 3 autres sont déterminés puisque les marges sont fixées.

On montre que n_{11} suit une loi hyper-géométrique H (N, $n_{1.}$, $n_{.1}$ /N) (tirage sans remise de $n_{.1}$ individus parmi N, dans une population où des individus ayant un caractère particulier sont en proportion $n_{1.}$ / N).

$$\mathrm{Pr}\,ob(n_{11}=a)=\frac{n_{1.}!\,n_{2.}!\,n_{.1}!\,n_{.2}!}{N!\,a!\,b!\,c!\,d!}$$

On peut donc calculer de façon exacte la probabilité du test.
S.A.S. permet de faire le test bilatéral et le test unilatéral.
Dans le test bilatéral, l'hypothèse nulle Ho est l'indépendance, l'alternative H1 étant «non indépendance» qui peut se dire «les cases du tableau ne sont pas chargées comme sous indépendance».
Dans le cas unilatéral, on fixe une alternative H1 «non indépendance» du genre «les cases sont plus (ou moins) chargées que sous indépendance».

Choix du «sens» de l'alternative H1 :

soit $\delta(n_{ii})=n_{ii}-\frac{n_{i.}n_{.i}}{N}$ $\left[=-\left(n_{ij}-\frac{n_{i.}n_{.j}}{N}\right) \quad si \quad i\neq j\right]$
= «écart à l'indépendance»

$\delta = 0$ caractérise l'indépendance Ho (case aussi chargée que sous indépendance)

test	gauche	= l'alternative à Ho est $\delta < 0$ (moins chargé)
	droit	= l'alternative à Ho est $\delta > 0$ (plus chargé)
	bilatéral	= l'alternative à Ho est $\delta \neq 0$ (différent)

On regardera donc δ (a) pour choisir l'alternative, c'est-à-dire la différence (effectif observé-effectif attendu) de la case (1,1) [On obtient cette différence par l'option DEVIATION].
On peut aussi regarder celle des probabilités des 2 tests unilatéraux qui est plus petite que 0.5 : c'est l'alternative à choisir.

Calcul des probabilités des 3 tests :

- test gauche «left» Prob1 = somme des probabilités des tables telles que l'effectif $a \geq n_{11}$;
- test droit «right» Prob2 = idem pour les tables $n_{11} \geq a$;
- test bilatéral «2-tail» Prob3 = idem pour les tables dont la probabilité est inférieure ou égale à celle de la table observée.

Les calculs peuvent être longs puisqu'il faut dénombrer les tables répondant à l'hypothèse alternative, puis en calculer les probabilités par la loi hypergéométrique.

D'autre part la loi hypergéométrique n'est pas symétrique, sauf si les marges des 2 lignes et des 2 colonnes sont égales, ou si N est grand ($N \geq 20$) car alors Prob $(n_{11} = a) = 0$.
On n'a donc pas en général : Prob3 = 2 Prob1 (ou 2 Prob2).
Par contre on a toujours : Prob1 + Prob2 = 1 + Prob$(n_{11} = a)$.

Dans le cas du test du χ^2 d'indépendance, on l'applique si N est grand, et donc alors la probabilité du test unilatéral est la moitié de celle du test bilatéral qui est donnée par S.A.S..

Nota-bene : Dans S.A.S., les calculs sont aussi possibles si r ou c > 2, mais ils sont très longs : à éviter si rxc > 5. D'autre part, on a du mal à concrétiser l'alternative dans ce cas, car il faut ici plus d'une case pour pouvoir déterminer totalement la table.

Exemple détaillé issu de SIEGEL « Non parametric statistics for the behavioral sciences», repris par Sautory ; soit la tables ci-dessous, avec des modalités G1 et G2 en lignes, - + en colonnes :

$$\begin{array}{cccc} & - & + & n_{.j} \\ & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 6 \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 7 \\ 5 \end{array} \\ n_i & 5 & 7 & 12 \end{array}$$

L'effectif sous indépendance serait 7x5/12 = 2.916 ; δ (n_{11}) vaut -1.916 donc δ (n_{11}) est négatif : l'alternative est «case moins chargée que sous indépendance» c'est-à-dire qu'il faut faire un test unilatéral «gauche».

La loi hypergéométrique est la loi H (12, 5, 58.33%) c'est-à-dire de tirage sans remise de 5 individus parmi 12, ayant une caractéristique en proportion 7/12.

Pour effectuer le test «gauche», on va calculer les probabilités des tables pour lequelles la case (1,1) est au plus aussi chargée que celle observée :

$$\text{Prob}(n_{11} = 1) = 0.044$$
$$\text{Prob}(n_{11} = 0) = 0.001 \quad \Rightarrow \quad \text{somme} = 0.045 = \text{Prob-left.}$$

Pour effectuer le test bilatéral, on va dénombrer parmi toutes les tables possibles celles dont la probabilité est inférieure ou égale à celle de la table observée :

Prob (n11=0) = 0.001 *	Prob (n11=3) = 0.442
Prob (n11=1) = 0.044 * (table observée)	Prob (n11=4) = 0.221
Prob (n11=2) = 0.265	Prob (n11=5) = 0.027 *

* = table à choisir pour l'alternative

→ Prob (2-tail) = 0.001 + 0.044 + 0.027 = 0.072

(à comparer à la probabilité du test du χ^2 (non valide) qui est 0.023)

<u>Exemple</u> : extrait de Siegel, repris par O. Sautory.

```
                    TABLE OF GROUP BY VAL

            GROUP      VAL

            Frequency|
            Expected |
            Percent  |
            Row Pct  |
            Col Pct  |-        |+        |  Total
            ---------+---------+---------+
            G1       |       1 |       6 |       7
                     | 2.9167  | 4.0833  |
                     |   8.33  |  50.00  |   58.33
                     |  14.29  |  85.71  |
                     |  20.00  |  85.71  |
            ---------+---------+---------+
            G2       |       4 |       1 |       5
                     | 2.0833  | 2.9167  |
                     |  33.33  |   8.33  |   41.67
                     |  80.00  |  20.00  |
                     |  80.00  |  14.29  |
            ---------+---------+---------+
            Total           5         7       12
                        41.67     58.33   100.00

            STATISTICS FOR TABLE OF GROUP BY VAL

   Statistic                          DF     Value        Prob
   ------------------------------------------------------------
   Chi-Square                          1     5.182       0.023
   Likelihood Ratio Chi-Square         1     5.555       0.018
   Continuity Adj. Chi-Square          1     2.831       0.092
   Mantel-Haenszel Chi-Square          1     4.750       0.029
   Fisher's Exact Test (Left)                         4.55E-02
                       (Right)                           0.999
                       (2-Tail)                       7.20E-02
   Phi Coefficient                          -0.657
   Contingency Coefficient                   0.549
   Cramer's V                               -0.657

   Sample Size = 12
   WARNING: 100% of the cells have expected counts less
            than 5. Chi-Square may not be a valid test.
```

III - 4 Mesures orientées vers la prédiction

III - 4 . 1 Coefficient Lambda (λ)

Approche de GUTTMANN (1941) et de GOODMAN & KRUSKAL (1954)

Lambda est une mesure d'association pour des tableaux croisés, les variables étant traitées comme **nominales.**
Il existe 3 formes de coefficicient λ

1. λ asymétrique $Y|X$ *qui se lit Y sachant X*
2. λ asymétrique $X|Y$
3. λ symétrique

➔ 1. λ **asymétrique** $\mathbf{Y|X}$

Idée
On veut essayer de pronostiquer la modalité de Y prise par un individu tiré au hasard parmi les N individus, et ceci dans 2 situations :

- sans aucune information complémentaire
- en connaissant la modalité i de la variable X

• Aucune information complémentaire

En l'absence de toute information on choisira la **modalité de Y** la **plus fréquente** sur la marge. C'est la meilleure stratégie puisqu'en faisant ce choix on minimise la probabilité de se tromper.

Y max	$\Rightarrow$ en effectif	$\underset{j}{Max}(n_{.j})$
	$\Rightarrow$ en fréquence	$\underset{j}{Max}(n_{.j}/N)$

avec une **probabilité d'erreur**

$$p1 : \quad \text{Proba}(\text{erreur}(Y)) = 1 - \underset{j}{Max}(n_{.j}/N)$$

• On connaît la modalité prise sur la variable X et on veut pronostiquer celle prise par la variable Y.

X : joue le rôle de variable indépendante
Y : joue le rôle de variable dépendante.

Si on connaît la modalité i de X pour l'individu tiré au hasard, on choisira la **modalité de Y** dont la **fréquence est maximum** (fréquence max sur la ligne i), toujours dans le but de minimiser la probabilité d'erreur.

$$Y \; Max \middle| X_i \Rightarrow en\ frequence \quad \underset{j}{Max}\left(n_{ij}/n_i\right)$$

On démontre que la probabilité d'erreur de Y sachant X pour toutes les modalités de X est :

$$\text{p2 : Proba (erreur Y } | \text{ X) } = \quad 1-\sum_i \underset{j}{Max}\left(n_{ij}/N\right)$$

A partir de ces deux probabilités

p1 : proba d'erreur sans information sur X

p2 : proba d'erreur si on connaît X,

on définit le ratio appelé Lambda asymétrique Y | X

$$\lambda \text{ Y} | \text{X} = (\text{p1 - p2}) / \text{p1}$$

$$\lambda Y|X = \frac{\left(\sum_i \underset{j}{Max}\, n_{ij}\right) - \underset{j}{Max}\, n_{.j}}{\left(N - \underset{j}{Max}\, n_{.j}\right)}$$

<u>Lecture de la formule de λ Y | X</u>

$\sum_i \underset{j}{Max}\, n_{ij}$: représente la somme sur toutes les lignes des valeurs maximum des effectifs des cellules sur les colonnes.

$\underset{j}{Max}\, n_{.j}$: représente la valeur maximum des totaux sur les lignes (marge)

Interprétation de λ Y | X

Le ratio λ **Y | X** représente le pourcentage de réduction de l'erreur de pronostic entre :
- la prévision de Y sans connaissance sur X
- et la prévision de Y connaissant X.

λ Y | X est une mesure du % d'amélioration du pronostic de Y apporté par la connaissance de X.

De par sa construction ce ratio est indépendant de la taille de l'échantillon. Il est toujours compris entre 0 et 1.

• Si λ **Y | X = 0** $\Rightarrow$ (p1=p2)
Connaître X n'est d'aucune utilité pour prédire Y : on prédit toujours la même modalité de Y

forme du tableau

• M • • •
• M • • •
• M • • •
• M • • •

Les maxima sont tous repérés sur une même <u>colonne</u>.

• Si **λ Y | X =1** $\Rightarrow$ (p2=0)
La prédiction dans ce cas est effectuée sans erreur
A chaque modalité i de la variable indépendante X est associée une seule modalité j de la variable dépendante Y.

forme du tableau

0 X 0 0 0
0 0 X 0 0
0 0 X 0 0
X 0 0 0 0
0 0 0 X 0

Chaque <u>ligne</u> du tableau n'a qu'une seule cellule non nulle.

→2. λ asymétrique X | Y

On peut faire le même raisonnement en inversant les rôles de X et de Y, ce qui donne Lambda asymétrique de X sachant Y noté **λ X | Y**.

X devient la variable dépendante
Y devient la variable indépendante

Cette fois-ci, c'est Y qui est susceptible d'apporter de l'information au pronostic de X.

Exemples Pratiques

• Soit le tableau croisant la couleur des yeux et celle des cheveux.

cheveux **yeux**	blond	brun	noir	roux	**Total**
bleu	**25**	9	3	7	44
vert	13	**17**	10	7	47
marron	7	**13**	8	5	33
Total	**45**	39	21	19	**124**

Nous avons vu précédemment que la distribution des blonds est différente de la distribution des roux. Il y a des points d'accumulation (attractions) ou des vides (répulsions) à des endroits différents.
Les cheveux blonds et les yeux bleus sont souvent associés, comme le sont les cheveux bruns avec les yeux marrons. Le calcul de λ donne :

$\lambda\, \mathbf{Y|X} =$ (25 +17 +13 - 45) / (124 - 45) = 10 / 79 = 0.127

$\lambda\, \mathbf{X|Y} =$ (25 +17 + 10 + 7 - 47) / (124 - 47) = 12 / 77 = 0.156

<u>Notation de S.A.S.</u>

$\lambda\, \mathbf{Y|X}$ noté $\lambda\, \mathbf{C|R}$
$\lambda\, \mathbf{X|Y}$ noté $\lambda\, \mathbf{R|C}$

- <u>Exemple et analyse</u> empruntés à J.M. Grosbras

Soient les 2 questions Q1 et Q2 posées lors d'une enquête :
Q1 : possédez-vous un téléviseur ?
Q2 : fréquentez-vous le cinéma ?

Le tableau croisant les réponses à Q1 et Q2 est le suivant :

Ciné **Télé**	OUI	NON	**Total**
OUI	20	680	700
NON	80	220	300
Total	100	900	1000

$\lambda\, \mathbf{Y|X} =$ (680 +220 - 900) / (1000 - 900) = 0

Quelle que soit la réponse à la question sur la possession d'un téléviseur, la fréquentation du cinéma est minoritaire, et on peut toujours pronostiquer la réponse 'NON' pour Q2.

$\lambda\, \mathbf{X|Y} =$ (80 + 680 - 700) / (1000 - 700) = 0.2

Savoir qu'un individu a ou non été au cinéma influence le pronostic sur le fait qu'il a, ou non, un téléviseur.

Variance de l'estimateur λ : ASE Asymptotic Standard Error

S.A.S. fournit l'erreur-type pour chaque λ, ce qui permet d'accorder une certaine confiance à la valeur de cette mesure.

→ 3. λ symétrique

Afin d'établir une symétrie entre X et Y un coefficient "artificiel" est calculé par S.A.S.. C'est une sorte de moyenne sur les deux λ asymétriques.

$$\lambda = \frac{\left(\sum_i \underset{i}{Max}\, n_{ij}\right) + \left(\sum_j \underset{i}{Max}\, n_{ij}\right) - \left(\underset{j}{Max}\, n_{.j} + \underset{i}{Max}\, n_{i.}\right)}{2 * N - \left(\underset{j}{Max}\, n_{.j} + \underset{i}{Max}\, n_{i.}\right)}$$

De par sa construction la valeur de ce λ est comprise entre les deux λ asymétriques.

Calcul pour l'exemple couleur des yeux et des cheveux :
λ = (10 + 12)/ (79 + 77) =0.141
on a bien 0.141 compris entre **λ Y|X=** 0.127 et **λ X|Y=** 0.156

Remarque importante pour l'interprétation
• s'il y a **indépendance** alors **λ = 0**
Mais attention le raisonnement réciproque est faux : avoir λ = 0 ne signifie pas toujours avoir indépendance.
• **λ = 1 ⇔ Association parfaite**

Deux cases non nulles du tableau de contingence ne sont jamais sur la même ligne ni sur la même colonne (*cf la forme du tableau ci-dessous*).

0 X 0 0 0
0 0 X 0 0
X 0 0 0 0
0 0 0 X 0
0 0 0 0 X

Chaque ligne **et** chaque colonne du tableau n'a qu'une seule cellule non nulle.

III - 4 . 2 Coefficient d' Incertitude U

Tout comme le Lambda, le coefficient d'incertitude est utilisé pour des tableaux croisés, les variables étant traitées comme **nominales.**
Il existe 3 formes de coefficient d'Incertitude
- Coefficient d'Incertitude **Y|X**
- Coefficient d'Incertitude **X|Y**
- Coefficient d'Incertitude symétrique

Son invention prend origine dans l'approche de la théorie de l'information de Shannon (1940), dans le domaine des communications.

Historique

Lorsque Shannon a proposé en 1940 une mesure de l'incertitude, il se plaçait dans une situation de transfert d'information en télécommunications depuis une source (émetteur) jusqu'à sa réception (récepteur).

Soit un ensemble d'événements possibles $E_1, \ldots, E_n$, dont les probabilités de réalisation sont $p_1, \ldots, p_n$, supposées connues. Le problème est de trouver « une mesure du nombre de *choix* impliqués dans la sélection de l'événement ou celle de *l'incertitude* du résultat » ? Shannon a démontré que la seule fonction H vérifiant certaines propriétés (continuité, monotonie etc....) est de la forme :

$$H = -K\sum_{i=1}^{n} p_i Log(p_i)$$ K étant une constante positive dépendant des unités de mesure.

La quantité H introduite par Shannon comme mesure du choix et de l'incertitude joue un rôle central comme mesure de l'information. Cette mesure a été étendue depuis à d'autres domaines de la connaissance comme en Statistique, en Economie, en Biologie etc....

Shannon a donné le nom d' **Entropie** à cette mesure de l'information, du choix et de l'incertitude.

Note : Selon les auteurs et les domaines de connaissance il y a une certaine confusion entre les mots *Entropie*, *Incertitude*, et même *Information*. Pour plus d'information, voir le livre de P.J. LANCRY « Théorie de l'information et Economie ».

L'incertitude en statistique et économie

- **Entropie**

de X $H(X) = -\sum_i (n_i/n) Log(n_i/n)$

de Y $H(Y) = -\sum_j (n_j/n) Log(n_j/n)$

de XY $H(XY) = -\sum_i \sum_j (n_{ij}/n) Log(n_{ij}/n)$

- **Incertitude Asymétrique**

de **Y|X** $U(Y/X) = (H(X) + H(Y) - H(XY)) / H(Y)$

de **X|Y** $U(X/Y) = (H(X) + H(Y) - H(XY)) / H(X)$

- **Incertitude symétrique**

$U = 2 (H(X) + H(Y) - H(XY)) / (H(X) + H(Y))$

L'approche des deux mesures U et λ est un peu similaire. On cherche la réduction de l'erreur de pronostic lorsque l'une des variable peut apporter une information sur l'autre.

Avantage de U sur λ

L'avantage de la mesure U sur λ, est qu'elle prend en compte toute la distribution de la variable et non seulement le mode.

Interprétation de U

U est compris entre 0 et 1

- Si U=0 il n'y a aucune possibilité d'améliorer la connaissance de la variable dépendante à partir de la variable indépendante.
- Si U=1 on élimine complètement l'incertitude. Ceci n'est réalisé que lorsque chaque modalité de la variable indépendante est associée à une modalité unique de la variable dépendante.

Nous terminons ici l'inventaire des tests et mesures afférant aux variables nominales. Dans le chapitre suivant nous traiterons le cas des variables ordinales.

IV - Indépendance et association entre variables ordinales

Les mesures d'association entre variables ordinales calculées par la PROC FREQ (Gamma, Tau-b de Kendall, Tau-c de Stuart, D de Somer, coefficients de corrélation de Pearson et de Spearman[4]), utilisent cette propriété que les modalités[5] des variables sont ordonnées, et cherchent à mesurer une relation monotone entre elles : croissent-elles dans le même sens, ou en sens contraire ?
Avant de définir ces mesures faisons un détour par une approche formelle qui nous permettra de mieux comprendre, croyons-nous, à la fois ce qu'elles doivent au coefficient de corrélation de Pearson, et le développement des calculs.

IV - 1 Coefficients dérivés de la Formule de Daniels

IV - 1 . 1 Approche formelle

Soit un échantillon de n individus sur lesquels on mesure deux variables X et Y. Si à toute paire (h,h') d'individus on associe un nombre noté $a_{hh'}$ (resp. $b_{hh'}$) correspondant à la variable X (resp. Y), la formule générale de Daniels s'écrira alors :

$$\frac{\sum_h \sum_{h'} a_{hh'}.b_{hh'}}{\sqrt{\left(\sum_h \sum_{h'} a_{hh'}^2\right)\left(\sum_h \sum_{h'} b_{hh'}^2\right)}}$$ (où h et h' varient de 1 à n).

Ce coefficient varie entre -1 et +1 (inégalité de Schwarz).
On obtient des coefficients différents selon le choix de $a_{hh'}$ et $b_{hh'}$

IV - 1 . 2 Coefficients de corrélation

- **Coefficient de Pearson (1896)**

pour X et Y quantitatives, il s'obtient en prenant
$a_{hh'} = xh - xh'$ et $b_{hh'} = yh - yh'$.

[4] on ne traitera pas le coefficient polychorique, cf. l'ouvrage de O. Sautory.
[5] dans FREQ on peut définir les codages des modalités par l'option SCORES

- **Coefficient de corrélation des rangs de Spearman (1904)**

Il s'obtient avec $a_{hh'} = rX(h) - rX(h')$ et $b_{hh'} = rY(h) - rY(h')$
où $rX(h)$ désigne le rang de l'individu h sur la variable X.
Il peut y avoir des individus «ex-aequo» sur l'une ou l'autre des variables, c'est-à-dire prenant la même valeur. Soit n_k le nombre d'individus prenant la valeur k sur la variable X (pour reprendre les notations usuelles d'un tableau croisant X en ligne et Y en colonne) : leur rang sera alors le rang moyen $rX(h)$ qui vaut $\sum_{i=1}^{k-1} n_i + (n_k + 1)/2$

IV - 1 . 3 Les coefficients de Kendall τ et τ_b

- **Le Tau de Kendall (1938)** s'obtient en prenant

$a_{hh'}$ = signe de $(x_h - x_{h'})$ et $b_{hh'}$ = signe de $(y_h - y_{h'})$.
$a_{hh'}$ vaut alors : 1 si $x_h > x_{h'}$, -1 si $x_h < x_{h'}$,
0 si h et h' sont ex-aequo sur la variable X.
Et de même pour $b_{hh'}$.

Remarque : La PROC FREQ ne calcule pas le Tau de Kendall.

- **Concordances et discordances**

Le produit $a_{hh'} b_{hh'}$ vaut 1 si les rangs de h et de h' sont en **concordance** sur les deux variables :
$(x_h < x_{h'}$ et $y_h < y_{h'})$ ou $(x_h > x_{h'}$ et $y_h > y_{h'})$,
Le produit vaut -1 si les rangs sont en **discordance** :
$(x_h < x_{h'}$ et $y_h > y_{h'})$ ou $(x_h > x_{h'}$ et $y_h < y_{h'})$.
Si on note C le nombre de paires hh' concordantes et D le nombre de paires discordantes on a donc :

$$\sum_h \sum_{h'} a_{hh'} b_{hh'} = 2\,(C - D)$$

Remarque : on compte dans la somme double deux fois la même paire, comme hh' et h'h.

C-D est nul si les concordances équilibrent les discordances, ce qui est en particulier le cas s'il y a indépendance au sens des profils (cf. J.M. Grosbras). La différence est positive si X et Y varient plutôt dans le même sens, négative si elles varient en sens contraire.
Tous les coefficients qui suivent sont calculés à partir de cette différence C-D au numérateur. Ils diffèrent par le dénominateur choisi.
Ils s'interpréteront comme la différence entre la proportion (probabilité) de concordances et la proportion (probabilité) de discordances $\Pi_C - \Pi_D$.
Dans le cas du **τ de Kendall** on considère qu'il n'y a pas d'ex-aequo et tous les $a_{hh'}^2$ et les $b_{hh'}^2$ valent 1, si bien qu'on a au dénominateur le nombre n(n-1) de paires hh' ou h'h d'individus distincts :

$$\tau = \frac{2(C - D)}{n(n-1)}$$

Calcul de C et D

Cij		Dij
	nij	
Dij		Cij

Reprenons les notations usuelles pour le tableau croisant les variables X et Y, Le nombre d'individus en concordance avec ceux de la case ij est obtenu en sommant toutes les cases du coin supérieur gauche du tableau, et du coin inférieur droit.

$$C_{ij} = \sum_{k>i}\sum_{l>j} n_{kl} + \sum_{k<i}\sum_{l<j} n_{kl}$$

Le nombre C de paires concordantes est donc : $C = (1/2)\sum_i \sum_j n_{ij} C_{ij}$

Le coefficient 1/2 vient de ce que l'on a comptabilisé 2 fois chaque paire d'individus.
De même le nombre d'individus en discordance avec ceux de la case ij est obtenu en sommant toutes les cases du coin inférieur gauche et toutes celles du coin supérieur droit du tableau :

$$D_{ij} = \sum_{k>i}\sum_{l<j} n_{kl} + \sum_{k<i}\sum_{l>j} n_{kl}$$

Le nombre D de paires discordantes est alors : $D = (1/2)\sum_i \sum_j n_{ij} D_{ij}$

Pour le calcul sur un exemple voir en fin de ce paragraphe.

- **Le Tau-b de Kendall**

S'il y a des ex-aequo sur l'une ou l'autre des variables, certains termes $a_{hh'}$ ou $b_{hh'}$ sont nuls.
Pour chaque valeur i de la variable X il y a $n_{i.}$ individus ex-aequo, donc $n_{i.}(n_{i.} - 1)$ paires nulles ; le nombre total de termes $a_{hh'}$ nuls est donc $\sum_i n_{i.}(n_{i.} - 1)$, et :

$$\sum_h \sum_{h'} a_{hh'}{}^2 = n(n-1) - \sum_i n_{i.}(n_{i.} - 1) = n^2 - \sum_i n_{i.}^2$$

De même le nombre total de termes $b_{hh'}$ nuls est-il $\sum_j n_{.j}(n_{.j} - 1)$, et

$$\sum_h \sum_{h'} b_{hh'}{}^2 = n^2 - \sum_j n_{.j}^2$$

$$\tau_b = \frac{2(C-D)}{\sqrt{\left(n^2 - \sum_i n_{i.}^2\right)\left(n^2 - \sum_j n_{.j}^2\right)}}$$

Remarques

- τ_b est plus approprié au cas des tableaux carrés. τ_b=1 en cas de concordance parfaite (tableau chargé sur la diagonale majeure) et -1 en cas de discordance (diagonale mineure).
- Dans le cas des tables 2 x 2 on a $|\tau_b|=\phi$. L'avantage de τ_b est qu'il indique par son signe la tendance de l'association.

IV - 2 Autres coefficients basés sur les concordances et discordances

Comme τ et τ_b ces mesures reposent sur le nombre de concordances C et de discordances D comptées sur toutes les paires d'observations.

- **Gamma (Goodman & Kruskal - 1954)**

$$\gamma = \frac{C-D}{C+D}$$

Ce coefficient ne tient pas compte des ex-aequo ; il varie entre -1 et +1 mais on peut avoir $|\gamma| = 1$ sans que le tableau soit diagonal.

- **Tau-c de Stuart**

$$\tau_C = \frac{2(C-D)}{n^2(m-1)/m}$$ où m est la plus petite des dimensions (r,c).

τc est approprié aux tableaux rectangulaires puisqu'il tient compte de ses dimensions. $|\tau c|$ est voisin de 1 quand les seules cases non nulles sont celles des diagonales les plus longues (cf J.M. Grosbras).
Comme C+D <= n(n+1)/2 on a en général $\gamma > \tau b$, $\gamma > \tau c$.

- **D asymétrique de Somer**

Ce coefficient tient compte aussi des ex-aequo dans le calcul du dénominateur, mais de façon dissymétrique : si la variable ligne X est considérée comme dépendante, on compte au dénominateur le nombre de paires non ex-aequo sur la variable Y (i.e. on déduit les ex-aequo sur la variable indépendante) :

$$D(X/Y) = \frac{2(C-D)}{\left(n^2 - \sum_j n_j^2\right)}$$

On définira de même : $D(Y/X) = \frac{2(C-D)}{\left(n^2 - \sum_i n_i^2\right)}$

Toutes ces statistiques sont asymptotiquement normales : S.A.S. en calcule l'ASE (Asymptotic Standard Error) dont on déduit un intervalle de confiance.

Exemple : table 2 X 3 - données insertion des jeunes

```
TABLES DIPLOME*SITU/ NOROW NOCOL NOPERCENT MEASURES;
```

```
                    ATELIER SAS PROC FREQ
            SOURCE: ENQUETE D'INSERTION CEREQ-DEP
DE TERMINALE CAP OU BEP COMMERCE EN L.P. (SN, APPRENTIS EXCLUS)

                 TABLE OF DIPLOME BY SITU

         DIPLOME     SITU

         Frequency!CHOMAGE !MESURE  !EMPLOI  !  Total
         ---------+--------+--------+--------+
         NON DIPL !     54 !     52 !     40 !    146
         ---------+--------+--------+--------+
         DIPLOMES !    122 !     97 !    133 !    352
         ---------+--------+--------+--------+
         Total         176      149      173      498

          STATISTICS FOR TABLE OF DIPLOME BY SITU

      Statistic                              Value       ASE
      ------------------------------------------------------
      Gamma                                  0.123      0.077
      Kendall's Tau-b                        0.065      0.041
      Stuart's Tau-c                         0.068      0.043

      Somers' D C!R                          0.082      0.052
      Somers' D R!C                          0.051      0.033

      Pearson Correlation (Rank Scores)      0.069      0.043
      Spearman Correlation                   0.069      0.044

      Lambda Asymmetric C!R                  0.034      0.049
      Lambda Asymmetric R!C                  0.000      0.000
      Lambda Symmetric                       0.024      0.034

      Uncertainty Coefficient C!R            0.005      0.004
      Uncertainty Coefficient R!C            0.009      0.008
      Uncertainty Coefficient Symmetric      0.007      0.006

      Sample Size = 498
```

$C_{11} = 97 + 133$, $C_{12} = 133$, $C_{22} = 54$, $C_{23} = 54+52$

$C = (1/2)(54\ C_{11} + 52\ C_{12} + 97\ C_{22} + 133\ C_{23})$

ou $C = 54\ (97+133) + 52\ (133) = 12\,420 + 6\,916 = 19\,336$

$D_{12} = 122$, $D_{13} = 122+97$, $D_{21} = 52+40$, $D_{22} = 40$

$D = 40\ (97+122) + 52\ (122) = 8\,760 + 6\,344 = 15\,104$

$C - D = 4232$, $C + D = 34\,440$, $n(n - 1) = 247\,506$

Exemple : table 2 x 2 - données insertion des jeunes

```
TABLES DIPLOME*SITU/ NOROW NOCOL NOPERCENT MEASURES;
```

```
                    ATELIER SAS PROC FREQ
            SOURCE: ENQUETE D'INSERTION CEREQ-DEP
DE TERMINALE CAP OU BEP COMMERCE EN L.P. (SN, APPRENTIS EXCLUS)

                  TABLE OF DIPLOME BY SITU

             DIPLOME       SITU

             Frequency!CHOMAGE !EMPLOI  !
                      !MESURE  !        !  Total
             ---------+--------+--------+
             NON DIPL !    106 !     40 !    146
             ---------+--------+--------+
             DIPLOMES !    219 !    133 !    352
             ---------+--------+--------+
             Total         325      173      498

           STATISTICS FOR TABLE OF DIPLOME BY SITU

      Statistic                              Value       ASE
      ------------------------------------------------------
      Gamma                                  0.234      0.102
      Kendall's Tau-b                        0.099      0.043
      Stuart's Tau-c                         0.086      0.038

      Somers' D C!R                          0.104      0.045
      Somers' D R!C                          0.095      0.041

      Pearson Correlation (Rank Scores)      0.099      0.043
      Spearman Correlation                   0.099      0.043

      Lambda Asymmetric C!R                  0.000      0.000
      Lambda Asymmetric R!C                  0.000      0.000
      Lambda Symmetric                       0.000      0.000

      Uncertainty Coefficient C!R            0.008      0.007
      Uncertainty Coefficient R!C            0.008      0.007
      Uncertainty Coefficient Symmetric      0.008      0.007

          Estimates of the Relative Risk (Row1/Row2)

                                                95%
      Type of Study            Value     Confidence Bounds
      ------------------------------------------------------
      Case-Control             1.609       1.055      2.456
      Cohort (Col1 Risk)       1.167       1.026      1.327
      Cohort (Col2 Risk)       0.725       0.539      0.975

      Sample Size = 498
```

V - Tests d'association de Cochran-Mantel-Haenszel

Ce sont des tests qui utilisent la loi hypergéométrique multiple, pour calculer la moyenne et la matrice de variance-covariance d'un vecteur mesurant la différence entre les fréquences observées et les fréquences attendues (en général sous indépendance). Si les cases sont d'effectifs suffisamment grands, on peut appliquer le théorème central limite et le vecteur est distribué selon une loi normale ; les statistiques de tests suivent alors des lois du CHI-2.
(cf. article de 1978 de Landis, Heyman et Koch, International Statistical Review, 1978, 46 , pages 237-254, cité en référence dans S.A.S.)

On les obtient par l'option CMH de FREQ, qui peut se séparer en CMH1 CMH2 CMH3.

	Y ordinale	Y nominale
X ordinale	CMH1	
X nominale	CMH2	CMH3

- **CMH1 : Cas où les 2 variables X et Y sont ordinales**

Ce test est basé sur le coefficient de corrélation entre X et Y, codées numériquement selon des valeurs définies par l'option SCORES (cf. Chapitre IV).
SCORES = TABLE : cas où les modalités sont numériques et donc leurs valeurs sont utilisées dans le calcul ;
SCORES = RANK : cas de modalités ordinales dont le rang est utilisé dans le calcul.
Lorsqu'il n'y a qu'une seule strate, la statistique vaut (N-1) r^2, qui suit un CHI-2 à 1 ddl.
C'est la mesure Qmh de l'option CHISQ (cf. III - 2.1).

- **CMH2 : cas où X est nominale (r modalités) et Y ordinale (c modalités)**

Ce test est basé sur la comparaison des r moyennes des scores de Y, calculées pour les r modalités de X. Il s'agit donc d'une analyse de variance (ou d'un test non paramétrique dit de Kruskall-Wallis si SCORES = RANK).
La statistique suit un CHI-2 à (r-1) degrés de liberté.

- **CMH3 : Cas où X et Y sont nominales**

C'est un test «d'association» entre X et Y.
La statistique suit un CHI-2 à (r-1)(c-1) degrés de liberté ;
elle est égale à $\frac{N}{N-1}\chi^2$ d'indépendance.

<u>Intérêt</u> : les test CMH sont des tests non paramétriques dans le cas où SCORES = RANK.

<u>Condition d'application</u> : Il faut que les effectifs par case soient «assez grands» pour que le théorème central limite soit applicable.

<u>Cas où il y a plusieurs tables</u> : si on ajoute une troisième variable Z à k modalités, on parle d'analyse stratifiée.
S.A.S. calcule une statistique CMH «ajustée» sur les k tables, permettant de vérifier si l'association se retrouve dans les k tables (les degrés de liberté ne changent pas). S.A.S. précise que cette statistique est peu efficace dans le cas de distorsions entre le sens des associations des k tables.

<u>Exemple</u> : Identique au § III - 2.1

Table 2 x 3, avec option CMH : ici CMH1 est égal au Mantel-Haenszel chi-square de l'option CHISQ du § III - 2.1. Par contre aucune des variables n'étant ordinale, c'est CMH3 qu'il faut utiliser.

```
                enquête CEREQ_DEP 1990 - option CMH
               SUMMARY STATISTICS FOR DIPLOME BY SITU

   Cochran-Mantel-Haenszel Statistics (Based on Table Scores)
 Statistic    Alternative Hypothesis    DF       Value      Prob
 ------------------------------------------------------------------
     1        Nonzero Correlation        1       2.376      0.123
     2        Row Mean Scores Differ     1       2.376      0.123
     3        General Association        2       5.592      0.061


 Total Sample Size = 498
```

VI - Approche probabiliste dans le cas d'une table 2x2

Plutôt que la table de contingence, on étudie ici la table de probabilité $p_{ij} = n_{ij} / N$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_{1.} \\ p_{2.} \end{array} \\ \begin{array}{cc} p_{.1} & p_{.2} \end{array} & 1 \end{array}$$

<u>Modèle</u> : Ici, le modèle probabiliste est multinomial : on tire un échantillon de taille N, avec remise, dans une population possédant 4 types d'individus répartis selon les proportions (p_{ij}).
On distingue les modèles d'échantillonnage du type «case control» (X aléatoire, Y fixé) des modèles du type «cohort» (X fixé, Y aléatoire).

	Y fixé	Y aléatoire
X fixé		cohort
X aléatoire	case control	

<u>Remarque</u> : On est souvent amené à privilégier le rôle de la variable Y, notamment dans les études médicales, lorsqu'il s'agit de la variable *présence/absence* d'une maladie (cf VI-4). Aussi, lorsqu'une des deux variables est de type *oui/non*, on l'appelle variable « Réponse » (à la maladie dans le cas médical) et on la place en variable colonne Y. Quand les deux sont du type *oui/non*, on place en général la modalité *oui* en premier, c'est-à-dire que la case (1,1) correspond à (X=oui et Y=oui).

VI - 1 Odds-ratio

Odds se traduit par «chance» ; odds-ratio (le rapport de chances) peut lui se traduire par «cote» comme dans les paris.
<u>Lois conditionnelles sachant les lignes</u> $(p_{j/i} = p_{ij} / p_{i.})$

- Sachant la ligne 1

la probabilité d'être en colonne 1 = $p_{1/1} = p_{11} / p_{1.}$

la probabilité d'être en colonne 2 = $p_{2/1} = p_{12} / p_{1.}$

➔ rapport = odds $\Omega 1 = \dfrac{p_{1/1}}{p_{2/1}} = \dfrac{p_{11}}{p_{12}}$

Pour les individus de la ligne 1, Ω1 est le rapport de «chances» entre les 2 réponses en colonne.

- idem sachant ligne 2 $\quad \Omega 2 = \dfrac{p_{1/2}}{p_{2/2}} = \dfrac{p_{21}}{p_{22}}$

ODDS-RATIO $\theta = \Omega 1 / \Omega 2 = \dfrac{p_{1/2}\, p_{2/2}}{p_{2/1}\, p_{1/2}} = \dfrac{p_{11}\, p_{22}}{p_{12}\, p_{21}}$

Remarques :

- La table est entièrement déterminée par :
  - les deux lois de probabilité marginales en ligne et en colonne,
  - l'odds-ratio.
- θ ne change pas si on inverse le rôle des lignes et des colonnes.

S.A.S. indique «case control» pour l'odds-ratio (X aléatoire, Y fixé).
Le logarithme de θ s'appelle logit (cf. le lien avec les modèles logit en VI-4).

Interprétation de l'odds-ratio :

Indépendance $\Leftrightarrow \theta = 1 \Leftrightarrow \text{Log}(\theta) = 0$ (si $p_{ij} \neq 0$ pour tout i et j)

$\theta > 1 \Rightarrow \Omega 1 > \Omega 2$: les individus ayant la modalité 1 en ligne ont alors plus de «chance» d'avoir la réponse 1 en colonne que ceux ayant la modalité 2 en ligne ; θ est donc la «cote» de la modalité 1 en ligne.

Intervalle de confiance : on peut calculer un intervalle de confiance (à 95% dans FREQ) qui permettra de conclure si l'odds-ratio diffère de 1.

VI - 2 Risque relatif

La variable Y est ici privilégiée : on va calculer la probabilité d'avoir une modalité de Y, selon la modalité de la variable X. C'est ce que S.A.S. appelle « Relative Risk » (Row1/Row2).

Risque relatif :

$$\text{col1 - risk} = \frac{p_{1/1}}{p_{1/2}} = \frac{p_{11}/p_{1.}}{p_{21}/p_{2}} = \text{rapport du 1er élément des deux profils-lignes}$$

Si col1-risk = 1, les individus ont autant de risque d'avoir la réponse 1 en colonne, quelle que soit leur caractéristique en ligne : ceci est équivalent à l'indépendance.

$$\text{col2-risk} = \frac{p_{2/1}}{p_{2/2}}$$

Remarque : S.A.S. indique **cohort (col1 risk ou col2 risk)** pour préciser qu'on est dans le cadre «X fixé et Y aléatoire».

On retrouve la relation évidente : $\dfrac{\text{col1 risk}}{\text{col2 risk}} = \text{odds-ratio}$.

Par définition, si la variable Y est du type réponse et si la modalité 1 en colonne est (Y=oui), col1-risk est appelé **Risque Relatif**. Si elle est du type (Y=non), le **Risque Relatif** est col2-risk.

Dans le cas d'un échantillonnage «case control» (X aléatoire, Y fixé), c'est l'odds-ratio qui estime le risque relatif. Dans le cas «cohort» (X fixé, Y aléatoire), c'est col1-risk (ou col2-risk).

Intervalle de confiance : on peut calculer des intervalles de confiance (à 95% dans FREQ) qui permettront de conclure si les risques diffèrent de 1.

VI - 3 Analyse stratifiée

S'il y a trois variables Z X Y , on est dans le cadre d'une analyse dite stratifiée (il y a autant de strates, et donc de tables, que de modalités de la 3ème variable Z). On peut alors estimer un risque relatif commun aux différentes tables.
Cet estimateur diffère selon le modèle : dans le cas «case control» (X aléatoire, Y fixé), c'est l'odds-ratio qui est un estimateur du risque relatif commun. Dans le cas «cohort» (X fixé, Y aléatoire) ou dans le cas où X et Y sont aléatoires, il y a un estimateur direct du risque relatif commun.

S.A.S. donne donc deux estimateurs qu'il nomme :
«**case control**» (Mantel-Haenszel et logit) pour l'odds-ratio,
«**cohort**» (Mantel-Haenszel et logit) pour les risques relatifs.

Exemple : formule pour le modèle «Case control» (odds-ratio)
Si la variable Z a k modalités il y a donc k tables 2 x 2 :
La table h est (n_{hij}) où h varie de 1 à k ; i vaut 1 ou 2 ; j vaut 1 ou 2 (l'effectif total est N_h)

L'odds-ratio de la table h est $OR_h = \dfrac{n_{h11}\, n_{h22}}{n_{h12}\, n_{h21}}$

On peut estimer l' odds-ratio «global» par 2 estimateurs :

Mantel-Haenszel : $\dfrac{\left(\sum_h n_{h11}\, n_{h22} \big/ N_h\right)}{\left(\sum_h n_{h12}\, n_{h21} \big/ N_h\right)}$

Logit : $\exp\left[\left(\sum_h w_h \log(OR_h)\right) \Big/ \sum_h w_h\right]$ où $w_h = 1/\mathrm{var}(\log(OR_h))$

S.A.S. calcule des intervalles de confiance à 95% autour de ces deux estimateurs.

On peut aussi tester l'égalité des odds-ratios dans les k tables par un **test de Breslow-Day,** basé sur une statistique suivant une loi du CHI-2 à (k-1) degrés de liberté. Ce test n'est applicable que si N_h est grand pour tout h.

Utilisation : dans l'instruction TABLES de la procédure FREQ, pour avoir risques et odds-ratios, il faut ajouter :
- l'option MEASURES (ou CMH) dans le cas d'une seule table 2x2
- l'option CMH dans le cas de plusieurs tables 2x2 à comparer (avec l'option MEASURES si on veut l'odds-ratio de chaque table)

<u>Exemple</u> : Identique au § III - 2 . 2 avec option MEASURES
On est alors dans un cas X fixé (RACE) Y aléatoire(VERDICT), c'est-à-dire « cohort » :

- θ est plus grand que 1, donc les Blancs ont plus de « chance » d'encourir la peine de mort que les Noirs, mais cette différence est non significative d'après l'intervalle de confiance.
- Col1 Risk = risque de (Y=oui) = risque d'encourir la peine de mort : il est plus fréquent pour les Blancs, mais non significatif.

```
etude d'une table 2x2 : RACE/VERDICT , option MEASURES

          STATISTICS FOR TABLE OF RACE BY MORT

Statistic                                   Value        ASE
------------------------------------------------------------
Gamma                                       0.083       0.176
Kendall's Tau-b                             0.026       0.055
Stuart's Tau-c                              0.016       0.035

Somers' D C|R                               0.016       0.035
Somers' D R|C                               0.042       0.088

Pearson Correlation                         0.026       0.055
Spearman Correlation                        0.026       0.055

Lambda Asymmetric C|R                       0.000       0.000
Lambda Asymmetric R|C                       0.013       0.037
Lambda Symmetric                            0.010       0.030

Uncertainty Coefficient C|R                 0.001       0.004
Uncertainty Coefficient R|C                 0.000       0.002
Uncertainty Coefficient Symmetric           0.001       0.003

        Estimates of the Relative Risk (Row1/Row2)

                                                95%
Type of Study               Value      Confidence Bounds
------------------------------------------------------------
Case-Control                1.181       0.590       2.363
Cohort (Col1 Risk)          1.160       0.625       2.150
Cohort (Col2 Risk)          0.982       0.909       1.060

Sample Size = 326
```

VI - 4 Lien avec les modèles LOGIT

Dans un exemple médical (cf. Jean Bouyer) où Y est la variable présence ou absence d'une maladie (M+ / M-) et X est la variable dichotomique exposition ou non exposition à un facteur déclenchant de la maladie (exposition X=1 , non exposition X=0), on peut définir la table des lois conditionnelles selon l'exposition :

	M+	M-
X = 1	p1	1-p1
X = 0	p0	1-p0

On étudie ici Y=*présence de la maladie* :

(M+) = (Y=oui) donc le **Risque relatif** est Col1 Risk.

Risque relatif : Prob (M+ | X=1)/Prob(M+ | X=0)=p1/p0

Odds-ratio = Prob (M+|X=1) Prob(M-|X=0) /Prob(M -|X=1) Prob(M+|X=0)
= p1(1-p0)/p0(1-p1)
= (p1/(1-p1))/(p0/(1-p0))

Par définition, on nomme logit : Log[p/(1-p)]

$\Rightarrow$ Log(θ) = logit(p1) - logit(p0)

Dans le MODELE LOGISTIQUE, on pose :

probabilité (M+| X) = f (X) = p
= 1/(1+ exp(a+bX))
c'est à dire : logit (p) = a+bX

Dans ce modèle, Log (θ) est un estimateur de b, car logit (p1)=a+b , logit (p0)=a.

VII. Curiosités

A titre de curiosité nous reprenons un exemple de tableaux et sous tableaux de Rouanet paru dans l'Echo des Messaches (Nov 78, n° 8) et repris dans le Bulletin de méthodologie sociologique (n°6, avril 1985, pages 3-27).

Barouf à Bombach

Dans la ville de Bombach existent deux lycées : (A)nastase et (B)énédicte. Les résultats au bac, succès et échecs selon le sexe, sont donnés dans les tableaux de la page suivante.
La lecture des pourcentages de réussite permet de conclure :
Les garçons réussissent mieux que les filles quel que soit le lycée.
Mais le tableau résumé A+B pour la ville de Bombach aboutit à la conclusion surprenante :
Les filles réussissent mieux que les garçons.

C'est un exemple de situation statistique conflictuelle.

Barouf a BOMBACH ...

ROUANET 1978

Lycée Anastase

	succès	échec	
G	15	35	50
F	1	9	10
	16	44	60

%

	succès	échec
G	$\boxed{30\%}$	70%
F	10%	90%

les **garçons** *réussissent mieux que les* **filles**

B - Lycée Bénédicte

	succès	échec	
G	9	1	10
F	35	15	50
	44	16	60

%

	succès	échec
G	$\boxed{90\%}$	10%
F	70%	30%

les **garçons** *réussissent mieux que les* **filles**

regroupement A+B

BOMBACH

	succès	échec	
G	24	36	60
F	36	24	60
	60	60	120

	succès	échec
G	40%	60%
F	$\boxed{60\%}$	40%

les **filles** *réussissent mieux que les* **garçons**

?

ANNEXES

Annexe 1 : Exemple d'indépendance

EXEMPLE 1: PCS PERE * NIVEAU DES ELEVES

EXEMPLE DE STRUCTURE DANS UN TABLEAU DE CONTINGENCE

I N D E P E N D A N C E

TABLE OF PCS BY NIVEAU

PCS / NIVEAU (Frequency, Percent, Row Pct, Col Pct)	- -	-	+	+ +	Total
CADRE	2 2.50 5.00 50.00	2 2.50 5.00 50.00	12 15.00 30.00 50.00	24 30.00 60.00 50.00	40 50.00
EMPLO	2 2.50 5.00 50.00	2 2.50 5.00 50.00	12 15.00 30.00 50.00	24 30.00 60.00 50.00	40 50.00
Total	4 5.00	4 5.00	24 30.00	48 60.00	80 100.00

STATISTICS FOR TABLE OF PCS BY NIVEAU

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	3	0.000	1.000
Likelihood Ratio Chi-Square	3	0.000	1.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.000	1.000
Phi Coefficient		0.000	
Contingency Coefficient		0.000	
Cramer's V		0.000	

Statistic	Value	ASE
Gamma	0.000	0.206
Kendall's Tau-b	0.000	0.108
Stuart's Tau-c	0.000	0.112
Somers' D C|R	0.000	0.112
Somers' D R|C	0.000	0.103
Pearson Correlation	0.000	0.112
Spearman Correlation	0.000	0.112
Lambda Asymmetric C|R	0.000	0.000
Lambda Asymmetric R|C	0.000	0.000
Lambda Symmetric	0.000	0.000
Uncertainty Coefficient C|R	0.000	0.000
Uncertainty Coefficient R|C	0.000	0.000
Uncertainty Coefficient Symmetric	0.000	0.000

Sample Size = 80
WARNING: 50% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

Annexe 2 : Exemple de dépendance

EXEMPLE 2: COULEURS YEUX * COULEURS DES CHEVEUX

EXEMPLE DE STRUCTURE DANS UN TABLEAU DE CONTINGENCE

D E P E N D A N C E

TABLE OF YEUX BY CHEVEUX

YEUX / CHEVEUX Frequency Percent Row Pct Col Pct	BLONDS	BRUNS	NOIRS	ROUX	Total
BLEUS	25 20.16 56.82 55.56	9 7.26 20.45 23.08	3 2.42 6.82 14.29	7 5.65 15.91 36.84	44 35.48
VERTS	13 10.48 27.66 28.89	17 13.71 36.17 43.59	10 8.06 21.28 47.62	7 5.65 14.89 36.84	47 37.90
MARRONS	7 5.65 21.21 15.56	13 10.48 39.39 33.33	8 6.45 24.24 38.10	5 4.03 15.15 26.32	33 26.61
Total	45 36.29	39 31.45	21 16.94	19 15.32	124 100.00

STATISTICS FOR TABLE OF YEUX BY CHEVEUX

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	6	15.067	0.020
Likelihood Ratio Chi-Square	6	15.559	0.016
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	4.721	0.030
Phi Coefficient		0.349	
Contingency Coefficient		0.329	
Cramer's V		0.246	

Statistic	Value	ASE
Gamma	0.293	0.109
Kendall's Tau-b	0.207	0.078
Stuart's Tau-c	0.213	0.080
Somers' D C|R	0.216	0.081
Somers' D R|C	0.198	0.076
Pearson Correlation	0.196	0.089
Spearman Correlation	0.238	0.089
Lambda Asymmetric C|R	0.127	0.084
Lambda Asymmetric R|C	0.156	0.074
Lambda Symmetric	0.141	0.065
Uncertainty Coefficient C|R	0.048	0.023
Uncertainty Coefficient R|C	0.058	0.028
Uncertainty Coefficient Symmetric	0.052	0.025

Sample Size = 124

Annexe 3 : Exemple d'association parfaite

EXEMPLE 3: ENTRAINEMENT * PERFORMANCE

EXEMPLE DE STRUCTURE DANS UN TABLEAU DE CONTINGENCE

ASSOCIATION PARFAITE ====> LINEARITE

TABLE OF ENTR BY PERFO

ENTR / PERFO — Frequency, Percent, Row Pct, Col Pct	> 5	4-5	< 4	Total
2FOIS	10 27.03 100.00 100.00	0 0.00 0.00 0.00	0 0.00 0.00 0.00	10 27.03
4FOIS	0 0.00 0.00 0.00	12 32.43 100.00 100.00	0 0.00 0.00 0.00	12 32.43
8FOIS	0 0.00 0.00 0.00	0 0.00 0.00 0.00	15 40.54 100.00 100.00	15 40.54
Total	10 27.03	12 32.43	15 40.54	37 100.00

STATISTICS FOR TABLE OF ENTR BY PERFO

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	74.000	0.000
Likelihood Ratio Chi-Square	4	80.277	0.000
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	36.000	0.000
Phi Coefficient		1.414	
Contingency Coefficient		0.816	
Cramer's V		1.000	

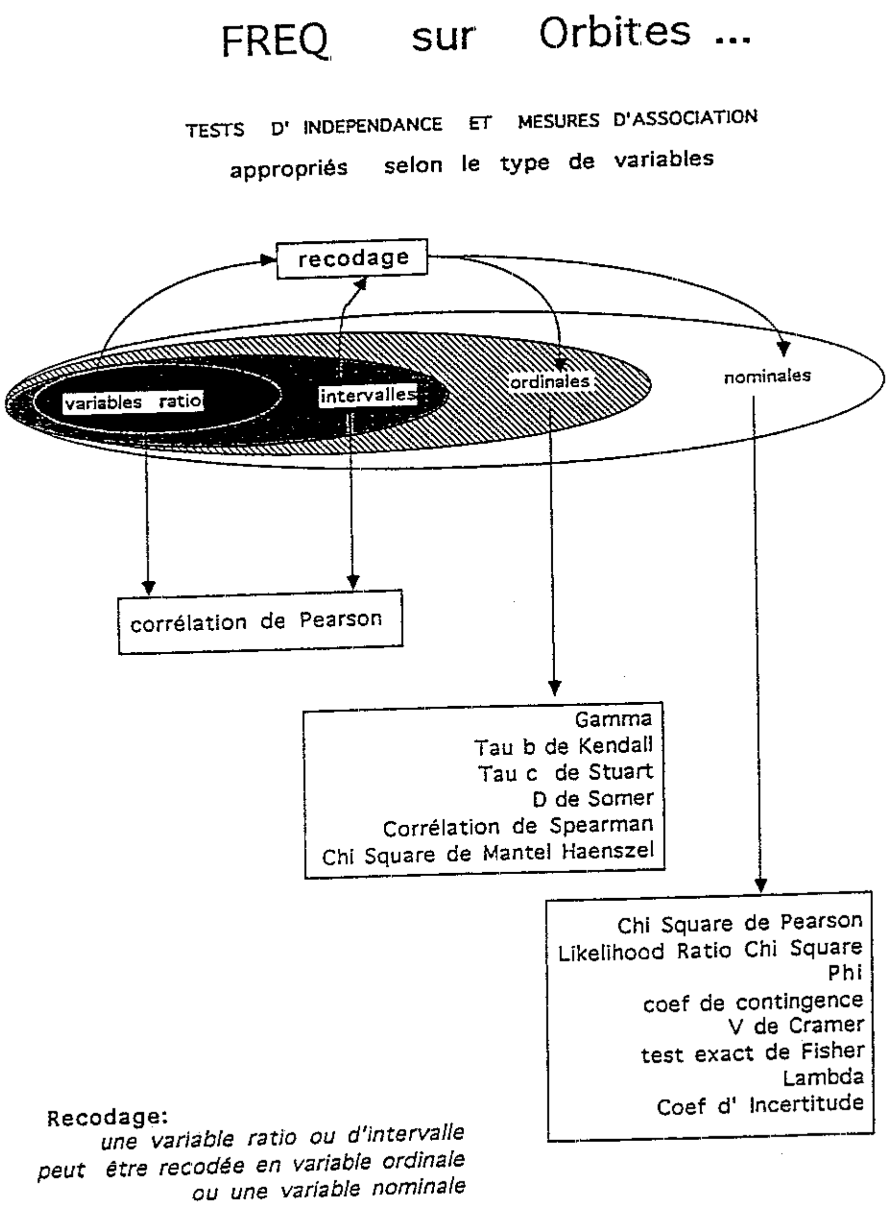
Statistic	Value	ASE
Gamma	1.000	0.000
Kendall's Tau-b	1.000	0.000
Stuart's Tau-c	0.986	0.028
Somers' D C|R	1.000	0.000
Somers' D R|C	1.000	0.000
Pearson Correlation	1.000	0.000
Spearman Correlation	1.000	0.000
Lambda Asymmetric C|R	1.000	0.000
Lambda Asymmetric R|C	1.000	0.000
Lambda Symmetric	1.000	0.000
Uncertainty Coefficient C|R	1.000	0.000
Uncertainty Coefficient R|C	1.000	0.000
Uncertainty Coefficient Symmetric	1.000	0.000

Sample Size = 37
WARNING: 89% of the cells have expected counts less than 5. Chi-Square may not be a valid test.

Annexe 4 : Tests et mesures appropriés selon les types de variables

Le schéma de la page suivante synthétise l'ensemble des tests et mesures disponibles dans Proc FREQ selon le type de variables :

- variables nominales
- variables ordinales
- variables intervalles
- variables ratio



Annexe 5 : Historique de la polémique autour du test exact de FISHER

1890 Naissance de R. Fisher
1900 K. Pearson publie le test du χ^2 pour une table r*c. Mais il propose pour son test un nombre incorrect de degrés de liberté : r*c -1. En particulier, le test du χ^2 appliqué à la table 2*2 possède 3 degrés de liberté.
1922 Fisher, une vingtaine d'années plus tard, propose le nombre correct de degrés de liberté : (r-1)*(c-1) pour une table r*c et donc seulement un degré de liberté pour la table 2*2.
Pearson n'avouera jamais son erreur.
1925 Fisher propose une règle pratique pour l'application valide du test du χ^2 : tous les effectifs théoriques doivent être supérieurs à 5.
1934-1938 Fisher publie son test pour une table 2*2. Fisher précise les raisons pour lesquelles les marges d'une table 2*2 sont des statistiques ancillaires et doivent être donc considérées comme fixées. Yates propose une correction du test du χ^2.
1945-1947 Barnard propose, à la sortie de la guerre, un test fondé sur la distribution binomiale et plus puissant que le test de Fisher.
1949 Convaincu par les arguments que Fisher lui propose, Barnard se retracte et reconnaît publiquement que son test n'est pas adéquat.
1962 Mort de Fisher. Celui-ci est considéré comme le plus grand statisticien depuis le début du siècle ; il est en effet le père incontesté de l'analyse inductive des données.
1978 Près d'un demi-siècle après la parution du test exact de Fisher, Berkson publie un article dans lequel il expose les raisons pour lesquelles le χ^2 de Pearson a de meilleures propriétés que le test exact de Fisher et le χ^2 corrigé de Yates.
1979 Kempthorne précise que l'emploi systématique du test de Fisher n'est pas toujours adéquat selon la situation expérimentale.
1982 Upton fait une revue exhaustive de l'ensemble des tests usuels appliqués à une table 2*2 et aboutit aux mêmes conclusions que celles de Berkson et Kempthorne.
1984 Yates publie un article pour faire une mise au point sur le débat.

Actuellement, d'autres articles sur le sujet continuent d'être publiés dans les revue de statistiques : la polémique se poursuit.

Source : GROUIN J.M.,Test Usuels de Signification dans une table de contingence 2*2 à l'aide de la procédure FREQ, S.A.S. CLUB 1990

Annexe 6 : Vocabulaire de la Proc FREQ

attendu (espéré)	expected
degré de liberté (ddl)	degree of freedom (DF)
effectif=fréquence absolue[6]	frequency
effectif théorique (fréquence absolue attendue)	expected frequency
erreur-type asymptotique	asymptotic Standard error
fréquence (relative)	percent - proportion
fréquence absolue = effectif	frequency
rapport des chances (cote)	odds ratio
tableau de contingence	contingency table
tableau croisé	cross tabulation
tableau de fréquences à <u>une</u> dimension	one-way frequency
tableau de fréquences à <u>deux</u> dimensions	two-way frequency
tableau de fréquences à <u>n</u> dimensions	n-way frequency

[6] la littérature anglo-saxonne dénomme les effectifs : FREQUENCY, alors que le mot fréquence en français correspond aux fréquences relatives.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

- AGRESTI A. (1984), Analysis of Ordinal Categorical Data , WILEY

- AGRESTI A. (1990), Categorical Data Analysis, WILEY

- CONFAIS J., GRELET Y., LE GUEN M. (1996), La procédure FREQ de S.A.S., document de travail « Méthodologie statistique » de l'INSEE n° F9610

- GROSBRAS J.M. (1990), Notes de cours ENSAE

- LANCRY P.J. (1982), Théorie de l'Information et Economie, ECONOMICA

- MORICE et CHARTIER (1954), Méthodes statistiques, INSEE

- PARTRAT C. (1991), support de cours 2ème année, ISUP

- ROUANET H. et alii, (1990), Statistique en sciences humaines : Analyse Inductive des Données, DUNOD

- SAPORTA G. (1990), Probabilités Analyse de Données Statistique, TECHNIP

- S.A.S. ® - STAT User's Guide -The FREQ Procedure - version 6, S.A.S. Institute

- SAUTORY O. (1995), La Statistique Descriptive avec le système S.A.S®, INSEE-GUIDE n° 1-2

- SCHLOTZHAUER S.D. et LITTELL R.C. (1987), S.A.S. ® System for Elementary Statistical Analysis, S.A.S. Institute

- SCHWARTZ D. (1963), Méthodes statistiques à l'usage des médecins et des biologistes, FLAMMARION

- SIEGEL S. (1956), Non parametric Statistics for the Behavioral Sciences, WILEY.

Articles

- BOUYER J. (1991), La régression logistique en épidémiologie,
  Revue Epidémiologie et Santé Publique, MASSON
  Partie I, 1991,39,79-87
  Partie II,1991,39,183-196

- GROUIN J.M. (1990), Tests usuels de signification dans une table de contingence 2*2 à l'aide de la procédure FREQ, S.A.S.-Club 1990

- ROUX M. (1988), Pondération des contributions en analyse des correspondances quand les nombres de modalités diffèrent : Application en écologie, Les cahiers de l'Analyse de Données Vol XIII 1988 n°4 pp. 459-468.