ÉTUDE DE LA PUISSANCE DES TESTS

UTILISATION DU LOGICIEL PASS 6.0

Michel Tenenhaus

Groupe HEC (78351 Jouy-en-Josas)

Introduction

L'étude de la puissance des tests statistiques usuels et la détermination d'un nombre de sujets permettant d'atteindre une puissance fixée a priori sont des problèmes numériquement complexes. L'arrivée sur le marché de logiciels complets et performants simplifie considérablement la situation. Nous avons sélectionné le logiciel PASS 6.0 (Référence : PASS 6.0, Power Analysis and Sample Size for Windows, published by NCSS Statistical Sofware. Dr. Jerry L. Hintze, 329 North 1000 East, Kaysville, Utah 84037, USA, 1996. Internet: http://www.ncss.com Email: Sales@ncss.com. Fax: (801) 546-3907).

Nous allons présenter dans cet article les thèmes suivants:

1. Les lois de probabilité usuelles non centrées.
2. Test t sur une moyenne
3. Test t de comparaison de deux moyennes
4. Analyse de la variance à un facteur
5. Analyse de la variance à effets fixes
6. Analyse de la variance à effets mixtes.
7. Analyse de la variance de mesures répétées
8. Test sur une proportion
9. Test de comparaison de deux proportions.
10. Tests de Fisher exact et du Khi-deux.

Il y a d'autres thèmes disponibles dans le logiciel PASS 6.0: test sur une corrélation, comparaison de deux corrélations, régression multiple, régression logistique, bioéquivalence entre deux moyennes et deux proportions, test du Log Rank en données de survie, étude cas-témoins

1. Les lois de probabilité usuelles non centrées

Loi de Student non centrée

Soient Z et Y deux variables aléatoires indépendantes. Z suit une loi normale centrée-réduite et Y une loi du khi-deux à f degrés de liberté. Soit λ une constante.
La variable

$$T_f(\lambda) = \frac{Z+\lambda}{\sqrt{Y/f}}$$

suit une loi de Student non centrée à f degrés de liberté et de paramètre de non centralité λ.

Loi du khi-deux non centrée

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ p variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée-réduite

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ p constantes et $\lambda = \sum_{i=1}^{p} a_i^2$.
La variable

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{p} (Z_i + a_i)^2$$

suit une loi du khi-deux non centrée à p degrés de liberté et de paramètre de non centralité λ

Loi F non centrée

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p1+p2}$ p1+p2 variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée-réduite

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{p1}$ p1 constantes et $\lambda = \sum_{i=1}^{p1} a_i^2$
La variable

$$F' = \frac{\sum_{i=1}^{p1} (Z_i + a_i)^2 / p1}{\sum_{i=p1+1}^{p1+p2} Z_i^2 / p2}$$

suit une loi F non centrée à p1 et p2 degrés de liberté et de paramètre de non centralité λ.

Les fractiles de ces différentes lois sont disponibles dans le *Probability Calculator* de PASS 6.0.

2. Puissance du test t de comparaison d'une moyenne à un standard

Nous allons étudier la puissance du test t de comparaison d'une moyenne à un standard dans la situation suivante :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$$

On se place dans la situation la plus courante : l'écart-type σ est inconnu.
On rejette l'hypothèse H_0 au risque de première espèce α si

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$$

Le risque de deuxième espèce β est défini par :

$$\beta = \text{Prob}\,(t < t_{1-\alpha}(n-1) \mid \mu = \mu_1)$$

$$= \text{Prob}\,(\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1) \mid \mu = \mu_1)$$

$$= \text{Prob}\,(\frac{\bar{x} - \mu_1 + \mu_1 - \mu_0}{s / \sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1) \mid \mu = \mu_1)$$

$$= \text{Prob}\,(\frac{\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}{s / \sigma} < t_{1-\alpha}(n-1) \mid \mu = \mu_1)$$

$$= \text{Prob}\,(\frac{Z + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{Y / n - 1}} < t_{1-\alpha}(n-1) \mid \mu = \mu_1)$$

$$= \text{Prob}\,(\ T_{n-1}(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}) < t_{1-\alpha}(n-1))$$

Et la puissance du test t est définie par $\eta = 1 - \beta$.

D'où

$$\eta = 1 - \beta = \text{Prob}\,(\ T_{n-1}(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}) \geq t_{1-\alpha}(n-1))$$

Le logiciel PASS 6.0 permet de calculer chacun des paramètres α, β, η, n, μ_0, μ_1 et σ en fixant les autres.

Exemple

Les résultats de l'enquête Rola-Cola portant sur quarante personnes ont donné pour la variable consommation une moyenne $\overline{x} = 5.875$ et un écart-type $s = 2.97$

On étudie le test

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 5$$
$$H_1 : \mu = \mu_1 > 5$$

On rejette H_0 au risque α si $t \geq t_{1-\alpha}(n-1)$.
Pour $\alpha = 0.05$ le seuil vaut $t_{0.95}(39) = 1.68$. Ici $t = 1.86$ et on rejette donc H_0 au profit de H_1 au risque $\alpha = 0.05$.

Nous allons étudier sur cet exemple l'équation

$$\eta = 1 - \beta = \text{Prob}\ (\ T_{n-1}(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}) \geq t_{1-\alpha}(n-1))$$

Question 1

Quel est la puissance η de ce test lorsqu'on fixe $\alpha = 0.05$, $\mu_0 = 5$, $\mu_1 = 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8$, $n = 40$, $\sigma=2.97$?

Réponse

Il faut calculer

$$\eta = \text{Prob}\ (\ T_{39}(\frac{\mu_1 - 5}{2.97 / \sqrt{40}}) \geq t_{0.95}(39))$$

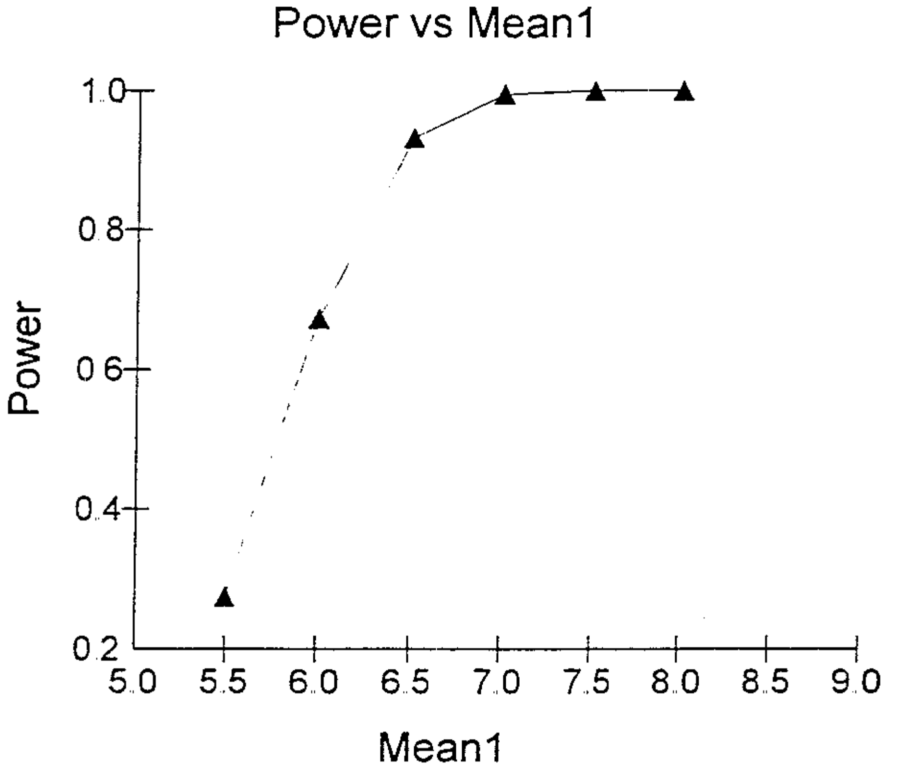
pour $\mu_1 = 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8$.

Résultats de PASS :

```
One-Sample T-Test Power Analysis

Numeric Results for One-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean0=Mean1     Alternative Hypothesis: Mean0<Mean1
The standard deviation was assumed to be unknown.
```

Power	N	Alpha	Beta	Mean0	Mean1	Sigma
0.27473	40	0.05000	0.72527	5.00	5.50	2.97
0.67273	40	0.05000	0.32727	5.00	6.00	2.97
0.93231	40	0.05000	0.06769	5.00	6.50	2.97
0.99444	40	0.05000	0.00556	5.00	7.00	2.97
0.99983	40	0.05000	0.00017	5.00	7.50	2.97
1.00000	40	0.05000	0.00000	5.00	8.00	2.97



Question 2

Construire le graphique reliant la puissance du test η au risque α pour $\mu_1 = 6$.

Réponse

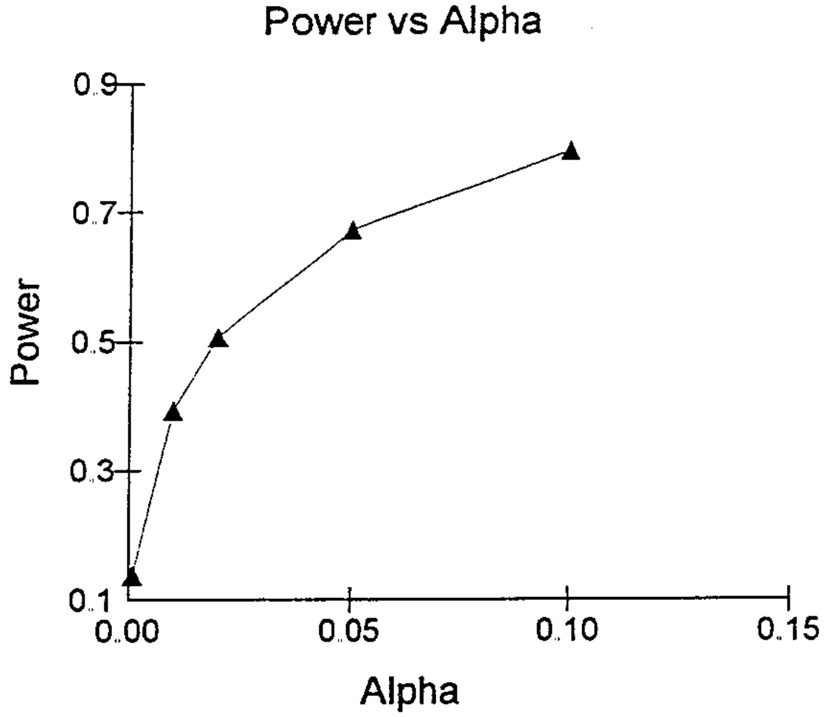
On doit calculer pour différentes valeurs de α

$$\eta = \text{Prob}\left(T_{39}\left(\frac{6-5}{2.97/\sqrt{40}}\right) \geq t_{1-\alpha}(39)\right)$$

PASS 6.0 fournit les résultats suivants :

```
Numeric Results for One-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean0=Mean1     Alternative Hypothesis: Mean0<Mean1
The standard deviation was assumed to be unknown.
```

Power	N	Alpha	Beta	Mean0	Mean1	Sigma
0.13814	40	0.00100	0.86186	5.00	6.00	2.97
0.39336	40	0.01000	0.60664	5.00	6.00	2.97
0.50720	40	0.02000	0.49280	5.00	6.00	2.97
0.67273	40	0.05000	0.32727	5.00	6.00	2.97
0.79540	40	0.10000	0.20460	5.00	6.00	2.97



Question 3

Calculer la taille d'échantillon n permettant d'obtenir une puissance du test $\eta = 0.90$ au risque $\alpha = 0.05$ pour $\mu_1 = 6$.

Réponse

On doit résoudre l'équation

$$0.90 = \text{Prob}\left(T_{n-1}\left(\frac{6-5}{2.97/\sqrt{n}}\right) \geq t_{0.95}(n-1)\right)$$

PASS 6.0 fournit le résultat suivant :

```
Numeric Results for One-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean0=Mean1     Alternative Hypothesis: Mean0<Mean1
The standard deviation was assumed to be unknown.

Power       N     Alpha       Beta        Mean0 Mean1 Sigma
0.90029     77    0.05000     0.09971     5.00  6.00  2.97
```

Question 4

Quelle moyenne μ_1 la procédure de test utilisé sur l'échantillon disponible permet-elle de détecter avec une puissance $\eta = 0.90$ et un risque $\alpha = 0.05$? Construire la courbe reliant les moyennes μ_1 détectées avec les puissances $\eta = 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$ et un risque $\alpha = 0.05$.

Réponse

On doit résoudre l'équation

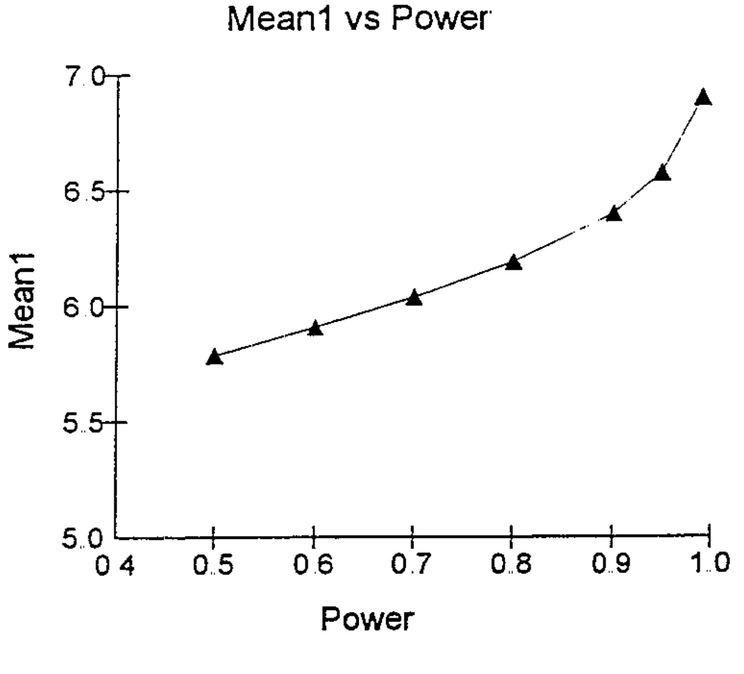
$$\eta = \text{Prob}\ (T_{39}(\frac{\mu_1 - 5}{2.97/\sqrt{40}}) \geq t_{0.95}(39))$$

pour $\eta = 0.90$, puis pour $\eta = 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$.

PASS 6.0 fournit les résultats suivants :

```
Numeric Results for One-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean0=Mean1     Alternative Hypothesis: Mean0<Mean1
The standard deviation was assumed to be unknown.

Power        N      Alpha        Beta         Mean0 Mean1 Sigma
0.99000      40     0.05000      0.01000      5.00  6.90  2.97
0.95000      40     0.05000      0.05000      5.00  6.57  2.97
0.90000      40     0.05000      0.10000      5.00  6.40  2.97
0.80000      40     0.05000      0.20000      5.00  6.19  2.97
0.70000      40     0.05000      0.30000      5.00  6.04  2.97
0.60000      40     0.05000      0.40000      5.00  5.91  2.97
0.50000      40     0.05000      0.50000      5.00  5.79  2.97
```



Question 5

Construire la courbe reliant les tailles d'échantillon n permettant de détecter une moyenne $\mu_1 = 6$ aux puissances $\eta = 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$ avec le risque $\alpha = 0.05$? Construire la courbe reliant les moyennes μ_1 détectées avec les puissances η et un risque $\alpha = 0.05$.

Réponse

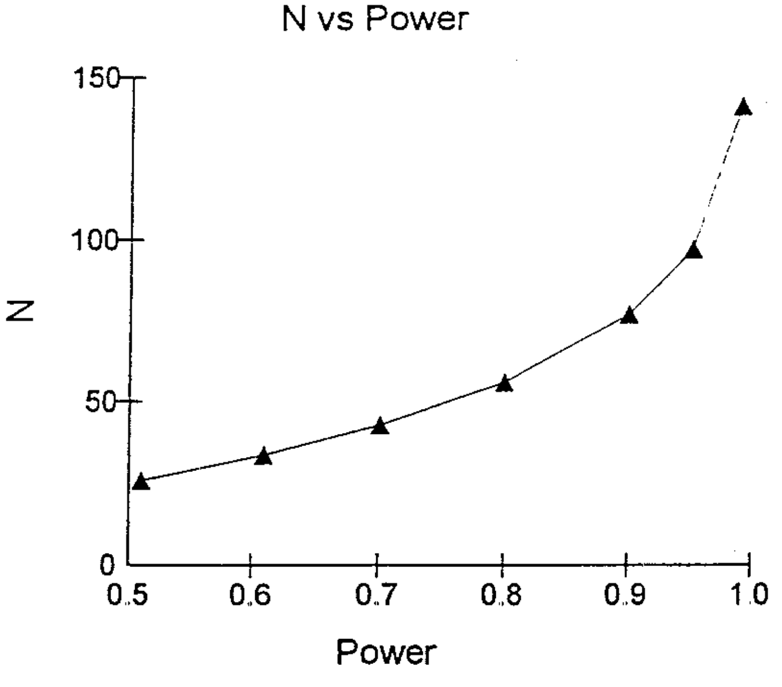
On doit résoudre l'équation

$$\eta = \text{Prob}\left(T_{n-1}\left(\frac{6-5}{2.97/\sqrt{n}}\right) \geq t_{0.95}(n-1)\right)$$

pour $\eta = 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99$.

Résultats PASS

Power	N	Alpha	Beta	Mean0	Mean1	Sigma
0.99020	141	0.05000	0.00980	5.00	6.00	2.97
0.95030	97	0.05000	0.04970	5.00	6.00	2.97
0.90029	77	0.05000	0.09971	5.00	6.00	2.97
0.80055	56	0.05000	0.19945	5.00	6.00	2.97
0.70099	43	0.05000	0.29901	5.00	6.00	2.97
0.60947	34	0.05000	0.39053	5.00	6.00	2.97
0.51009	26	0.05000	0.48991	5.00	6.00	2.97



3. Test t de comparaison de deux moyennes

Nous allons étudier la puissance du test t de comparaison de deux moyennes :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 = d > 0$$

On se place dans la situation la plus courante : l'écart-type σ est commun aux deux populations et inconnu.
On rejette l'hypothèse H_0 au risque de première espèce α si

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$$

où

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Le risque de deuxième espèce β est défini par :

$$\beta = \text{Prob}\ (t < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \mid d)$$

$$= \text{Prob}\ (\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - d + d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \mid d)$$

$$= \text{Prob}\ (T_{n_1+n_2-2}(\frac{d}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}) < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2))$$

D'où l'équation :

$$\eta = 1 - \beta = \text{Prob}\ (T_{n_1+n_2-2}(\frac{d}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}) \geq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2))$$

Exemple

On étudie la consommation de boisson au cola en fonction de la boisson préférée.

Voici les données disponibles :

	Rola-Cola	Koka-Cola
Effectif	24	16
Moyenne	6.83	4.44
Variance	7.01	8.53
Écart-type	2.65	2.92

1. Calculer la puissance du test t au risque $\alpha = 0.05$, en supposant la différence d égale à la différence des moyennes observée 2.39 et l'écart-type commun estimé par $s = 2.759$.

Réponse PASS

```
Numeric Results for Two-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean1=Mean2      Alternative Hypothesis: Mean1>Mean2
The sigmas were assumed to be unknown and equal. The N's were allowed to be unequal.

Power        N1     N2     Alpha        Beta          Mean1  Mean2  Sigma1 Sigma2
0.83912      24     16     0.05000      0.16088       6.83   4.44   2.76   2.76
```

2. Vérifier que les mêmes données aux niveaux des moyennes et des écarts-types, mais avec des effectifs égaux ($n_1 = 20$ et $n_2 = 20$) conduisent à une puissance supérieure.

Réponse PASS

```
Numeric Results for Two-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean1=Mean2      Alternative Hypothesis: Mean1>Mean2
The sigmas were assumed to be unknown and equal. The N's were forced to be equal.

Power        N1     N2     Alpha        Beta          Mean1  Mean2  Sigma1 Sigma2
0.85203      20     20     0.05000      0.14797       6.83   4.44   2.76   2.76
```

3. Déterminer les effectifs égaux n des échantillons conduisant à une puissance de 0.90 pour un risque α de 0.05, en identifiant moyennes observées et théoriques et en remplaçant l'écart-type commun par son estimation.

Réponse PASS

Il faut résoudre l'équation

$$0.90 = \text{Prob}\ (\ T_{2n-2}(\frac{2.39}{2.759\sqrt{\frac{2}{n}}}) \geq t_{1-\alpha}(2n\ -2))$$

Résultat

```
      Two-Sample T-Tests Power Analysis

Numeric Results for Two-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean1=Mean2      Alternative Hypothesis: Mean1>Mean2
The sigmas were assumed to be unknown and equal. The N's were forced to be equal.

Power  N1    N2    Alpha  Beta    Mean1  Mean2  Sigma1 Sigma2
0.90513      24    24     0.05000        0.09487       6.83   4.44   2.76   2.76
```

4. Déterminer les effectifs égaux n des échantillons conduisant à une puissance de 0.90 pour un risque α de 0.05, en identifiant moyennes observées et théoriques, mais en supposant maintenant les écarts-types différents et en utilisant les estimations fournies par les échantillons.

Réponse

On rejette l'hypothèse H_0 au risque de première espèce α si

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha}(f)$$

où

$$f = \frac{s^4}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1+1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2+1)}} - 2$$

et

$$s = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

La puissance du test s'écrit maintenant

$$\eta = \text{Prob}\ (\ T_f(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma'}) \geq t_{1-\alpha}(f))$$

où

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Résultat

Il faut résoudre maintenant l'équation

$$0\ 90 = \text{Prob}\ (\ T_f(\frac{2.39}{\sigma'}) \geq t_{0.95}(f))$$

où

$$f = \frac{n^2(n+1)s^4}{s_1^4 + s_2^4} - 2$$

avec

$$s = \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)/n}$$

et σ' remplacé par s.

D'où les résultats PASS :

```
Numeric Results for Two-Sample T-Test
Null Hypothesis: Mean1=Mean2      Alternative Hypothesis: Mean1>Mean2
The sigmas were assumed to be unknown and unequal. The N's were forced to be equal.


Power        N1     N2     Alpha        Beta         Mean1  Mean2  Sigma1 Sigma2
0.90004      24     24     0.05000      0.09996      6.83   4.44   2.65   2.92
```

4. Analyse de la variance à un facteur

On considère le test F de comparaison de k moyennes :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$

H_1 : Au moins un μ_j diffférent des autres

On rejette H_0 au risque α si la statistique

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2 / (k-1)}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2 / (N-k)}$$

est supérieure au fractile $F_{1-\alpha}(k\text{-}1, N\text{-}k)$.

On suppose dans ce test que chaque observation y_{ji} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ji} suivant une loi normale $N(\mu_j, \sigma)$. Les variables aléatoires Y_{ji} sont supposées indépendantes entre elles.

On résume une hypothèse $H_1 : \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ en calculant la valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_j$$

et l'écart-type

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu)^2}$$

Sous cette hypothèse H_1, la statistique F suit une de Fisher-Snedecor non centrée à k-1 et N-k degrés de liberté et de paramètre de non-centralité λ défini par

$$\lambda = \bar{n}k\frac{\sigma_m^2}{\sigma^2}$$

où

$$\bar{n} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}n_j$$

Nous en déduisons le calcul de la puissance du test F en fonction de λ pour un risque α :

$$\eta(\lambda) = \text{Prob}(F(k\text{-}1, N\text{-}k, \lambda) \geq F_{1-\alpha}(k\text{-}1, N\text{-}k))$$

Exemple d'application

Considérons l'exemple des beignets de Snedecor et Cochran. Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	MG1	MG2	MG3	MG4
Effectif n_j	6	6	6	6
Moyenne $\bar{y}_j$	172	185	176	162
Variance s_j^2	178	60.4	97.6	67.6
Ecart-type s_j	13.34	7.77	9.88	8.22

1. Calculer la probabilité que l'expérience des beignets permette de détecter au risque $\alpha = 0.05$ une situation où $\sum_{j=1}^{4}(\mu_j - \mu)^2 = 96$. On suppose que $\sigma = 10$.

Réponse

PASS fournit la réponse en fonction de σ_m :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu)^2} = \sqrt{\frac{96}{4}} = 4.899$$

D'où :

```
Numeric Results for One-Way Analysis of Variance

                                                                      Effect
Power      n      k     Alpha       Beta        Sigma m      Sigma   Size
0.42057    6.00   4     0.05000     0.57943     4.90         10.00   0.48990
```

Le coefficient *Effect Size* correspond au rapport σ_m/σ.

2. La probabilité trouvée dans le paragraphe précédent étant trop faible, nous allons rechercher le nombre de répétitions n par type de matière grasse nécessaire pour détecter une configuration des μ_j correspondant à $\sigma_m = 4.899$ avec une puissance de 0.9 pour un risque α de 0.05.

Réponse

Il s'agit de résoudre l'équation

$$0.90 = \mathrm{Prob}(F(3, 4n\text{-}4, \lambda) \geq F_{0.95}(3, 4n\text{-}4))$$

où $\lambda = 4n(4.899/10)^2$.

Résultat PASS

Numeric Results for One-Way Analysis of Variance

Power	n	k	Alpha	Beta	Sigma m	Sigma	Effect Size
0.90467	16.00	4	0.05000	0.09533	4.90	10.00	0.48990

3. On veut détecter au risque $\alpha = 0.05$ une différence minimum de 2σ entre deux moyennes avec une probabilité $\eta \geq 0.9$ dans le problème des beignets. Quel est le nombre de répétitions nécessaires ?

Réponses

Le minimum de $\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu)^2$ sous la contrainte "Maximum $|\mu_i - \mu_j| \geq C\sigma$" est atteint pour une configuration de μ_j où deux μ_j sont éloignés de $C\sigma$ et où tous les autres μ_i sont égaux à la moyenne μ des deux μ_j : le minimum de $\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu)^2$ sous contrainte vaut donc $C^2\sigma^2/2$.

D'où nous déduisons :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\mu_j - \mu)^2} = \sqrt{\frac{C^2\sigma^2}{2k}} = \sqrt{\frac{4 \times 100}{8}} = 7.071$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$0.90 = \mathrm{Prob}(F(3, 4n\text{-}4, \lambda) \geq F_{0.95}(3, 4n\text{-}4))$$

où $\lambda = 4n(7.071/10)^2$.

Résultat PASS

Numeric Results for One-Way Analysis of Variance

Power	n	k	Alpha	Beta	Sigma m	Sigma	Effect Size
0.93257	9.00	4	0.05000	0.06743	7.07	10.00	0.70710
0.89359	8.00	4	0.05000	0.10641	7.07	10.00	0.70710

5. Analyse de la variance à plusieurs facteurs fixes

Le module PASS d'analyse de la variance à plusieurs facteurs fixes permet d'aller jusqu'à trois facteurs. On suppose un plan d'expériences factoriel complètement randomisé. Chaque sujet est tiré au hasard dans la population et affecté à un traitement défini par une combinaison de modalités des facteurs. On suppose que le plan d'expérience est équilibré : il y a le même nombre d'observations n dans chaque case.

Nous allons présenter les formules dans le cas d'un modèle à deux facteurs notés A et B avec une interaction A*B. Le facteur A prend p modalités et le facteur B q modalités.

Le modèle fixe avec interaction s'écrit

$$Y_{ijk} = \delta + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (1)$$

avec $\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma)$. On impose aux paramètres α_i, β_j, γ_{ij} de vérifier des contraintes :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j = 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij} = 0, j = 1, \ldots, q \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} = 0, i = 1, \ldots, p \qquad (5)$$

La moyenne μ_{ij} de Y_{ijk} s'écrit en utilisant (1) :

$$\mu_{ij} = \delta + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

Les contraintes (2) à (5) permettent une interprétation simple des paramètres du modèle (1).

Notons :

$$\mu_{..} = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\mu_{ij} \quad = \quad \text{moyenne générale de Y}$$

$$\mu_{i.} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\mu_{ij} \quad = \quad \text{moyenne marginale de Y sous la condition A = i}$$

$$\mu_{.j} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mu_{ij} \quad = \quad \text{moyenne marginale de Y sous la condition B = j}$$

Alors les contraintes (2) à (5) permettent d'obtenir :

$$\delta = \mu_{..}$$
$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$$
$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$$
$$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$$

Les tests F d'analyse de la variance permettent de tester la nullité des α_i ou des β_j ou encore des γ_{ij}. Ils sont réalisés en construisant le tableau d'analyse de la variance (Tableau 1).

Les puissances de ces tests sont calculées en fonction des écarts-types de ces coefficients :

$$\sigma_m^A = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2}$$

$$\sigma_m^B = \sqrt{\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\beta_j^2}$$

$$\sigma_m^{AB} = \sqrt{\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{ij}^2}$$

Pour chaque test F, on note respectivement u et v les nombres de degrés de liberté du numérateur et du dénominateur.
On pose aussi

$$k' = u + 1$$

$$n' = \frac{v}{u+1} + 1$$

Tableau 1 : Analyse de la variance à deux facteurs fixes croisés

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	F
A	p-1	$SC(A) = nq\sum_{i=1}^{p}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2$	$CM(A) = \frac{SC(A)}{p-1}$	$\frac{CM(A)}{CMR}$
B	q-1	$SC(B) = np\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y})^2$	$CM(B) = \frac{SC(B)}{q-1}$	$\frac{CM(B)}{CMR}$
A*B	(p-1)(q-1)	$SC(A*B) = n\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j} + \bar{y})^2$	$CM(A*B) = \frac{SC(A*B)}{(p-1)(q-1)}$	$\frac{CM(A*B)}{CMR}$
Résidu	pq(n-1)	$SCR = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$	$CMR = \frac{SCR}{pq(n-1)}$	
Total	npq-1	$SCT = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y})^2$		

Pour déterminer la puissance des tests d'analyse de la variance il faut calculer un paramètre de non-centralité λ défini par :

$$\lambda = n'k'\frac{\sigma_m^2}{\sigma^2}$$

Sous l'hypothèse alternative la statistique utilisée F suit une loi de Fisher-Snedecor non-centrée de paramètre de non-centralité λ et de degrés de liberté (u, v).

On calcule enfin la puissance du test F :

$$\eta = \mathrm{Prob}(F(u,v,\lambda) \geq F_{1-\alpha}(u,v)).$$

Lorsqu'on analyse la puissance des tests fournis par le tableau d'analyse de la variance, on peut estimer les écarts-types $\sigma_m^A, \sigma_m^B, \sigma_m^{AB}$ en utilisant les formules suivantes

$$\hat{\sigma}_m^A = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)CM(A)}$$

$$\hat{\sigma}_m^B = \sqrt{\frac{1}{npq}(q-1)CM(B)}$$

$$\hat{\sigma}_m^{AB} = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)(q-1)CM(A*B)}$$

Exemple

Voici l'exemple de PASS. Il s'agit de mesurer l'efficacité de deux types de régime (R1 et R2) accompagnés d'un médicament prescrit sous trois doses (faible, moyenne, forte). Les douze sujets disponibles pour cette étude ont été affecté au hasard dans chacun des six groupes de traitements et il y a donc deux sujets par groupe. La variable de réponse est la perte de poids au bout de quatre mois. Voici les résultats de cette étude :

	Dosage du médicament		
Régime	faible	moyen	fort
R1	14, 16	15, 18	23, 28
R2	18, 21	18, 22	38, 39

L'analyse de la variance réalisée avec SPSS conduit aux résultats suivants :

Source of Variation	Sum of Squares	DF	Mean Square	F	Sig of F
Main Effects	690.500	3	230.167	43.156	.000
REGIME	147.000	1	147.000	27.563	.002
DOSE	543.500	2	271.750	50.953	.000
2-Way Interactions	54.500	2	27.250	5.109	.051
REGIME DOSE	54.500	2	27.250	5.109	.051
Explained	745.000	5	149.000	27.938	.000
Residual	32.000	6	5.333		
Total	777.000	11	70.636		

Calcul de la puissance des tests F calculés sur l'étude réalisée

On calcule les valeurs des quantités $\hat{\sigma}_m^A, \hat{\sigma}_m^B, \hat{\sigma}_m^{AB}$:

$$\hat{\sigma}_m^A = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)CM(A)} = \sqrt{\frac{1}{2\times2\times3}(2-1)\times147} = 3.5$$

$$\hat{\sigma}_m^B = \sqrt{\frac{1}{npq}(q-1)CM(B)} = \sqrt{\frac{1}{2\times2\times3}(3-1)\times271.75} = 6.7299$$

$$\hat{\sigma}_m^{AB} = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)(q-1)CM(A*B)} = \sqrt{\frac{1}{2\times2\times3}(2-1)\times(3-1)\times27.25} = 2.1311$$

L'écart-type $\hat{\sigma}$ est égal à $\sqrt{CMR} = 2.3094$.

Calculons la puissance du test F sur le facteur A (Régime).
On identifie les écarts-types σ_m^A et σ à leur estimation.

On a ici u = p-1 = 1, v = pq(n-1) = 6, n' = 4, k' = 2 et le paramètre de non-centralité vaut:

$$\lambda = n'k'\frac{(\sigma_m^A)^2}{\sigma^2} = 4\times2\times\frac{12.25}{5.333} = 18.375$$

La puissance du test sur le facteur A pour détecter une situation où $\sigma_m^A = 3.5$ vaut donc :

$$\begin{aligned}\eta &= \mathrm{Prob}(F(u,v,\lambda) \geq F_{1-\alpha}(u,v)) \\ &= \mathrm{Prob}(F(1,6,18.375) \geq F_{0.95}(1,6)) \\ &= \mathrm{Prob}(F(1,6,18.375) \geq 5.987377) \\ &= 0.94306\end{aligned}$$

Voici les résultats de PASS pour les trois tests F :

Fixed Effects Analysis of Variance Power Analysis

Term	Power	n	N	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0.94306	2.00	12	1	6	4.00	3.50	1.5155	0.05000	0.05694
B	0.99997	2.00	12	2	6	3.00	6.73	2.9141	0.05000	0.00003
AB	0.46888	2.00	12	2	6	3.00	2.13	0.9228	0.05000	0.53112

Sigma = 2.3094

Calcul du nombre de sujets

Sur l'exemple des régimes, on constate que le test de l'interaction n'est pas assez puissant.
Combien faut-il de sujets au minimum pour détecter avec une probabilité d'au moins 0.8 une situation où $\sigma_m^{AB} = 2.1311$ et $\sigma = 2.3094$?

Il faut résoudre l'équation

$$0.8 = \text{Prob}(F(u,v,\lambda) \geq F_{1-\alpha}(u,v))$$

avec :

$$u = (p-1)(q-1) = 2$$
$$v = pq(n-1) = 6(n-1)$$
$$k' = u + 1 = 3$$

$$n' = \frac{v}{u+1} + 1 = 2n-1$$

$$\lambda = n'k'\frac{\sigma_m^2}{\sigma^2} = (2n-1)\times 3\times 2.1311^2/2.3094^2$$
$$= 5.11n - 2.55$$

D'où l'équation à résoudre

$$0.8 = \text{Prob}(F(2,6(n-1),5.11n - 2.55) \geq F_{0.95}(2,6(n-1)))$$

Voici la solution obtenue avec PASS :

Term	Power	n	N	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0.99935	3.00	18	1	12	7.00	3.50	1.5155	0.05000	0.00065
B	1.00000	3.00	18	2	12	5.00	6.73	2.9141	0.05000	0.00000
AB	0.80881	3.00	18	2	12	5.00	2.13	0.9228	0.05000	0.19119

Sigma = 2.3094

On peut vérifier ce calcul pour l'interaction :
On obtient pour n = 3 :

$$u = (p-1)(q-1) = 2$$
$$v = 6(n-1) = 12$$
$$n' = 2n - 1 = 5$$
$$k' = u + 1 = 3$$

$$\lambda = n'k'\frac{\sigma_m^2}{\sigma^2} = 5\times 3\times 4.5416/5.33333 = 12.7733$$

D'où :

$$\eta = \text{Prob}(F(u,v,\lambda) \geq F_{1-\alpha}(u,v))$$
$$= \text{Prob}(F(2,12,12.7733) \geq F_{0.95}(2,12))$$
$$= \text{Prob}(F(2,12,12.7733) \geq 3.88529))$$
$$= 0.8088$$

6. Analyse de la variance à effets mixtes (un ou deux facteurs fixes et un facteur aléatoire)

Nous allons étudier dans cette section le modèle mixte avec un facteur A fixe et un facteur B aléatoire. Le modèle avec interaction s'écrit :

$$Y_{ijk} = \delta + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (6)$$

où $\beta_j \sim N(0,\sigma_\beta)$, $\gamma_{ij} \sim N(0,\sigma_\gamma)$ et $\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma)$ avec indépendance entre les aléas.

On impose de plus la contrainte

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$$

ce qui implique $\delta = \mu_{...}$ et $\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...}$

Les hypothèses nulles qui peuvent être testées à l'aide du modèle (6) sont :

$H_0 : \mu_{1..} = \mu_{2..} = \dots = \mu_{p..}$ équivalent à $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$
$H_0 : \sigma_\beta = 0$
$H_0 : \sigma_\gamma = 0$

Pour déterminer la statistique F à utiliser pour chacun de ces tests, il est nécessaire de calculer les espérances des carrés moyens du Tableau 1. On obtient :

$$E(CM(A)) = \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + \frac{nq}{p-1}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2$$

$$E(CM(B)) = \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + np\sigma_\beta^2$$

$$E(CM(A*B)) = \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2$$

$$E(CMR) = \sigma^2$$

D'où les tests suivants :

Effet A

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p \quad \text{équivalent à } H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

On compare la statistique

$$F = \frac{CM(A)}{CM(A*B)}$$

au seuil $F_{1-\alpha}(p-1,(p-1)(q-1))$

Effet B

$$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$$

On compare la statistique

$$F = \frac{CM(B)}{CM(A*B)}$$

au seuil $F_{1-\alpha}(q-1,(p-1)(q-1))$

*Interaction A*B*

$$H_0 : \sigma_\gamma^2 = 0$$

On compare la statistique

$$F = \frac{CM(A*B)}{CMR}$$

au seuil $F_{1-\alpha}((p-1)(q-1),pq(n-1))$

Exemple (Milliken & Johnson) : Etude de la productivité de machines de différentes marques

Une société veut remplacer les machines utilisées dans la fabrication d'une certaine pièce dans une de ses usines. Trois différentes marques sont disponibles, aussi la direction a organisé une expérience afin d'évaluer la productivité des machines lorsqu'elles sont manipulées par le personnel de la société. Six employés ont été choisis au hasard pour participer à l'expérience, chacun d'entre eux travaillant sur chaque machine en trois occasions. Les données recueillies représentent un score global prenant en compte la quantité et la qualité des pièces fabriquées. Elles sont reproduites dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Scores de productivité

		Machine 1			Machine 2			Machine 3		
	Période	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
	1	52.0	52.8	53.1	62.1	62.6	64.0	67.5	67.2	66.9
	2	51.8	52.8	53.1	59.7	60.0	59.0	61.5	61.7	62.3
Personne	3	60.0	60.2	58.4	68.6	65.8	69.7	70.8	70.6	71.0
	4	51.1	52.3	50.3	63.2	62.8	62.2	64.1	66.2	64.0
	5	50.9	51.8	51.4	64.8	65.0	65.4	72.1	72.0	71.1
	6	46.4	44.8	49.2	43.7	44.2	43.0	62.0	61.4	60.5

Dans cet exemple le facteur Machine est considéré comme fixe et le facteur Personne comme aléatoire. On suppose qu'il n'y a pas d'effet Période. Les résultats correspondant à un modèle avec interaction sont donnés dans le Tableau 3.

Tableau 3 : Résultats de l'exemple Machine-Personne

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	E(CM)	F	N.S.
Machine	2	1755.26	877.63	$\sigma^2 + 3\sigma_\gamma^2 + 9\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2$	20.6	0.0003
Personne	5	1241.89	248.38	$\sigma^2 + 3\sigma_\gamma^2 + 9\sigma_\beta^2$	5.823	0.0089
Machine * Personne	10	426.53	42.65	$\sigma^2 + 3\sigma_\gamma^2$	46.13	0.0001
Résidu	36	33.29	0.925	σ^2		
Total	53	3456.975				

Le logiciel PASS permet d'étudier la puissance des tests F pour ce type de plan d'expérience.

Étudions la puissance du test sur le facteur Machine.

On estime $\sigma_m^{\text{Machine}}$ en utilisant $\hat{\sigma}_m^A = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)CM(A)}$

On obtient ici

$$\hat{\sigma}_m^{\text{Machine}} = \sqrt{\frac{1}{3\times3\times6}(3-1)877.63} = 5.70$$

Cet écart-type est comparé à la racine carrée du carré moyen de l'interaction Machine*Personne

$$\hat{\sigma}^{\text{Machine*Personne}} = [\text{CM(Machine*Personne)}]^{1/2} = 6.53$$

On calcule la puissance du test F pour détecter une situation où les espérances des carrés moyens sont égaux aux carrés moyens observés.

Voici les résultats de PASS :

Randomized Blocks Analysis of Variance Power Analysis

Numeric Results

Term	Power	Blocks	N	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0 67260	6	18	2	10	4 3	5 70	0.8729	0.05000	0 32740

Sigma (block-treatment interaction) = 6.53

Pour obtenir dans la situation étudiée une puissance d'au moins 0.80 il faut 8 sujets :

Term	Power	Blocks	N	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0 76162	7	21	2	12	5.0	5.70	0.8729	0.05000	0.23838
A	0 82989	8	24	2	14	5.7	5 70	0 8729	0.05000	0.17011

Sigma (block-treatment interaction) = 6 53

7. Analyse de la variance de mesures répétées

Le logiciel PASS permet d'étudier une situation où il y a un facteur de répétition (*within factor*) et un facteur de groupe (*between factor*).

On peut ainsi répondre aux questions suivantes :

1. Combien faut-il de sujets? Combien de répétitions?
2. Combien faut-il de niveaux pour chaque facteur?
3. Quelles sont les valeurs du risque α à utililiser pour chaque test F?
4. L'interaction doit-elle être testée au même risque α que les effets principaux?

Exemple (Milliken & Johnson) : Effet d'un traitement sur le rythme cardiaque

On souhaite étudier les effets de trois traitements (AX23, BWW9 et Contrôle) sur le rythme cardiaque. Après que le médicament ait été administré, le rythme cardiaque est mesuré quatre fois aux instants 5 mn, 10 mn, 15 mn, 20 mn. Il y a huit personne par traitement. Les données figurent dans le Tableau 4.

Tableau 4 : Effet d'un traitement sur le rythme cardiaque

Sujet dans traitement	Traitement AX23				BWW9				Contrôle			
	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
1	72	86	81	77	85	86	83	80	69	73	72	74
2	78	83	88	81	82	86	80	84	66	62	67	73
3	71	82	81	75	71	78	70	75	84	90	88	87
4	72	83	83	69	83	88	79	81	80	81	77	72
5	66	79	77	66	86	85	76	76	72	72	69	70
6	74	83	84	77	85	82	83	80	65	62	65	61
7	62	73	78	70	79	83	80	81	75	69	69	68
8	69	75	76	70	83	84	78	81	71	70	65	65

Il y a trois groupes de sujets correspondant à chaque traitement (AX23, BWW9, Contrôle). Sur chaque sujet on observe quatre mesures du rythme cardiaque réalisées aux instants $T_1=0$, $T_2=5$, $T_3=10$, $T_4=15$.

Le modèle décrivant ces données s'écrit :

$$Y_{ijk} = \delta + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + s_{k(i)} + \varepsilon_{ijk} \tag{7}$$

où :

- α_i , i = 1, 2, 3, correspond aux produits (AX23, BWW9, Contrôle)
- β_j , j = 1,....,4, correspond aux instants de mesure ($T_1=0$, $T_2=5$, $T_3=10$, $T_4=15$)
- γ_{ij} , correspond aux termes d'interaction Produit*Temps
- $s_{k(i)}$, correspond à l'effet aléatoire Sujet(Produit)
- ε_{ijk}, terme résiduel correspondant à la j-ième mesure sur le k-ième sujet du groupe de traitement i

Les variables aléatoires $s_{k(i)}$ suivent indépendemment une loi normale $N(0, \sigma_s^2)$, où σ_s^2 est la variance inter-sujets. Les variables aléatoires ε_{ijk} suivent indépendemment une loi normale $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, où σ_ε^2 est la variance intra-sujets. Les variables aléatoires $s_{k(i)}$ et ε_{ijk} sont indépendantes.

Nous étudions le modèle (7) en utilisant la Proc GLM. Le logiciel PASS permet de calculer la puissance des tests adéquats en mesures répétées associés à ce modèle.

Voici le programme SAS et les résultats

Programme

```
proc glm data=coeur;
class produit sujet temps;
model rythme=produit sujet(produit) temps produit*temps ;
random sujet(produit) /test;
means produit;
run;
```

Résultats

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: RYTHME

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	32	4449.02083	139.03190	19.10	0.0001
Error	63	458.46875	7.27728		
Corrected Total	95	4907.48958			

R-Square	C.V.	Root MSE	RYTHME Mean
0.906578	3.529696	2.69764	76.4271

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRODUIT	2	1315.08333	657.54167	90.36	0.0001
SUJET(PRODUIT)	21	2320.15625	110.48363	15.18	0.0001
TEMPS	3	282.61458	94.20486	12.95	0.0001
PRODUIT*TEMPS	6	531.16667	88.52778	12.16	0.0001

General Linear Models Procedure

Source	Type III Expected Mean Square
PRODUIT	Var(Error) + 4 Var(SUJET(PRODUIT)) + Q(PRODUIT, PRODUIT*TEMPS)
SUJET(PRODUIT)	Var(Error) + 4 Var(SUJET(PRODUIT))
TEMPS	Var(Error) + Q(TEMPS, PRODUIT*TEMPS)
PRODUIT*TEMPS	Var(Error) + Q(PRODUIT*TEMPS)

```
General Linear Models Procedure
Tests of Hypotheses for Mixed Model Analysis of Variance

Dependent Variable: RYTHME


Source: PRODUIT *
Error: MS(SUJET(PRODUIT))
                              Denominator    Denominator
     DF     Type III MS                DF             MS      F Value     Pr > F
      2     657.54166667               21   110.48363095       5.9515     0.0090
* - This test assumes one or more other fixed effects are zero.


Source: SUJET(PRODUIT)
Error: MS(Error)
                              Denominator    Denominator
     DF     Type III MS                DF             MS      F Value     Pr > F
     21     110.48363095               63    7.277281746      15.1820     0.0001

Source: TEMPS *
Error: MS(Error)
                              Denominator    Denominator
     DF     Type III MS                DF             MS      F Value     Pr > F
      3     94.204861111               63    7.277281746      12.9451     0.0001
* - This test assumes one or more other fixed effects are zero.


Source: PRODUIT*TEMPS
Error: MS(Error)
                              Denominator    Denominator
     DF     Type III MS                DF             MS      F Value     Pr > F
      6     88.527777778               63    7.277281746      12.1650     0.0001

Level of              ------------RYTHME-----------
PRODUIT        N          Mean                 SD

AX23          32       76.2812500         6.40178592
BWW9          32       81.0312500         4.20816698
Contrôle      32       71.9687500         7.56257498
```

Utilisation de PASS

Dans PASS on appelle σ_{Between} la racine carrée du terme CM(Sujet(Produit)) et σ_{Within} la racine carrée du carré moyen résiduel. Sur l'exemple $\sigma_{\text{Between}} = 10.51$ et $\sigma_{\text{Within}} = 2.70$. Précisons que σ_{Within} correspond bien à l'estimation de l'écart-type intra-sujets, mais que σ_{Between} n'est pas l'estimation usuelle de l'écart-type inter-sujets. Il s'agit simplement d'une simplication du vocabulaire utilisé pour entrer les informations utiles dans PASS.

Calculons la puissance des tests sur les facteurs Produit, Temps et l'interaction Produit*Temps en supposant que les espérances des carrés moyens du tableau d'analyse de la variance sont égaux aux carrés moyens calculés.

On calcule les valeurs des quantités $\hat{\sigma}_m^{\text{Produit}}, \hat{\sigma}_m^{\text{Temps}}, \hat{\sigma}_m^{\text{Produit*Temps}}$:

$$\hat{\sigma}_m^{\text{Produit}} = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)CM(\text{Produit})} = \sqrt{\frac{1}{8\times3\times4}(3-1)\times 657.54} = 3.70$$

$$\hat{\sigma}_m^{\text{Temps}} = \sqrt{\frac{1}{npq}(q-1)CM(\text{Temps})} = \sqrt{\frac{1}{8\times3\times4}(4-1)\times 94.20} = 1.72$$

$$\hat{\sigma}_m^{\text{Produit*Temps}} = \sqrt{\frac{1}{npq}(p-1)(q-1)CM(\text{Produit*Temps})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8\times3\times4}(3-1)\times(4-1)\times 88.53} = 2.35$$

Voici les résultats de PASS :

Repeated Measures Analysis of Variance Power Analysis

Term	Power	Levels	Subjects	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0.28123	3	24.0	2	21	8.0	3.70	0.3520	0.05000	0.71877
B	0.99418	4	24.0	3	63	16.8	1.72	0.6370	0.05000	0.00582
AB	0.99995	12	24.0	6	63	10.0	2.35	0.8704	0.05000	0.00005

Between Sigma = 10.51 Within Sigma = 2.70

Il apparait que la probabilité de détecter un effet Produit dans la situation étudiée est faible (0.28). Pour obtenir une puissance de 0.80 pour le test sur l'effet Produit dans la situation étudiée, il faudrait 27 sujets par produit :

Repeated Measures Analysis of Variance Power Analysis

Numerical Results

Term	Power	Levels	Subjects	df1	df2	n'	Sigma m	Effect Size	Alpha	Beta
A	0.78430	3	78.0	2	75	26.0	3.70	0.3520	0.05000	0.21570
B	1.00000	4	78.0	3	225	57.3	1.72	0.6370	0.05000	0.00000
AB	1.00000	12	78.0	6	225	33.1	2.35	0.8704	0.05000	0.00000
A	0.80102	3	81.0	2	78	27.0	3.70	0.3520	0.05000	0.19898
B	1.00000	4	81.0	3	234	59.5	1.72	0.6370	0.05000	0.00000
AB	1.00000	12	81.0	6	234	34.4	2.35	0.8704	0.05000	0.00000

Between Sigma = 10.51 Within Sigma = 2.70

8. Test de comparaison d'une proportion à un standard

Le programme PASS 6.0 permet de réaliser le test de comparaison d'une proportion à un standard en utilisant uniquement la loi binomiale. L'approximation normale devient inutile. La région critique, la puissance du test et le nombre de sujets nécessaires sont facilement calculables.

Soit R une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(N, \pi)$
Considèrons le test :

$$H_0 : \pi = p_0$$
$$H_1 : \pi > p_0$$

Région critique au risque α :

On rejette H_0 au profit de H_1 au risque α si R est supérieur à un seuil c. On calcule c en résolvant au plus près l'équation

$$\alpha = \text{Prob}(\text{Rejeter } H_0 \,/\, H_0 \text{ est vraie})$$
$$\text{Prob}(R \geq c \,/\, H_0 \text{ est vraie})$$
$$\text{Prob}(R \geq c \,/\, R \text{ suit une loi binomiale } B(N, p_0)$$

Exemple :

Les données $N = 1000$, $p_0 = 0.5$, $\alpha = 0.05$ conduisent à un seuil $c = 527$.

Sorties PASS

One Proportion Power Analysis

Numeric Results for Ha: P0<P1

Power	N	P0	P1	Target Alpha	Actual Alpha	Beta	Reject Ho If R>=This
1.00	1000	0.50	0.60	0.05	0.04684	0.00000	527

Recherche de la taille d'échantillon permettant d'obtenir une puissance donnée

On fixe $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.52$, et $\alpha = 0.05$. On souhaite fixer N pour que le test

$$H_0 : \pi = 0.50$$
$$H_1 : \pi = 0.52$$

ait une puissance $\eta = 0.80$.

Il faut donc trouver N et c solutions au plus près des équations

$$\alpha = 0.05 = \text{Prob}(R \geq c \,/\, R \text{ suit une loi binomiale } B(N, 0.50))$$
$$\eta = 0.80 = \text{Prob}(R \geq c \,/\, R \text{ suit une loi binomiale } B(N, 0.52))$$

Solution PASS

One Proportion Power Analysis

Numeric Results for Ha: P0<P1

Power	N	P0	P1	Target Alpha	Actual Alpha	Beta	Reject Ho If R>=This
0.80099	3892	0.50	0.52	0.05	0.04936	0.19901	1998

Vérifions que le nombre de sujets nécessaire est beaucoup plus faible si les probabilités testées sont plus faibles. Par exemple on obtient pour $p_0 = 0.05$, $p_1 = 0.07$, $\alpha = 0.05$, $\eta = 0.80$ la solution suivante :

One Proportion Power Analysis

Numeric Results for Ha: P0<P1

Power	N	P0	P1	Target Alpha	Actual Alpha	Beta	Reject Ho If R>=This
0.80104	870	0.05	0.07	0.05	0.04730	0.19896	55

9. Comparaison de deux proportions indépendantes

On considère maintenant deux variables aléatoires R_1 et R_2 suivant indépendemment des lois binomiales $B(N_1, p_1)$ et $B(N_2, p_2)$.
Etudions le test

$$H_0 : p_1 = p_2$$
$$H_1 : p_1 > p_2$$

Notons

$$\hat{p}_1 = \frac{R_1}{N_1}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{R_2}{N_2}$$

Première approche

L'approche usuelle pour des grands échantillons (> 100) consiste à calculer la statistique

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2})}}$$

ou

$$\hat{p} = \frac{N_1\hat{p}_1 + N_2\hat{p}_2}{N_1 + N_2}$$

et à la comparer au fractile 1-α de la loi normale réduite.

Deuxième approche

On utilise la transformation arcsinus :

$$z_i = 2\text{Arc}\sin\sqrt{\hat{p}_i} \sim N(2\text{Arc}\sin\sqrt{p_i}, \frac{1}{\sqrt{N_i}})$$

La statistique $(z_1 - z_2)$ suit approximativement une loi normale

$$N(2\text{Arc}\sin\sqrt{p_1} - 2\text{Arc}\sin\sqrt{p_2} \; ; \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}})$$

On calcule donc la statistique

$$z = \frac{(z_1 - z_2) - (2\text{Arc}\sin\sqrt{p_1} - 2\text{Arc}\sin\sqrt{p_2})}{\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

sous les hypothèses H_0 et H_1 pour obtenir un seuil critique et la puissance du test.

Exemple 1 :

Supposons $N_1 = 20$, $N_2 = 50$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.1$, $\alpha = 0.05$.

Calculons la puissance du test sous les deux approches

Approche 1

Two Proportions Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.61967	20	50	0.30	0.10	0.05	0.38033

Approche 2 :

Two Proportions Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.64627	20	50	0.30	0.10	0.05	0.35373

Exemple 2 :

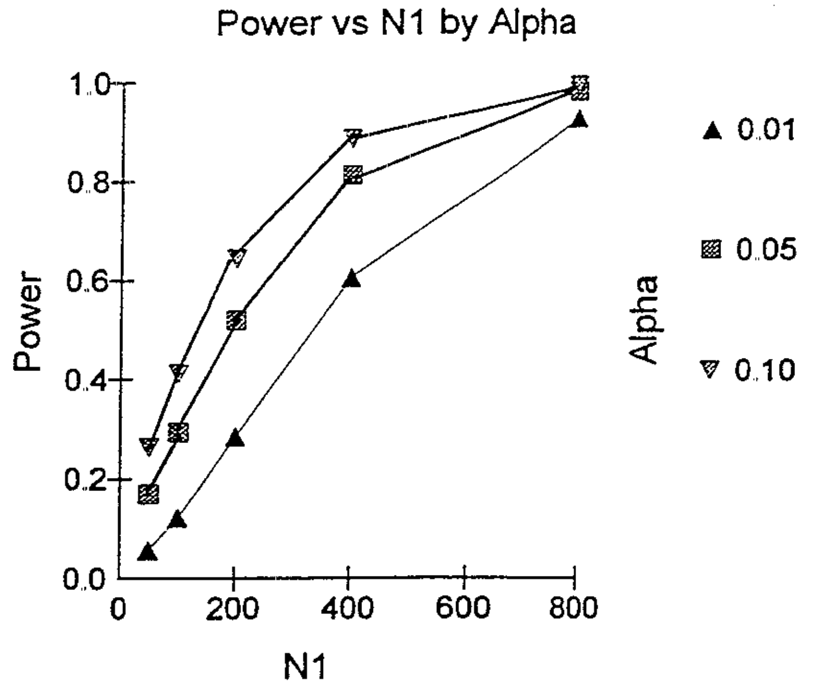
On calcule dans cet exemple la puissance du test de comparaison de deux proportions bilatéral lorsque $N_1 = N_2 = 50, 100, 200, 400, 800$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$, $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$. On utilise la transformation arcsinus.

Résultats PASS

Two Proportions Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1<>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.05735	50	50	0.50	0.60	0.01	0.94265
0.12298	100	100	0.50	0.60	0.01	0.87702
0.28480	200	200	0.50	0.60	0.01	0.71520
0.60573	400	400	0.50	0.60	0.01	0.39427
0.92670	800	800	0.50	0.60	0.01	0.07330
0.17002	50	50	0.50	0.60	0.05	0.82998
0.29447	100	100	0.50	0.60	0.05	0.70553
0.52012	200	200	0.50	0.60	0.05	0.47988
0.81252	400	400	0.50	0.60	0.05	0.18748
0.98081	800	800	0.50	0.60	0.05	0.01919
0.26396	50	50	0.50	0.60	0.10	0.73604
0.41215	100	100	0.50	0.60	0.10	0.58785
0.64334	200	200	0.50	0.60	0.10	0.35666
0.88569	400	400	0.50	0.60	0.10	0.11431
0.99152	800	800	0.50	0.60	0.10	0.00848



10. Test de Fisher exact

On reprend la situation de la section 11. On considère deux variables aléatoires R_1 et R_2 suivant indépendemment des lois binomiales $B(N_1, \pi_1)$ et $B(N_2, \pi_2)$.
Le test de Fisher exact est une méthode permettant l'étude du test

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2$$
$$H_1 : \pi_1 > \pi_2$$

sans approximation.
Posons $K = R_1$ et $M = R_1+R_2$. La loi de probabilité de K conditionnellement à M s'écrit

$$\mathrm{Prob}(K/\pi_1,\pi_2,M) = \frac{\mathrm{Prob}(K/\pi_1)\times \mathrm{Prob}(M-K/\pi_2)}{\mathrm{Prob}(M/\pi_1,\pi_2)}$$

$$= \frac{\binom{N_1}{K}\binom{N_2}{M-K}\pi_1^K(1-\pi_1)^{N_1-K}\pi_2^{M-K}(1-\pi_2)^{N_2-(M-K)}}{\sum_{i=L_1}^{U_1}\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{M-i}\pi_1^i(1-\pi_1)^{N_1-i}\pi_2^{M-i}(1-\pi_2)^{N_2-(M-i)}}$$

$$= \frac{\binom{N_1}{K}\binom{N_2}{M-K}\pi_1^K(1-\pi_1)^{-K}\pi_2^{-K}(1-\pi_2)^{K}}{\sum_{i=L_1}^{U_1}\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{M-i}\pi_1^i(1-\pi_1)^{-i}\pi_2^{-i}(1-\pi_2)^{i}}$$

$$= \frac{\binom{N_1}{K}\binom{N_2}{M-K}\theta^K}{\sum_{i=L_1}^{U_1}\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{M-i}\theta^i}$$

où

$$L_1 = \max(0, M-N_2)$$
$$U_1 = \min(N_1, M)$$

$$\theta = \frac{\pi_1(1-\pi_2)}{\pi_2(1-\pi_1)}$$

On peut remarquer que θ est l'odds ratio de π_1 et π_2.

Soit K_c le seuil critique de K pour le test exact de l'hypothèse nulle $\pi_1 = \pi_2$ contre l'hypothèse alternative $\pi_1 > \pi_2$ pour M fixé. Ce seuil est défini par

$$\sum_{i=K_c}^{U_1} \text{Prob}(K = i / \theta = 1, M) \leq \alpha$$

et

$$\sum_{i=K_c-1}^{U_1} \text{Prob}(K = i / \theta = 1, M) > \alpha$$

La puissance conditionnelle de ce test est égale à

$$\eta(\theta/M) = \sum_{i=K_c}^{U_1} \text{Prob}(K = i / \theta, M)$$

et la puissance moyenne vaut

$$\eta(\theta, \pi_2) = \sum_{j=1}^{N_1+N_2} \eta(\theta / M = j)\text{Prob}(M = j / \theta, \pi_2)$$

où

$$\text{Prob}(M = j / \theta, \pi_2) = \sum_{i=L_2}^{U_2} \binom{N_1}{i} \pi_1^i (1-\pi_1)^{N_1-i} \binom{N_2}{j-i} \pi_2^{j-i} (1-\pi_2)^{N_2-j+i}$$

avec $L_2 = \max(0, j-N_2)$ et $U_2 = \min(N_1, j)$.

<u>Exemple 1 :</u>

Reprenons l'exemple 1 de la section précédente : $N_1 = 20$, $N_2 = 50$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.1$, $\alpha = 0.05$.

Calculons la puissance du test de Fisher exact pour cette situation.

Fisher's Exact Test Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.51460	20	50	0.30	0.10	0.05	0.48540

Calculons maintenant la taille des groupes permettant d'obtenir dans cette situation une puissance de 80%.

Fisher's Exact Test Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.80249	56	56	0.30	0.10	0.05	0.19751

Exemple 2 :

Considérons un procédé de fabrication qui a conduit à 3 pièces défectueuses dans un échantillon de taille 50 tiré de la fabrication de la semaine. La semaine suivante on a trouvé une seule pièce défectueuse parmi un échantillons de taille 50. L'amélioration de la production est-elle significative?

Solution PASS

1) On construit tout d'abord la région critique en fonction d'un risque β égal à 20%.
On obtient :

Fisher's Exact Test Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.84023	50	50	0.06	0.02	0.69135	0.15977

Le risque α valant 69%, on est conduit à accepter l'hypothèse nulle : la proportion de pièces défectueuses n'a pas évolué d'une semaine à l'autre.

2) Quelle est la puissance du test si on fixe α à 5%?

Fisher's Exact Test Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.07787	50	50	0.06	0.02	0.05	0.92213

3) Quelle taille d'échantillon permettrait d'obtenir une puissance de 80%?

Fisher's Exact Test Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.57026	200	200	0.06	0.02	0.05	0.42974

Warning: The maximum sample size was set to 200

On utilise maintenant l'approche de la section 11.

Two Proportions Power Analysis

Numeric Results with Ha: P1>P2

Power	N1	N2	P1	P2	Alpha	Beta
0.80034	296	296	0.06	0.02	0.05	0.19966

11. Test du Khi-Deux

PASS 6.0 permet de calculer la puissance du test du khi-deux d'ajustement à une loi de probabilité ou du test du Khi-Deux d'indépendance.
On considère une situation où il y a m cases. Pour chaque case i on note respectivement p_{0i} et p_{1i} les probabilités de la case sous l'hypothèse nulle H_0 et sous l'hypothèse alternative H_1. On appelle effet taille (*size effect*) w la quantité définie par

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{(p_{0i} - p_{1i})^2}{p_{0i}}}$$

La statistique du khi-deux, χ^2, vaut

$$\chi^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}}$$

$$= N\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{(p_{0i} - p_{1i})^2}{p_{0i}}}$$

$$= Nw^2$$

où N est la somme des effectifs de toutes les cases.

Exemple :

Reprenons l'exemple de PASS.
Un échantillon de 311 personnes a été recueilli. Chaque personne interrogée a précisé son appartenance politique et donné une opinion. Voici le tableau de contingence obtenu

	Favor Proposition A	
Political Party	**Yes**	**No**
Democrats	86	21
Republican	54	59
Others	34	57

Si l'on suppose que la réalité correspond au données observées, alors la statistique du khi-deux suit une loi du khi-deux de paramètre de non-centralité $\lambda = Nw^2$. Les degrés de liberté du χ^2 sont les mêmes sous les deux hypothèses.
PASS permet de calculer sur ce tableau l'effet taille w et la puissance du test du khi-deux pour détecter cet effet.

Résultats

```
PARTY  by  OPINION

                   OPINION
           Count  |
         Exp Val  |yes        no
                  |                    Row
                  |    1.00|     2.00| Total
PARTY    ---------+--------+--------+
            1.00  |    86  |    21  |   107
  democrats       |  59.9  |  47.1  | 34.4%
                  +--------+--------+
            2.00  |    54  |    59  |   113
  republican      |  63.2  |  49.8  | 36.3%
                  +--------+--------+
            3.00  |    34  |    57  |    91
  others          |  50.9  |  40.1  | 29.3%
                  +--------+--------+
          Column      174      137      311
           Total    55.9%    44.1%   100.0%
```

```
       Chi-Square                    Value          DF             Significance
--------------------              -----------      ----            ------------

Pearson                             41.70883         2                .00000
Likelihood Ratio                    44.05146         2                .00000
Mantel-Haenszel test for            38.01080         1                .00000
      linear association

Minimum Expected Frequency -   40.087


                                                                    Approximate
     Statistic                    Value        ASE1      Val/ASE0   Significance
---------------------           ---------    --------    --------   ------------

Phi                               .36621                               .00000 *1
Cramer's V                        .36621                               .00000 *1
Contingency Coefficient           .34388                               .00000 *1

*1 Pearson chi-square probability

Number of Missing Observations:  0
```

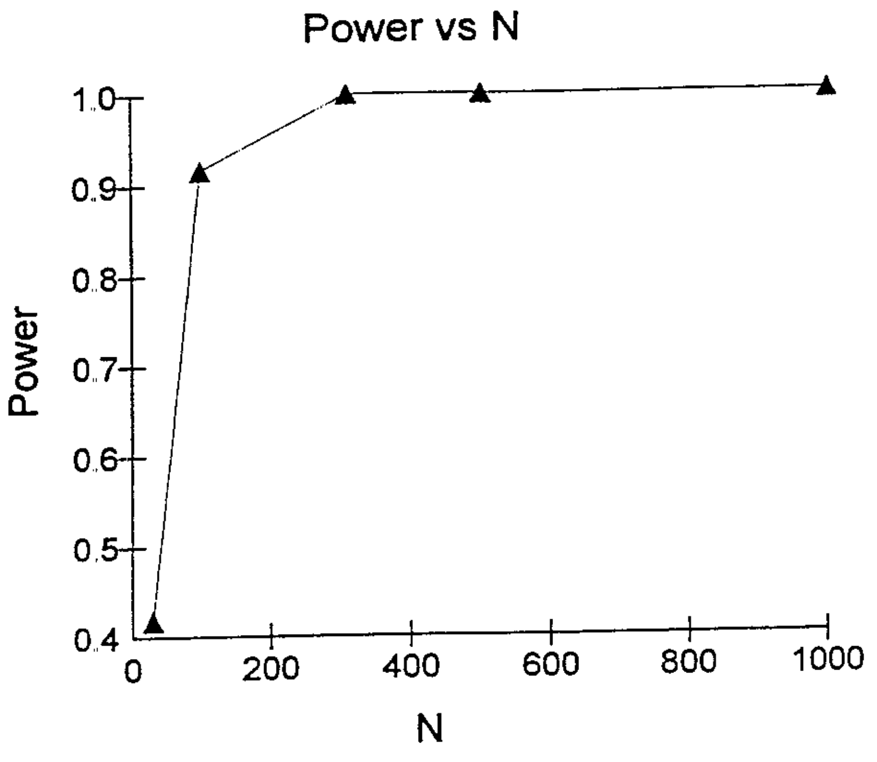
L'effet taille $w = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$ est égal à la statistique Phi et vaut ici 0.3662. Cet effet peut aussi être calculé en utilisant le *W(Chi-Square) Calculator* de PASS.

Voici l'étude de puissance en fixant w et en faisant varier N.

Chi-Square Test Power Analysis

Numeric Results

Power	N	W	Chi-Square	DF	Alpha	Beta
0.41754	30	0.3662	4.0231	2	0.05	0.58246
0.91676	100	0.3662	13.4102	2	0.05	0.08324
0.99998	311	0.3662	41.7059	2	0.05	0.00002
1.00000	500	0.3662	67.0512	2	0.05	0.00000
1.00000	1000	0.3662	134.1024	2	0.05	0.00000


Power vs N
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
Power
0
200
400
600
800
1000
N