

# Scoring sur données d'entreprises : instrument de diagnostic individuel et outil d'analyse de portefeuille d'une clientèle

**Mireille Bardos**

Ancien chef de service

de l'Observatoire des entreprises de la Banque de France

[mireille.bardos@wanadoo.fr](mailto:mireille.bardos@wanadoo.fr)

*Mots clefs : prévision du risque de crédit, analyse discriminante, précision de la probabilité de défaillance, classes de risque, sélection de variables, choix de modèle*

## **Introduction**

La plupart des études statistiques sur le risque de crédit et l'analyse discriminante se concentrent sur les techniques de construction d'un score. Or la réalisation d'un outil efficace de détection du risque doit relier cette construction à l'utilisation future de cet instrument et les propriétés qu'il doit en conséquence nécessairement satisfaire. Les utilisateurs d'un scoring sur données d'entreprises seront des décideurs, pour la plupart experts en analyse financière, ou responsables du risque de crédit dans les banques, ou superviseurs bancaires. Le présent article s'efforce de relier construction et utilisation en mettant en exergue les propriétés requises pour les utilisateurs et les implications techniques qu'elles entraînent. Il en résultera une réflexion sur la sélection des données, sur le choix du modèle, sur l'estimation de la probabilité de défaut. Dès lors l'utilisation de l'outil sera approfondie sous deux aspects : le diagnostic individuel de l'entreprise et l'analyse du risque d'une population d'entreprises emprunteuses. Enfin le score comme indicateur probabilisé du risque de crédit joue un rôle important dans les recherches en économie.

Beaucoup des problèmes abordés ici se rencontrent sur d'autres champs d'application de l'analyse discriminante. Toutefois il convient de s'adapter dans chaque cas aux spécificités de l'utilisation.

## **1. Les enjeux de la prévision du risque de défaut de paiement**

La nécessité de mieux contrôler le risque de crédit dans les banques a conduit à l'intensification des travaux de credit scoring. Plusieurs types de techniques permettent la détection précoce des défauts paiement des entreprises. Elles relèvent de l'analyse discriminante.

Un des objectifs majeurs pour les banques est d'estimer l'espérance de la perte globale attendue, *Expected Loss*, et la perte inattendue grâce à un quantile extrême, *Unexpected Loss*, sur une population d'entreprises, par exemple la clientèle d'une banque. Pour cela il est nécessaire de disposer au niveau de chaque entreprise d'une probabilité de défaut à un horizon donné (ou plusieurs). On peut alors déterminer des classes de risque homogène.

D'un tel objectif découlent plusieurs questions sur les propriétés du score mis à disposition :

- précision de l'estimation des probabilités et homogénéité des classes de risque
- stabilité temporelle des classes de risque et de leurs propriétés

- dépendance à la conjoncture de la mesure du risque
- stabilité des matrices de transitions
- corrélation des risques

La maîtrise de ces questions oblige à se pencher sur le processus de construction du score et d'examiner les stades sensibles de ce processus. La pratique de la construction et de l'utilisation conduit à une deuxième série de questions :

- type de variables
- longueur historique des fichiers de construction
- processus de sélection des variables
- choix de la technique d'analyse discriminante
- horizon de la prévision
- stabilité des entreprises dans les classes de risque
- fréquence de révision de l'outil
- articulation entre conjoncture, prévision et révision

Ces questions constituent un enjeu important. De plus en plus étudiées elles se révèlent interdépendantes. Les phases successives de la construction d'un score ont une influence sur la robustesse et l'efficacité de l'outil obtenu. Diverses utilisations d'un tel outil seront envisagées. Les exemples présentés sont ceux des scores de la Banque de France.

## 2. Construction d'un outil de détection précoce

### 2.1 Les données

La définition de **l'événement à détecter** constitue une première difficulté : procédure judiciaire ou défaut de paiement ? quelle gravité du défaut de paiement ? Le choix est souvent guidé par la disponibilité de l'information. Un banquier connaîtra les défauts de paiement et sera à même de qualifier leur gravité ; une institution publique est souvent mieux renseignée sur l'ouverture des procédures judiciaires. Ensuite se pose la question de la corrélation entre ces événements pour une même entreprise.

La population d'**entreprises cibles**. La qualité du travail statistique requiert: la représentativité des échantillons et leur redressement éventuel. Une relative homogénéité de la population est également nécessaire, pour que la variabilité liée aux difficultés des entreprises ne soit pas masquée par d'autres types de variabilité comme les différences structurelles des bilans entre grands secteurs. Dans ce dernier cas la construction d'un score par grand secteur est la solution. Au statisticien de décider à quel niveau de nomenclature d'activité sectoriel il doit travailler.

**L'horizon de la prévision** est fixé par les besoins du décideur, mais conditionné par la fraîcheur des données, l'impact de la conjoncture et la prévisibilité du phénomène étudié (ici la défaillance).

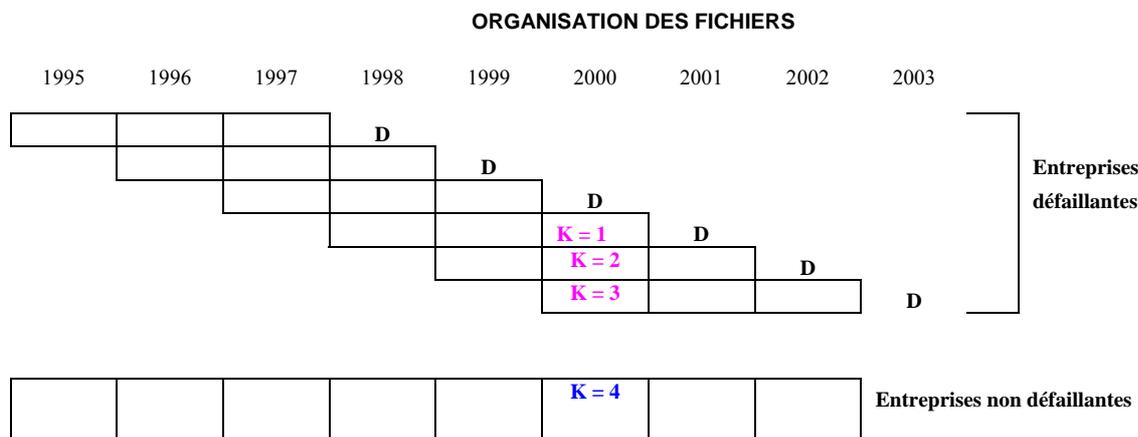
L'organisation des fichiers de données résultera d'un compromis.

Le schéma 1 décrit la façon dont les échantillons ont été organisés dans les études de la Banque de France. Huit années d'observations des comptes d'entreprises permettent de couvrir un cycle économique. Pour les entreprises défailtantes, la base de données est constituée des bilans des trois années précédant la défaillance. D indique le moment où celle-ci intervient. Chaque rectangle représente les données bilancielle d'un exercice comptable. Les études statistiques sur la prévision de la défaillance sur données comptables ont révélé

que dès trois ans avant la défaillance des signes avant-coureurs sont visibles dans beaucoup d'entreprises et ceux-ci s'accroissent à l'approche de l'événement.

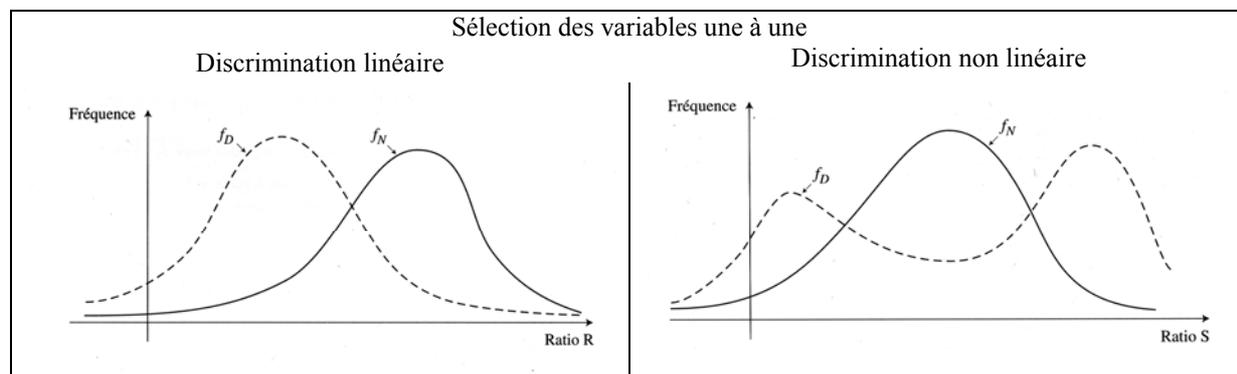
La présence des bilans d'une entreprise dans les bases de données bancaires peut présenter une certaine discontinuité, en particulier chez les firmes en difficultés. Pour ne pas se priver d'un maximum d'observations les échantillons d'étude sont non constants. De tels fichiers correspondent d'ailleurs la réalité de l'utilisation future du scoring.

### Schéma 1



Légende: K = 1: entreprises défaillantes observées 1 an avant la défaillance  
 K = 2: entreprises défaillantes observées 2 ans avant la défaillance  
 K = 3: entreprises défaillantes observées 3 ans avant la défaillance  
 K = 4: entreprises non défaillantes jusqu'à la date de constitution des fichiers (été 2004)

### Schéma 2



$f_D$  désigne la courbe de densité des entreprises défaillantes.  $f_N$  désigne la courbe de densité des entreprises non défaillantes

**Le choix des variables explicatives** va également être conditionné par la disponibilité et la fiabilité. Les variables qualitatives sont particulièrement fragiles et souvent mieux adaptées à l'expertise. Parmi les variables quantitatives, le suivi du compte bancaire est probablement très révélateur à court terme, mais, n'est pas toujours disponible ou s'il est disponible il nécessite une exploitation difficile et complexe afin d'aboutir à des indicateurs synthétiques qu'il faudra correctement coder.

Les ratios économiques et financiers construits sur les variables comptables sont largement disponibles et relativement homogènes grâce à l'existence d'un plan comptable. Ils reposent sur une théorie sous-jacente: l'analyse financière. La signification économique des

ratios et leur fiabilité statistique doivent faire l'objet d'une réflexion attentive. Elles conditionnent la qualité du résultat (Cf. Bardos (2001) chapitre 5 sur la préparation des données et la sélection des variables)

Leur préparation est délicate et longue. Sont examinés les valeurs aberrantes, extrêmes, ou encore « insolites » qui peuvent nécessiter une imputation de valeur, leur loi de probabilité, leur pouvoir discriminant, les corrélations, la linéarité ou non vis-à-vis du problème traité. Cette dernière caractéristique ne peut être connue que grâce à l'examen des distributions des ratios (Cf. schéma 2). Elle impose la cohérence entre les variables sélectionnées et le choix de la technique du modèle (linéaire ou non).

La présence des bilans pouvant être irrégulière, les taux de variation ne peuvent être calculés pour toutes les entreprises. Si l'on souhaite que le champ d'application du score soit le plus large possible, les variables explicatives ne devront porter que sur une seule année. Les taux de variation sont d'ailleurs statistiquement très fragiles et peu discriminants : telle variable de très faible niveau initial chez une entreprise donnée, y restera faible même si elle double en montant. Ainsi on rencontrera des cas d'entreprises qui pour un même taux de variation se trouveront en situation de fait très différente, l'une à fort montant initial et l'autre à très faible montant initial. Le taux de variation dans ce cas les traitera sur un pied d'égalité et brouillera l'analyse statistique, même s'il y a dans le score d'autres indicateurs qui les départagent mieux.

Une fois les bons ratios repérés le pouvoir discriminant est contrôlé par des tests sur les quantiles (Cf. Vessereau (1987) and M.G. Kendall, A. Stuart (1961)). Un test non paramétrique efficace repose sur le calcul d'intervalle de confiance sur les quantiles comme suit.

**Tableau 1 : Intervalles de confiance des quartiles au niveau 95% pour le ratio délai fournisseurs**

Délai fournisseurs	Nombre d'entreprises	1er quartile	médiane	3ème quartile
Entreprises non défaillantes	11 011	73,0 [71.9 ; 74.1]	102,4 [101.3 ; 103.3]	132,2 [130.9 ; 133.2]
Entreprises défaillantes				
3 ans avant	408	79,4 [73.1 ; 86.4]	109,4 [103.8 ; 117.2]	142,1 [137.5 ; 149.0]
2 ans avant	391	84,3 [74.5 ; 87.1]	109,4 [103.8 ; 117.2]	145,5 [137.5 ; 149.0]
1 an avant	177	84,7 [71.3 ; 90.7]	106,9 [101 ; 112.4]	137,8 [129.3 ; 153.0]

Source : Banque de France

Si la variable aléatoire  $X$  a une distribution non paramétrique, la probabilité que le  $p^{th}$  quantile  $X_p$  soit compris entre les observations de rang  $r$  et  $s$ ,  $x(r)$  et  $x(s)$ , est calculée grâce à une loi Beta complète:

$$P(x_{(r)} < X_p < x_{(s)}) = I_p(r, n - r + 1) - I_p(s, n - s + 1)$$

où  $0 < p < 1$  et  $n$  est le nombre d'observations et  $I_p(u, v) = \frac{1}{B(u, v)} \int_a^p t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt$ .

L'intervalle de confiance au niveau  $\alpha$  est  $[x(r); x(s)]$  tel que  $P(x_{(r)} < X_p < x_{(s)}) = 1 - \alpha$ . Quelques résultats sont présentés tableau 1.

Certains statisticiens utilisent le test de dominance stochastique (R. Davidson, Duclos Jean-Yves (1999), G. Barret, S.G. Donald (2002)).

La **sélection conjointe des ratios** est une autre étape primordiale. Les ratios organisés par thème (endettement, rentabilité, gestion du cycle d'exploitation...etc) permettent de définir des jeux alternatifs de variables, un score étant estimé sur chaque jeu. Un jeu pourra être constitué d'un ratio par thème afin de prendre en compte tous les aspects de la vie de l'entreprise. Les variables finalement retenues doivent être peu corrélées entre elles. En effet, dans les méthodes linéaires des corrélations élevées peuvent entraîner des signes des coefficients *a contrario* de ce que les statistiques descriptives ont révélé sur le sens de la discrimination pour chaque ratio<sup>1</sup>. De tels coefficients doivent être proscrits sous peine de graves erreurs de classement, très mal comprises par les utilisateurs futurs dans le diagnostic individuel (analystes financiers mais rarement statisticiens eux-mêmes). En conséquence les associations de ratios qui induisent de tels coefficients seront proscrites.

Au-delà de ces considérations, trois techniques de sélection, souvent employées, apportent une aide bien qu'elles nécessitent des hypothèses sur la distribution des variables : le  $\lambda$  de Wilks (sélection pas à pas), l'algorithme de Furnival et Wilson (sélection optimale d'un ensemble de variables discriminantes), la statistique de Wald (test de la nullité des coefficients dans le cas de la régression logistique).

## 2.2. Les modèles

L'analyse discriminant, parfois appelée classification supervisée, couvre un large domaine de techniques. Des comparaisons détaillées de ces techniques ont été menées dans plusieurs études: Hand (2006), Hristache, Delcroix, Patilée (2004), Baesens et alii (2003), Bardos (2001b), Bardos, Zhu (1998), Thiria et alii (1997), McLachlan (1992), Gnanadesikan and alii (1989). Des réflexions sur l'adéquation des modèles aux données économiques et financières d'entreprises peuvent être trouvées dans cette littérature. Les principaux modèles étudiés sont l'analyse discriminante de Fisher linéaire ou quadratique, la régression logistique, et quelques méthodes non paramétriques comme Disqual<sup>2</sup>, Arbres de décision (CART), Réseaux de Neurones, la méthode du Plus Proche Voisin, la méthode du Noyau, les Support Vector Machines.

Le but de la construction d'un score peut se limiter à vouloir identifier les clignotants du risque. Mais si on veut obtenir un outil opérationnel, sa construction est fondée sur une règle de décision. Celle-ci est généralement définie à partir de la désignation d'un seuil de

---

<sup>1</sup> Pour les méthodes conduisant à une fonction linéaire, seuls peuvent être retenus des ratios dont on peut dire « plus le risque de défaillance est élevé, plus cette variable est élevée » (par exemple le taux d'endettement) ou contraire « plus le risque est élevé, plus cette variable est faible » (par exemple le taux de marge).

<sup>2</sup> Cette méthode construit une fonction discriminante sur variables qualitatives. Elle a été créée par G. Saporta. Une récente application sur données de stratégie d'entreprises a été menée par L. Lelogeais (2003)

décision<sup>3</sup> nécessaire à l'évaluation des taux de bons classements. Ceux-ci permettent de choisir la meilleure fonction discriminante parmi plusieurs estimations.

Sur données comptables d'entreprises, les méthodes conduisant à une combinaison linéaire de ratios sont de loin les plus robustes temporellement et sont facilement interprétables. Sont ainsi fréquemment mises oeuvre les techniques de l'analyse discriminante linéaire de Fisher (ADL) et les modèles LOGIT ou PROBIT. à la Banque de France c'est la très classique analyse discriminante linéaire de Fisher (ADL) qui est utilisée. Ce modèle, cas particulier de la régression logistique, a été choisi du fait des aides à l'interprétation qu'il fournit (Cf. §2.2.1).

Toutefois dans le domaine bancaire, plutôt que de classer les entreprises en « bonnes » et « mauvaises », il sera beaucoup plus utile de disposer d'une mesure du risque pour chaque entreprise, c'est-à-dire sa probabilité de défaut à un horizon fixé (Cf. §3). C'est elle qui motivera la décision finale du décideur.

L'apport d'un score au décideur a pour avantage de fournir une synthèse de la situation de risque à partir du bilan et du compte de résultat. Toutefois ceci a des limites car la défaillance d'entreprise est un phénomène complexe dont les véritables variables causales sont peu disponibles et difficiles à identifier. Les fonctions scores utilisent donc des symptômes tels que des descripteurs de la situation de l'entreprise avant sa défaillance. Autant dire qu'il est souvent difficile de cerner avec précision le phénomène de défaillance par un score, à l'inverse de ce qui se produit sur d'autres champs d'application de l'analyse discriminante plus proches de la science physique, comme la reconnaissance des formes où le sur apprentissage est mieux maîtrisable, et des techniques telles que les réseaux de neurones s'appliquent avec succès. L'intérêt du score est de fournir une mesure du risque par la probabilité de défaillance à partir des variables mobilisées. Mais bien sûr il faut en mobiliser d'autres le plus possible, notamment celles de nature qualitative (pertinence de la politique commerciale, qualité du processus de production, clairvoyance des décisions d'investissement...).

## 2.2.1 L'analyse discriminant linéaire de Fisher (LDA)

Deux règles de décision peuvent être implémentées pour estimer une LDA.

On considère D le groupe des entreprises défaillantes, N le groupe des entreprises non défaillantes,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  le vecteur des p ratios de l'entreprise,  $\mu^N$  et  $\mu^D$  les moyennes de X sur chaque groupe, T la matrice de variance totale.

La première règle de décision répond à un critère géométrique de **comparaison de distance**:

$$d(X, \mu^D) \leq d(X, \mu^N) \Leftrightarrow \text{“e est alloué au groupe D”}$$

Utilisant la métrique de matrice  $T^{-1}$ , la règle devient:

$$f(X) \text{ est négative} \Leftrightarrow \text{“e est allouée au groupe D”}$$

où  $f(X) = (\mu^N - \mu^D)'T^{-1}(X - \frac{\mu^N + \mu^D}{2})$  est la fonction discriminante. Ce modèle ne demande pas d'hypothèses paramétriques, néanmoins la forme du nuage de données doit être assez régulière (Saporta (1990)).

<sup>3</sup> Il y a plusieurs seuils dans le cas des arbres ou des réseaux de neurones ; pour certains modèles comme le Plus Proche Voisin ou le Noyau ou les SVM on définit des régions de décision.

La seconde règle de décision est la **règle bayésienne qui minimise l'espérance du coût d'erreur de classement**. En cas de multinormalité et homoscedasticité des distributions de probabilité sur chacun des groupes à discriminer, cela conduit à la même fonction

$$\text{discriminante: } f(X) = (\mu^N - \mu^D)'T^{-1} \left( X - \frac{\mu^N + \mu^D}{2} \right) \quad (1)$$

Mais le seuil de décision devient  $\ln \frac{C_{2/1}\pi_1}{C_{1/2}\pi_2}$  et non plus 0 comme pour la règle géométrique.

$C_{i/j}$  est le coût de l'erreur qui consiste à allouer au groupe  $i$  une entreprise qui en réalité appartient au groupe  $j$ ,  $\pi_i$  est la probabilité *a priori* d'appartenir au groupe  $i$ .

L'un des avantages majeurs de la fonction score  $f$  est de fournir la **possibilité d'interprétation** grâce à la *contribution de chaque ratio à la valeur du score*.

En effet il est possible de réécrire le score comme suit:  $f(X) = \sum_j \alpha_j (X_j - p_j)$

où  $\alpha = (\mu^N - \mu^D)'T^{-1}$  est le  $k^{\text{ème}}$  coefficient de la fonction  $f$ ,  $p_j = (\mu_j^N + \mu_j^D)/2$  est la valeur pivot pour le  $j^{\text{ème}}$  ratio. L'expression  $\alpha_j (X_j - p_j)$  est **la contribution du ratio  $j$  au score  $f(X)$** .

Pour un score construit de façon que plus le score est élevé meilleure est la situation de l'entreprise, les contributions négatives désignent les points faible de l'entreprise, tandis que les contributions positives mettent en évidence les points forts.

La décomposition de la valeur du score en somme des contributions est extrêmement utile à l'analyste financier qui évalue l'entreprise (Cf. §5). Généralement, cet expert n'est pas statisticien. Il prend en compte beaucoup d'informations variées, la valeur du score est l'une d'entre elles. Les contributions l'aident à approfondir l'analyse de l'entreprise et lui signalent points faibles et points forts chaque année. Il a ainsi l'opportunité de suivre l'évolution de ces points.

## 2.2.2 La régression logistique (LOGIT)

La régression logistique estime la probabilité *a posteriori* sous les hypothèses suivantes:

$$p_i = P(Y_i = 1 / X_i) = \frac{1}{1 + e^{-\beta - \alpha X_i}} \quad (2)$$

$$1 - p_i = P(Y_i = 0 / X_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta + \alpha X_i}} \quad (3)$$

avec  $Y_i = 1$  si l'entreprise  $i \in N$  et  $Y_i = 0$  si  $i \in D$ .

La vraisemblance est  $\prod_{i=1}^n p_i^{Y_i} (1 - p_i)^{1 - Y_i}$  où  $n$  est la taille de l'échantillon,  $n = n_D + n_N$ .

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

$p_i$  est la probabilité *a posteriori* pour l'entreprise d'être saine.

En conséquence,  $\text{logit } p_i = \ln \frac{p_i}{1 - p_i} = \beta + \alpha X_i$ , et la règle de **décision** peut s'énoncer:

"L'entreprise  $i$  est classée saine"  $\Leftrightarrow p_i > 1 - p_i \Leftrightarrow \text{logit } p_i > 0 \Leftrightarrow \beta + \alpha X_i > 0$

Une autre règle de décision pourrait être fondée sur  $\beta + \alpha X_i > K$ . L'introduction d'un seuil  $K$  fournit l'opportunité d'accorder la décision aux objectifs de la banque, quantifiés par les coûts d'erreurs de classement (Hand (1981)).

### 2.2.3 Comparaison entre les modèles LDA et LOGIT

La comparaison très débattue entre les modèles LDA et LOGIT a donné lieu à plusieurs investigations – sur leurs propriétés théoriques [T. Amemiya, J. Powell (1983), A.W. Lo (1986), B. Efron (1975), Maddala (1999)], leur interprétabilité (le grand avantage de la LDA: contributions des variables à la valeur du score), la sensibilité au plan d'échantillonnage de LOGIT [G. Celeux, J.P. Nakache (1994)], l'estimation de la probabilité a posteriori (soit par la formule théorique, soit grâce au théorème de Bayes appliqué aux distributions empiriques). L'efficacité de ces deux modèles sur ratios économiques et financiers d'entreprise est généralement très proche.

Dans le cadre paramétrique, la régression logistique a un champ d'hypothèses plus large que celui de l'analyse discriminant linéaire de Fisher. De fait, la linéarité du logit correspond à la linéarité du quotient des log vraisemblances de chaque groupe:

$$\frac{L_D(x)}{L_N(x)} = \alpha x + \beta. \text{ C'est l'hypothèse fondamentale (H) de la régression logistique.}$$

Dans le cas de la multinormalité et l'homoscédasticité de la probabilité de la distribution des variables explicatives sur chaque groupe à discriminer, l'ADL peut être appliquée. Cela implique la linéarité du quotient des log vraisemblances. En conséquence, l'ADL apparaît comme un cas particulier du modèle LOGIT.

Si l'hypothèse (H) est vérifiée par les données, la probabilité *a posteriori* est calculée par les formules (2) et (3) qui sont donc les mêmes dans les deux modèles.

Cependant, il se trouve que cette hypothèse n'est généralement pas vérifiée. L'utilisation de la formule théorique est alors dangereuse, car elle n'est pas adaptée aux données. Quand l'échantillon est suffisamment grand il est de beaucoup préférable d'estimer la probabilité par le théorème de Bayes appliqué sur les distributions empiriques du score sur chaque groupe comme cela est développé dans le §3.

## 3. Probabilité de défaillance

La probabilité de défaut fournit une **mesure de l'intensité du risque**. Elle est beaucoup plus informative qu'un seuil de décision. Plusieurs questions cruciales conditionnent la qualité de l'outil :

a) **L'horizon de la prévision** doit être harmonisé avec la nature des données.

Les variables de bilans sont, par définition, en décalage de plusieurs mois avec le moment d'examen de l'entreprise et décrivent ce qui est advenu au cours de l'année écoulée ; elles sont donc mieux adaptées à une prévision à moyen terme qu'à court terme. Les bilans apportent incontestablement une information utile et robuste à condition de bien harmoniser évaluation et horizon de la prévision.

Avec un horizon d'un an, on pourrait penser être dans la position de créer un indicateur à court terme qu'il suffirait de ré-estimer suffisamment souvent pour suivre les conditions auxquelles sont

soumises les entreprises. Mais un tel indicateur suivrait alors de près la conjoncture. Or, une telle perspective est très difficile à mener à bien car la ré-estimation fréquente dans un environnement mouvant risque de conduire à des fonctions toujours en retard sur l'actualité.

Le choix est donc fait de travailler sur un horizon de moyen terme avec des variables quantitatives reposant sur les bilans et sur lesquelles s'exerce une méthode d'analyse financière dont la qualité est reconnue de longue date. Les structures de bilan étant liées à l'appartenance sectorielle des entreprises, des scores sont créés par grands secteurs (industrie, commerce de gros, commerce de détail, transport, construction, services aux entreprises).

b) Une estimation des **probabilités a posteriori de défaillance bien adaptée aux données empiriques** grâce au théorème de Bayes s'articule avec la détermination des classes de risque. La robustesse temporelle doit être assurée pour la probabilité moyenne par classe de risque. L'intervalle de confiance de cette moyenne indique la **précision** et fournit une mesure de ce qui peut se passer dans le pire des cas.

### **Encadré 1 : Utilisation du théorème de Bayes pour calculer la probabilité a posteriori**

La probabilité de défaillance d'une entreprise  $e$  dont la valeur du score appartient à l'intervalle  $r$  peut s'écrire comme suit:

$$P(e \in D / s \in r) = \frac{p(s \in r / e \in D)\pi_D}{p(s \in r)} = \frac{p_D \pi_D}{p_D \pi_D + p_N \pi_N} \quad (4)$$

Les probabilités conditionnelles à l'appartenance à un des groupes sont:

$$p_D = p(s \in r / e \in D) \text{ et } p_N = p(s \in r / e \in N)$$

La probabilité *a priori* de défaillance est  $\pi_D$  et  $\pi_N = 1 - \pi_D$  est la probabilité de non défaillance.

Connaissant les fonctions de densité du score sur chacun des groupes  $f_D$  et  $f_N$ , la formule (4) devient :

$$P(e \in D / s \in r) = \frac{\pi_D \int_{z \in r} f_D(z) dz}{\pi_D \int_{z \in r} f_D(z) dz + (1 - \pi_D) \int_{z \in r} f_N(z) dz}$$

La probabilité peut être estimée en utilisant le modèle théorique ou être calculée sur la base des distributions empiriques du score par le théorème de Bayes. Le choix entre ces deux méthodes dépend de la représentativité des fichiers d'étude et de la vérification par les données des hypothèses nécessaires à l'application des formules théoriques (Cf. Bardos, Zhu (1997), Bardos (2001), Kendaoui (2007)).

Du fait de l'importance et de la représentativité des fichiers de la Banque de France, les distributions empiriques peuvent être utilisées avec efficacité, car le résultat est plus proche de la réalité que ne serait celui issu de la formule théorique puisque les hypothèses sous-jacentes ne sont pas véritablement vérifiées. Comme on va le voir la méthode fondée sur les distributions empiriques permet de plus de contrôler la précision des probabilités estimées, et l'homogénéité des classes de risques.

L'algorithme de cette estimation est le suivant : la probabilité *a posteriori* de défaillance est calculée sur des petits intervalles de score chaque année; pour chaque petit intervalle la moyenne et l'écart type des résultats annuels sont calculés. Les intervalles où les moyennes sont proches sont regroupés dans le but de réduire l'écart type et l'amplitude de l'intervalle de confiance de la nouvelle moyenne calculée sur le nouvel intervalle issu du regroupement des petits intervalles. Ce processus est renouvelé jusqu'à obtenir des intervalles de score où l'écart type est suffisamment réduit pour éviter le chevauchement des intervalles de confiance de la probabilité moyenne. Le tableau 2 présente les résultats pour le score BDFI2 qui concerne l'industrie manufacturière. Dans la première colonne sont présentés les intervalles qui définissent les classes de risque finalement retenues. Les colonnes 1998 à 2001

fournissent les probabilités *a posteriori* par intervalle calculées sur chacun des fichiers annuels. Dans la colonne « moyenne » figure la probabilité de défaillance associée à chaque classe de risque calculée comme moyenne des résultats 1998 à 2001. Dans la dernière colonne la limite supérieure de l'intervalle de confiance représente la probabilité de défaillance dans le pire des cas au niveau de 99% (c'est-à-dire avec un risque de se tromper de 1%). Les intervalles de confiance liées aux classes de risque voisines ne se chevauchent pas ce qui montre le degré d'homogénéité au sein de chaque classe de risque.

**Tableau 2: Probabilité de défaillance a posteriori par intervalle de score**

À l' horizon de trois ans  
Industrie 1998-2001

Probabilité de défaillance *a priori* à l' horizon de trois ans : 7.66%

Intervalle de score	Classe de risque	Probabilité <i>a posteriori</i> calculée chaque année				moyenne $\mu$	Ecart-type $\sigma$	Intervalle de confiance	
		1998	1999	2000	2001			inf	sup
BDFI2 <-2.4	1	46.39	45.35	47.83	45.06	<b>46.16</b>	1.25	44.27	<b>48.04</b>
-2.4 ≤ BDFI2 <-1.8	2	31.98	34.62	33.43	35.54	<b>33.89</b>	1.54	31.58	<b>36.20</b>
-1.8 ≤ BDFI2 <-0.8	3	22.39	23.00	23.81	24.25	<b>23.36</b>	0.83	22.12	<b>24.60</b>
-0.8 ≤ BDFI2 <-0.3	4	16.08	17.64	18.56	19.49	<b>17.94</b>	1.45	15.76	<b>20.13</b>
-0.3 ≤ BDFI2 <0	5	10.89	11.19	13.04	15.89	<b>12.75</b>	2.30	9.31	<b>16.20</b>
0 ≤ BDFI2 <0,4	6	7.50	8.69	9.52	9.68	<b>8.85</b>	1.00	7.35	<b>10.34</b>
0,4 ≤ BDFI2 <1,2	7	3.46	3.67	4.45	4.54	<b>4.03</b>	0.55	3.21	<b>4.85</b>
1,2 ≤ BDFI2 <1,6	8	2.03	2.04	1.64	2.05	<b>1.94</b>	0.20	1.64	<b>2.25</b>
1,6 ≤ BDFI2 <2,4	9	0.84	0.68	0.80	0.91	<b>0.81</b>	0.10	0.67	<b>0.95</b>
2,4 ≤ BDFI2	10	0.27	0.28	0.34	0.37	<b>0.31</b>	0.05	0.24	<b>0.38</b>

Source : Banque de France – Fiben

mars 2005

c) La stabilité des entreprises dans les classes de risque est étudiée grâce aux **matrices de transition**. Cette étude participe au débat, vif actuellement, sur l'estimation « à travers le cycle » c'est-à-dire peu sensible à la conjoncture avec un horizon de précision à long terme, ou l'estimation « dans le contexte actuel » donc avec les critères du moment avec un horizon à court terme.

## 4. Contrôles et maintenance

### 4.1 Exemples de contrôles

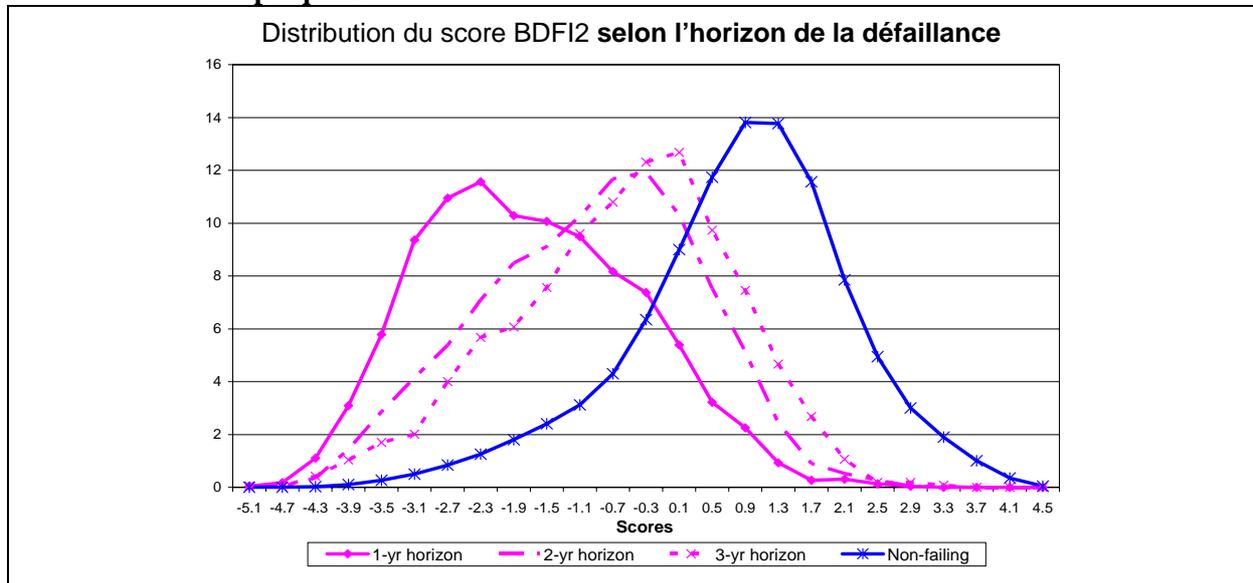
Une fois le score construit et validé sur des échantillons tests, sa qualité doit être contrôlée. Un des contrôles les plus nécessaires est d'examiner par sous population si le score a bien les propriétés attendues. On présente ici deux exemples de contrôle.

**Contrôle n°1** : Plus l'échéance de la défaillance se rapproche plus le score devient négatif. Le graphique 1 témoigne bien de cette caractéristique.

**Contrôle n°2** : Le score est discriminant quel que soit la taille de l'entreprise. Le graphique 2 montre que la fonction score des firmes défaillantes a la même distribution quelque soit la taille, de même pour les firmes non défaillantes. Cela montre que les ratios clignotants de la défaillance utilisés dans la fonction score BDFI2 sont pertinents quelque soit la taille et que leur importance relative mesurée par les coefficients de la fonction score est aussi la même quelle que soit la taille. Ce résultat est extrêmement important car il permet d'utiliser la même fonction pour différentes tailles d'entreprise. Par contre cela ne veut pas dire que la probabilité de défaillance *a posteriori* pour une

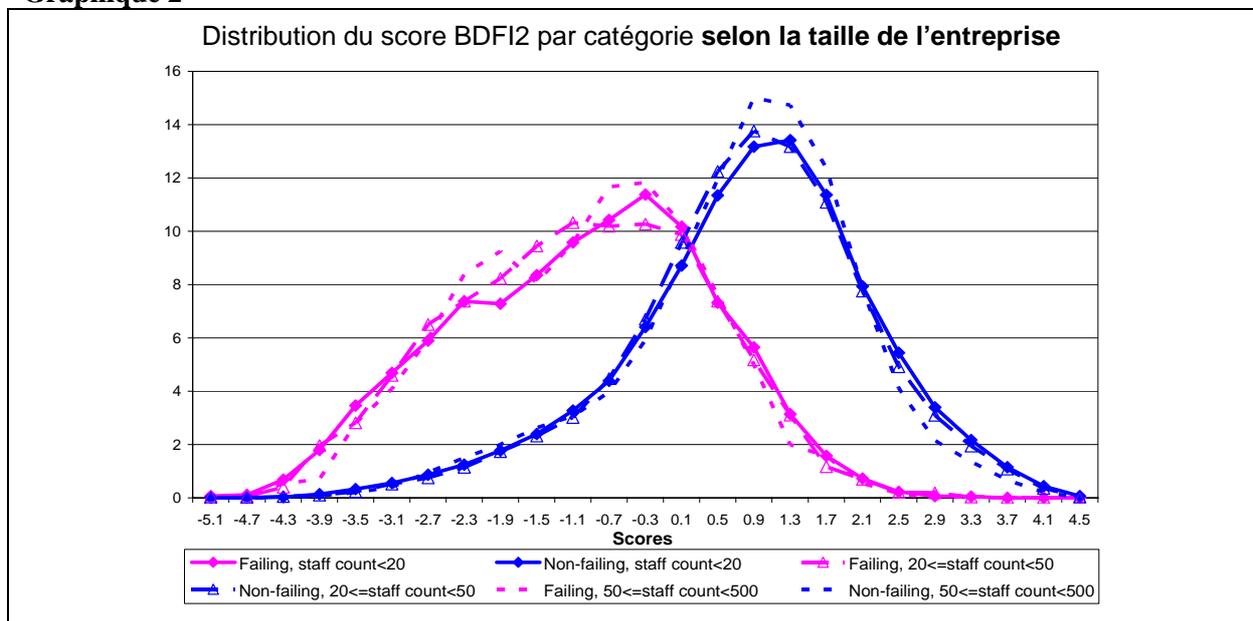
valeur de score donnée est la même quelque soit la taille. En effet la probabilité *a posteriori* dépend de la probabilité *a priori* qui elle diffère grandement selon la taille des entreprises. Ceci est du au fait que les grandes entreprises réagissent aux difficultés par divers moyens que n'ont pas souvent les PME (par exemple en se restructurant).

**Graphique 1**



Source : Banque de France – Fiben

**Graphique 2**



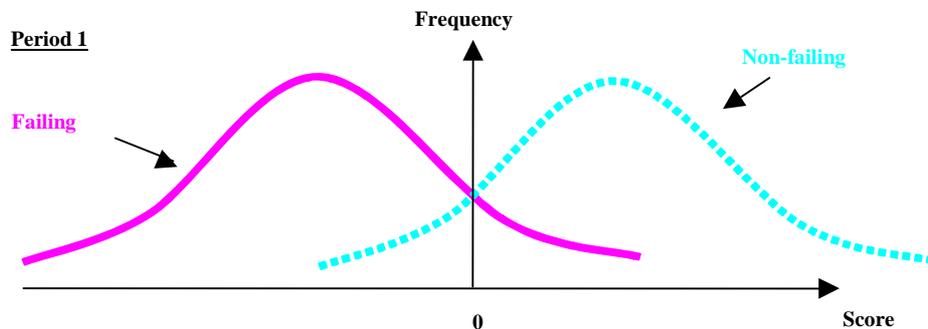
Source : Banque de France – Fiben

## 4.2 La maintenance

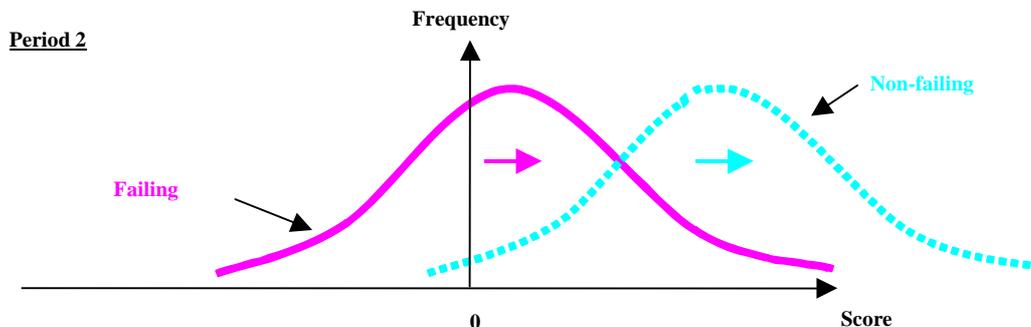
La maintenance correspond à une autre nécessité. Une fois le score mis en place dans les programmes et utilisé, il est de la responsabilité du fournisseur de score de vérifier qu'il met à disposition un score dont la qualité ne se détériore pas. Le tracé des distributions de score par catégorie et les pourcentages de bon classement permettent ce contrôle. Trois situations peuvent se produire :

- le score est stable et son pouvoir discriminant est inchangé. Le schéma 3 obtenu lors de la création du score reste toujours valable ;
- le score se modifie par translation (par exemple vers les valeurs positives comme l'indique le schéma 4) mais son pouvoir discriminant traduit par la séparation des courbes reste intact. Il convient alors de ré-estimer les probabilités de défaillance et les classes de risques ;
- le score n'est plus assez discriminant (schéma 5). Dans ce cas il faut ré-estimer le score lui-même bien avant d'en arriver à cette situation.

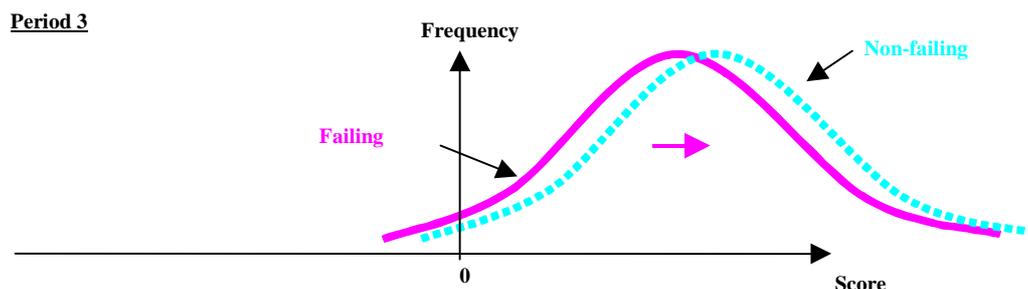
**Schéma 3: Distribution des scores par catégorie au moment où le score est estimé (periode 1)**



**Schéma 4: A la période 2 les distributions de scores par catégorie sont similaires mais traduites vers des valeurs plus positives**



**Schéma 5: A la période 3, plusieurs années après la construction, les distributions de score par catégorie se sont beaucoup rapprochées, le score n'est plus discriminant**



## 5. Utilisation

### 5.1 Diagnostic individuel

Le credit scoring constitue un premier pas dans l'analyse des cas individuels. A la Banque de France, un dispositif complet est mis à disposition des analystes financiers : le score est suivi sur plusieurs années, les aides à l'interprétation qui l'accompagnent permettent un usage opérationnel éclairé : probabilités de défaillance, contributions des ratios au score, mise en situation par rapport au secteur.

Par ailleurs, c'est un grand avantage pour le statisticien de pouvoir connaître les inadaptations de l'outil que lui signalent les experts utilisateurs. Ceux-ci indiquent sur les cas concrets les difficultés de mesure. Leurs remarques permettent d'améliorer la mesure statistique des concepts d'analyse financière et la compréhension des processus de défaillance. Ces renseignements pourront être mis en œuvre lors de révision de l'outil.

Un exemple de cas est présenté ci-dessous tel qu'il apparaît aux analystes financiers de la Banque de France, comme aux experts des banques ayant adhéré aux services de FIBEN qui se présentent sous forme de modules accessibles via un lien internet sécurisé. Il s'agit d'une entreprise du secteur Commerce de détail sur laquelle le score BDFCD est calculé.

#### Interprétation

Encadré « INDICATEURS DE DEFAILLANCE »

*De 2000 à 2002, l'entreprise a embauché, notamment en 2002, où la consolidation de sa situation a été importante. La probabilité de défaillance à 3 ans, associée au score, passe de 3,9 % à 1,6 %.*

*Parallèlement, l'entreprise a nettement amélioré sa situation puisque partant d'une classe risquée (probabilité de défaillance de 7,7 % > taux de défaillance de 2,7 %), elle est passée en classe neutre en 2001 et a atteint une classe favorable en 2002. Sans être encore dans les deux meilleures classes, l'entreprise a bien assaini sa position.*

Encadré « POSITIONNEMENT DE L'ENTREPRISE PAR RAPPORT AU SECTEUR »

*Comparativement aux firmes de son secteur d'activité, l'entreprise se situait en 2000 et 2001 dans le quart inférieur sans être toutefois parmi les 10 % les plus risquées. En 2002, son score se situe au-dessus du quart inférieur, sans atteindre toutefois la médiane (ce que confirme la dernière ligne du tableau :  $0,412 < 1,498$ ).*

Encadré « SCORE ET CONTRIBUTIONS DES RATIOS »

*En 2001, les contributions révèlent deux points faibles : des concours bancaires courants trop élevés et un délai fournisseurs trop long. Le premier point est à rapprocher du poids de l'endettement dont le niveau est conséquent, sans être excessif (contribution 5 proche de 0) : l'endettement comporte donc une part importante de court terme. La structure du haut bilan est d'ailleurs assez satisfaisante (contribution 6 positive). Toutefois, l'entreprise semble rechercher de la trésorerie avec des dettes fiscales et sociales conséquentes (contribution 1 proche de 0 bien inférieure à la médiane du secteur 0,314) et des délais fournisseurs un peu longs. L'importance des charges financières vis-à-vis de l'excédent brut global est à un niveau correct.*

*En 2002, toutes les contributions s'améliorent, sauf la première qui subit un très léger recul. Cette amélioration concerne surtout l'endettement financier qui s'allège grâce notamment à une réduction des crédits bancaires courants. Par ailleurs, la solvabilité à court terme se renforce (contribution 4).*

## Exemple d'une information sur le score accessible aux établissements de crédit via le Module 38 de FIBEN

<b>FIBEN</b>			
<b>CONFIDENTIEL</b>			20/10/2003
[Indicateurs de défaillance] [Positionnement] [Score et contributions]			
<b>Analyse du risque</b>			<b>38</b>
<b>Score Banque de France</b>			
<b>999 999 999</b>	<b>SOCIÉTÉ X</b>		
Adresse	1 rue du Paradis. CP VILLE		
Banque de France	SUCCURSALE Y		
Secteur d'activité	503A	COMMERCE DE GROS D'ÉQUIPEMENTS AUTOMOBILE au	31/12/2002
INDICATEURS DE DÉFAILLANCE			
Date de clôture	12/2000	12/2001	2/2002
Durée	12 mois	12 mois	12 mois
Effectif	101	109	138
Probabilité de défaillance à 3 ans (%)	7,7	3,9	1,6
La probabilité est à relativiser en cas d'effectifs supérieurs à 500			
Taux de défaillance sur 3 ans dans le commerce de détail et la réparation automobile 2,7 %			
POSITIONNEMENT DE L'ENTREPRISE PAR RAPPORT AU SECTEUR			
Secteur d'activité	503A		
Date de clôture	12/2000	12/2001	2/2002
Score supérieur au 9 <sup>e</sup> décile			
Score compris entre le 3 <sup>e</sup> quartile et le 9 <sup>e</sup> décile			
Score compris entre le 2 <sup>e</sup> et le 3 <sup>e</sup> quartile			
Score compris entre le 1 <sup>er</sup> et le 2 <sup>e</sup> quartile			X
Score compris entre le 1 <sup>er</sup> décile et le 1 <sup>er</sup> quartile	X	X	
Score inférieur au 1 <sup>er</sup> décile			
<i>Plus le score est élevé, meilleur est le positionnement de l'entreprise par rapport à son secteur</i>			
SCORE ET CONTRIBUTIONS DES RATIOS (comparaison aux médianes du secteur)			
	Contributions Individuelles		Secteur
Date de clôture	12/2001	12/2002	2002
1. Poids des dettes fiscales et sociales	-0,035	-0,060	0,314
2. Délai fournisseur	-0,171	-0,166	-0,128
3. Importance des CBC *	-0,534	-0,325	0,367
4. Importance des charges financières dans l'EBG **	0,346	0,488	0,672
5. Poids de l'endettement financier	0,038	0,137	0,256
6. Poids FRNG ***	0,323	0,338	0,437
<b>SCORE BDFCD</b>	<b>-0,033</b>	<b>0,412</b>	<b>1,498</b>

Informations couvertes par le secret bancaire conformément aux dispositions du Contrat FIBEN

\* CBC = concours bancaires courants

\*\*EBG = excédent brut global

\*\*\* FRNG = fonds de roulement net global

### Interprétation du score BDFCD grâce aux contributions des ratios

La **contribution 1** est liée au **poids des dettes fiscales et sociales** relativement à l'activité ; quand celle-ci s'élève, ces dettes s'allègent.

La **contribution 2** est liée à l'**importance des délais des dettes fournisseurs** ; quand celle-ci s'élève, les délais des dettes fournisseurs raccourcissent.

La **contribution 3** est liée à l'**importance des concours bancaires courants** comparativement au niveau de l'activité ; quand celle-ci s'élève, la part des concours bancaires diminue.

La **contribution 4** est liée à l'**importance des charges financière vis-à-vis de l'excédent brut global** ; quand celle-ci s'élève, l'entreprise renforce sa solvabilité à court terme.

La **contribution 5** est liée au **poids de l'endettement financier** (incluant le crédit-bail et les dettes groupe et associés) ; quand cette contribution augmente, l'importance de la dette diminue.

La **contribution 6** est liée à la **structure du bilan** ; quand elle s'élève, la structure s'améliore

## 5.2 Évaluation du risque sur une population

Les tableaux de bord sur une clientèle sont recommandés par le comité de Bâle.

La Banque de France en a élaborés quelques exemples pour assurer le suivi d'une population: méthode IRISK (Bardos M., Plihon D. (1999); impact économique de la défaillance (Nahmias L. (2005)). On présente ci-dessous quelques uns des indicateurs IRISK pour les PME du secteur Industrie.

Un score probabilisé offre une mesure individualisée du risque de crédit. Disposant de cette information sur une population d'entreprises, des analyses statistiques en termes de suivi d'un portefeuille d'engagement peuvent être menées.

La méthode IRISK, développée par la Banque de France, propose des tableaux de bord mettant en jeu plusieurs indicateurs de risque indépendants. Ils permettent une caractérisation du type de risque dont relève un portefeuille et son suivi sur plusieurs années.

Cette méthode est mise en œuvre dans les études sectorielles de l'Observatoire des entreprises. Elle est de plus en plus développée et une implémentation annuelle complète sur tous les grands secteurs ayant un score est systématiquement réalisée.

À titre d'exemple, un des tableaux de bord d'IRISK est présenté ci-dessous sur les PME de l'industrie. De tels tableaux peuvent être constitués sur des ensembles répondant à des critères souhaités (taille, secteur, liste d'entreprises constituant une clientèle).

**Tableau 3**

<b>INDICATEURS IRISK</b>							
<b>PME : entreprises industrielles dont le chiffre d'affaires est inférieur à 50 000 K€</b>							
Industrie	% des entrep. dans les classes risquées (1)	% des effectifs dans les classes risquées (2)	% du CA dans les classes risquées (3)	Part risquée moyenne (%) de l'endettement bancaire (4)	Part risquée max. (%) de l'endettement bancaire (5)	Effectifs salariés moyens (6)	Part de l'endet. banc. (%) des 1% les plus endettées (7)
1998	18,95	19,28	16,05	8,89	10,08	39	19,85
1999	17,48	18,87	15,45	8,55	9,71	39	19,80
2000	16,07	18,68	15,33	8,39	9,52	39	19,87
2001	15,77	19,26	16,03	8,48	9,62	39	19,49
2002	16,96	19,69	16,13	8,77	9,90	39	19,62
2003	17,57	20,20	16,39	8,38	9,48	38	19,46

Source et réalisation : Banque de France – Observatoire des entreprises

Mise à jour : août 2005 <sup>4</sup>

Légende :

- **la proportion de firmes dans les classes les plus risquées**, où les classes risquées prises en compte dans ce tableau sont les classes 1, 2, 3, 4 (5 exclue) associées au score BDFI2 ;
- **la part des effectifs et du chiffre d'affaires des firmes des classes risquées** ; ces pourcentages comparés au pourcentage de firmes risquées du secteur donnent des éléments sur la taille des entreprises risquées ;
- **la part risquée moyenne de l'endettement bancaire** dans le secteur à l'horizon de trois ans :  $100 \times \sum p_i E_i / \sum E_i$ , où pour chaque entreprise  $i$ ,  $p_i$  désigne sa probabilité de défaillance au cours des trois prochaines années, et  $E_i$  le montant de son encours de crédit bancaire ;

<sup>4</sup> En août 2005 un nombre important de bilans clôturés au 31/12/2004 sont d'ores et déjà collectés et traités au plan individuel par les implantations de la Banque de France. Cependant, ce n'est généralement qu'en automne que les traitements de centralisation statistique sont totalement finalisés. C'est pourquoi le tableau 3 ne présente pas de données 2004.

- la **part maximale de l'endettement bancaire** dans le secteur à l'horizon de trois ans :  $100x \sum pm_i E_i / \sum E_i$ , où  $pm_i$  est la probabilité maximale qui représente le risque dans le pire des cas (elle est fournie par la borne supérieure de l'intervalle de confiance de la probabilité moyenne, cf. tableau 2 : « industrie – score BDFI2 ») ;
- les effectifs salariés moyens donne une première mesure de la concentration du secteur ;
- l'indicateur de concentration : la part de l'endettement bancaire du secteur supporté par 1 % des entreprises les plus endettées.

Le tableau 3 fait apparaître dans le secteur de l'industrie une diminution du risque de crédit des PME en début de période, comme le montrent la baisse du pourcentage d'entreprises risquées jusqu'en 2001 (colonne 1) et la réduction de la part risquée de l'endettement bancaire jusqu'en 2000 (colonnes 4 et 5).

Après ces dates, chacun de ces indicateurs augmente.

Toutefois, si en 2002, la part risquée de l'endettement bancaire atteignait un maximum anticipant la montée des risques l'année suivante (notamment avec la multiplication des procédures collectives), cette part se restreint en 2003, annonçant l'amélioration de la situation des entreprises en 2004. Est ainsi mis en valeur le caractère prédictif de ces indicateurs.

Concernant les firmes dans les classes risquées, l'importance de leurs effectifs (colonne 2), mais la relative faiblesse de leur chiffre d'affaires (colonne 3) semblent indiquer que les entreprises sont de taille assez importante en termes d'effectifs salariés.

Enfin, la concentration de l'endettement est relativement stable (colonne 7).

## 6. Recherches sur le risque de crédit utilisant un score

Les scores construits à la Banque de France couvrent un vaste champ de secteurs d'activité. Implémentés sur un ensemble représentatif des firmes dont le chiffre d'affaires excède 0,75 millions d'euros, ils permettent d'examiner de nombreuses questions liées au risque de crédit.

La **contagion du risque** peut être étudiée via le fichier des impayés sur effets de commerce de la Banque de France (Stili D. (2003, 2005), Bardos M., Stili D. (2006)).

La **corrélation du risque** entre entreprises a un impact important sur l'évaluation des pertes potentielles (S. Foulcher, C. Gouriéroux, A. Tiomo (2004) ).

Le lien entre **risque et conjoncture** s'il peut être explicité permettrait de mieux anticiper le risque de défauts futurs au regard de variables macro économique ou de facteurs spécifiques (E. Bataille, C. Bruneau, F. Michaud (2005)).

Les **trajectoires des entreprises** fournissent l'étude dynamique du risque (M. Bardos (1998) ).

Les **matrices de transitions** entre classes de risque permettent d'étudier le caractère Markovien ou non des processus de défaillance.

La **concentration de l'endettement** peut engendrer un risque majeur pour les banques (Bardos M., Plihon D. (1999) ).

Par ailleurs, la réflexion sur les modèles de risque de crédit nécessite des comparaisons entre systèmes de notation des entreprises. Des travaux statistiques sur la simulation des **distributions des taux de défaut par note** permettent d'établir des échelles de référence dans ces comparaisons (S. Blockwitz, S. Hohl (2001) , A. Tiomo (2002)).

Ces exemples montrent l'intérêt d'un score qui mesure la probabilité de défaillance non seulement pour les décideurs, et les pouvoirs publics, mais aussi pour les chercheurs en économie. De nombreuses questions liées au risque de crédit et à la stabilité financière peuvent ainsi être examinées.

## Bibliographie

- E. I. ALTMAN, A. SAUNDERS (1998) : Credit Risk Measurement: developments over the last 20 years, *Journal of Banking and Finance* 21, p. 1721-1742, North Holland ;
- T. AMEMIYA, J. POWELL (1983): A comparison of Logit model and normal discriminant analysis when the independent variables are binary, in *Karlin, Amemiya, Goodman, edition Studies in econometrics, time series and multivariate statistics*, Academic Press New York ;
- T.W. ANDERSON (1984) : An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, Chapter 6 "Classification of observations" ;
- BAESENS, T VAN GESTEL, S VIAENE, M STEPANOVA, J SUYKENS, J VANTHIENEN (2003) : Benchmarking state-of-art classification algorithms for credit scoring, *Journal of the Operational Research Society* .
- M.BARDOS (2007) : What is at Stake when Estimating the Probability of Default using a Scoring Function ?, *Credit Risk Assessment Revisited: Methodological Issues and Practical Implications*, European Committee of Central Balance Sheet data Offices Working Group on Risk Assessment, p. 95-118;
- M.BARDOS (2007) : What is at Stake in the Construction and the Use of Credit Scores ?, *Computational Economics* n°29, p. 159-172;
- M.BARDOS (2005) : Les scores de la Banque de France : leur développement, leurs applications, leur maintenance, *Bulletin de la Banque de France* n°144, décembre ;  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu144\\_6.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu144_6.pdf)
- M. BARDOS, S. FOULCHER, E. BATAILLE (2004) : " *Les scores de la Banque de France: méthode, résultats, applications* ", Banque de France, décembre;  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/catalogue/dom\\_2i.htm](http://www.banque-france.fr/fr/publications/catalogue/dom_2i.htm)
- M. BARDOS (2001) : *Analyse discriminante: application au risque et scoring financier*, Dunod
- M. BARDOS (2001) : Développements récents de la méthode des scores de la Banque de France, *Bulletin de la Banque de France* n°90, juin ; [http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etud90\\_4.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etud90_4.pdf)
- M. BARDOS, D. PLIHON (1999) : Détection des secteurs risqués – La méthode IRISK, *Bulletin de la banque de France* n°69, septembre 1999.  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/telnomot/bulletin/etud69\\_2.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telnomot/bulletin/etud69_2.pdf)

- M. BARDOS (1998) : “ Detecting the risk of company failure ”, *The Journal of Banking and Finance* n° 22, 1998 ;
- M. BARDOS (1998) : *Le score BDFI : du diagnostic individuel à l'analyse de portefeuille*, Les études de l'Observatoire des entreprises, Banque de France.  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/catalogue/dom\\_2j.htm](http://www.banque-france.fr/fr/publications/catalogue/dom_2j.htm)
- M. BARDOS, D. STILI (2006) : La contagion du risque via les impayés sur effets de commerce, bulletin de la Banque de France n°  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu148\\_3.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu148_3.pdf)
- M. BARDOS, W.H.ZHU (1997): Comparaison entre l'analyse discriminante linéaire et les réseaux de neurones, application à la détection des défaillances d'entreprises, *Revue de Statistique Appliquée*, 1997, pages 77-100 ;
- G. BARRET, S.G. DONALD : Consistent Tests for Stochastic Dominance, working paper march 2002.
- E. BATAILLE, C. BRUNEAU, F. MICHAUD (2007) : Use of the principal components method to follow the link between business cycle and risk of companies' failure, *Computational Economics* n°29 (2007).
- S. BLOCKWITZ, S. HOHL (2001) : Reconciling Ratings, *Risk Magazine*, june 2001
- L. BREIMAN, J.H. FREIDMAN, R.A. OHLSON, C.J. STONE (1984): *Classification and regression trees*, Edition Wadsworth International Group, Californie ;
- G. CELEUX, J.P. NAKACHE (1994) : *Analyse discriminante sur variables qualitatives*, Polytechnica ;
- R. DAVIDSON, J.Y. DUCLOS : Statistical Inference for Stochastic Dominance and for the Measurement of Poverty and Inequality, working paper november 1999
- B. EFRON (1975) : The efficiency of logistic regression compared to normal discriminant analysis, *Journal American Statistical Society* n°70, pp.892-898;
- B. EFRON, R.J. TIBSHIRANI (1993) : *An introduction to the Bootstrap*, ed. Chapman & Hall;
- S. FOULCHER, C. GOURIEROUX, A. TIOMO (2004) : La corrélation de migration : méthode d'estimation et application aux historiques de notation des entreprises françaises, Etudes et Recherches de l'Observatoire des entreprises, Banque de France  
<http://www.banque-france.fr/fr/publications/observatoire/9.htm>
- S. FOULCHER, C. GOURIEROUX, A. TIOMO (2003) : *La structure par terme des taux de défauts et rating*, Etudes et Recherches de l'Observatoire des entreprises, Banque de France  
<http://www.banque-france.fr/fr/publications/observatoire/1.htm>
- R. GNANADESIKAN and panel of authors (1989) : Discriminant Analysis and Clustering, *Statistical Science*, vol. 4, N° 1, p.34-69 ;
- C. GOURIEROUX (1989) : *Économétrie des variables qualitatives*, Économica ;
- D.J. HAND (1981): *Discrimination and classification*, Wiley series in probability and mathematical statistics ;
- HRISTACHE, DELCROIX, PATILEA (2004) on semi parametric m-estimation. *Journal of Statistic Planning and Inference*, in press 2004.
- M.G. KENDALL, A. STUART (1961) : *The advanced Theory of Statistics*, chapter 32, « Some Use of Order Statistics, Distribution free, Confidence Intervals for Quantiles », Griffin Londres
- L.KENDAOUI (2005): *Risque et conjoncture*, Mémoire de stage à la Banque de France

- L. KENDAOUI (2007): , *Actes des journées de ASMDA2007*
- G.J. Mc LACHLAN (1992) : *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*, Wiley, New-York ;
- L. LEBART, A. MORINEAU, M. PIRON (1998) : *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle*, Dunod ;
- L. LELOGEAS (2003) : Un score sur variables qualitatives pour la détection précoce des défaillances d'entreprises, *Bulletin de la Banque de France* n°114, juin 2003.  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu114\\_1.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu114_1.pdf)
- A.W. LO (1986) : Logit versus discriminant analysis, *Journal of Econometrics* n°31, North Holland, 1986, pp. 151-178 .
- G.S. MADDALA (1999): *Limited-dependent and qualitative variables in econometrics*, Cambridge University Press;
- F. MICHAUD (2004) : mémoire de stage à l'Observatoire des entreprises de la Banque de France.
- L. NAHMIAS (2005): Impact économique des défaillances d'entreprises, *Bulletin de la Banque de France* n°137, mai; [http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu137\\_3.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu137_3.pdf)
- C. R. RAO (1973): *Linear Statistical Inference and Its Applications*, Wiley
- G. SAPORTA (1990) : *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip
- D. STILI (2003) : *Les incidents de paiement sur effets de commerce*, Etudes et Recherches de l'Observatoire des entreprises, Banque de France  
[http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/observatoire/incidents\\_paiement\\_impossibilite.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/observatoire/incidents_paiement_impossibilite.pdf)
- D. STILI (2005) : Détection précoce des défaillances d'entreprises et contagion du risque, Thèse de doctorat, Université Paris I.
- S. THIRIA, Y. LECHEVALLIER, O. GASCUEL, S. CANU (1997) : *Statistique et méthodes neuronales*, Dunod ;
- A. TIOMO (2002) : *Risque de crédit et variabilité des taux de défaut : une analyse empirique par simulation*, Etudes et Recherches de l'Observatoire des entreprises, Banque de France  
<http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/observatoire/risque.pdf>
- VESSEREAU (1987) : « Une propriété peu connue : l'intervalle de confiance de la médiane » *Revue de Statistique Appliquée* XXXV (1), pp. 5-8
- WGRA : Credit Risk Assessment Revisited : Methodological Issues and Practical Implications (2007)  
<http://www.banque-france.fr/fr/eurosys/bilans/wgra.htm>