

ASSIMAGE

Etude de techniques d'assimilations de données image
dans des modèles de simulation de fluides géophysiques

Etienne Huot

Mars 2004

Table des matières

1	Contexte d'étude	5
1.1	Préambule	5
1.2	Assimage	5
1.3	Assimilation de données image	8
1.4	Traitement d'image pour le calcul de trajectoires	9
1.5	Présentation du document	10
2	Assimilation de données	11
2.1	Motivations	11
2.2	Définitions et notations	12
2.3	Assimilation variationnelle	13
2.3.1	Fonctionnelle de coût	13
2.3.2	3D-var	13
2.3.3	4D-var	15
2.4	Euler <i>vs.</i> Lagrange	17
3	Océanographie	19
3.1	Modèles numériques d'océan	19
3.2	Notions de mécanique des fluides	20
3.2.1	Conservation de la masse	20
3.2.2	Conservation d'une quantité scalaire	21
3.2.3	Conservation de la quantité de mouvement	22
3.2.4	Equation de Navier-Stokes	22
3.3	Equations primitives des écoulements océaniques	24
3.3.1	Equations de départ	24
3.3.2	Conditions aux limites	25
3.3.3	Approximation de Boussinesq	25
3.3.4	Approximation hydrostatique	25
3.3.5	Equations primitives	26
3.3.6	Equations quasi-géostrophiques	26

4	Traitement d'image	29
4.1	Objectifs	29
4.2	Approche champ dense	29
4.2.1	Hypothèses de conservation	30
4.2.2	Régularisations	33
4.2.3	Implémentations	35
4.3	Trajectographie	38
5	Conclusion provisoire	41

Chapitre 1

Contexte d'étude

1.1 Préambule

La prévision de phénomènes naturels devrait pouvoir s'améliorer de manière significative par l'utilisation de toute l'information disponible. Dans le contexte de la simulation de fluides géophysiques, l'assimilation de données vise à rassembler les informations provenant des modèles et les observations directes ou à distance des variables d'état de ces modèles ou de données fonctions de ces variables d'état. Une source d'information particulièrement intéressante concerne les acquisitions images, notamment par le biais de l'imagerie satellitaire. Jusqu'à présent, les propriétés intrinsèques de ces images étaient utilisées de façon plus qualitative que quantitative. Le but de l'**Action Concertée Incitative** (ACI) ASSIMAGE est la définition et l'étude de méthodes permettant de **coupler** les images avec les modèles numériques et les observations directes des variables d'état. En ce qui concerne les applications étudiées, presque toutes les composantes du cycle de l'eau sont représentées : océan, atmosphère, glace, neige, *etc.*

ASSIMAGE a officiellement débuté le 1er novembre 2003 et dans l'attente de notification budgétaire, la réunion de lancement a eu lieu le 19 janvier 2004. Ce document est un reflet partiel des travaux réalisés jusqu'à la date d'aujourd'hui, le 20 juillet 2004. Il présente un état de l'art des différents aspects scientifiques abordés dans cette ACI. L'ensemble des documents disponibles est accessible sur le site:

<http://www-rocq.inria.fr/clime/assimage/>.

1.2 Assimage

L'ACI Assimage est fondée sur le triple constat suivant:

- La simulation géophysique est en plein essor dans de nombreux domaines (par exemple, météorologie, chimie atmosphérique, océanographie, hydrologie, *etc.*). Les phénomènes simulés sont régis par des modèles physiques relativement bien connus, et les moyens informatiques actuels font qu'on peut les utiliser à fin de simulation, réanalyse, prévision,

en pratique un système d'Equations aux Dérivées Partielles, pouvant avoir plusieurs millions de degrés de liberté, doit être résolu. Cette résolution nécessite la connaissance d'une information très volumineuse (conditions initiales, conditions aux limites, paramètres physiques), et partiellement connue. Le but des techniques d'assimilation de données est de combiner de manière optimale les différentes sources d'information mathématiques (lois d'évolution), physiques (mesures in situ, télédétection) ou statistiques (fréquences d'occurrence) afin de contraindre la simulation à être cohérente avec les différentes observations. Ces techniques ont connu un grand développement sur les deux dernières décennies, et sont dorénavant utilisées de manière opérationnelle en météorologie, sur le point de l'être en océanographie, et à l'étude dans d'autres domaines. Les développements les plus récents concernent les méthodes variationnelles du second ordre (études de sensibilité, positionnement optimal de capteurs), et les extensions potentielles du filtrage particulaire aux modèles fortement non linéaires.

- Une source de données, particulièrement importante, est quasiment ignorée dans ce contexte: la donnée image, dont le volume disponible, déjà très important, augmente régulièrement en raison du développement des capteurs spatiaux d'observation de la Terre. D'autre part, l'usage de ces données est appelé à croître, en raison notamment des programmes européens INSPIRE (*Infrastructure for Spatial Information in Europe*) et GMES¹ (*Global Monitoring for Environment and Security*). On dispose ainsi d'une source d'information historique (acquisition opérationnelle depuis plusieurs décennies), de richesse spatiale et spectrale en constante amélioration. Les techniques d'extraction de l'information à partir de la donnée image reposent sur des méthodologies spécifiques à la nature de ces données: le traitement d'image.
- Ces deux communautés, celle de la simulation géophysique d'une part et celle de l'analyse d'image d'autre part, s'ignorent très largement, bien que les techniques de l'une puissent être avantageusement utilisées par l'autre, et réciproquement. Ainsi, de nombreuses structures visibles sur les données images, telles que: les panaches de rivières, les zones de turbulence, les fronts en océanographie, ne sont pas utilisés par les modèles. Les séquences d'images permettent le suivi de traceurs, caractéristiques de l'écoulement, ouvrant ainsi la voie à l'assimilation de données dans des modèles lagrangiens. S'il existe quelques exceptions (comme l'assimilation de mesures de vents, calculées à partir des satellites géostationnaires, dans les modèles de simulation météorologique), on peut constater en règle générale que la donnée image n'est pas exploitée en simulation géophysique, ou alors de manière qualitative, ou encore manuelle (c'est-à-dire, sans se fier à une interprétation automatique de l'image). Ce constat est dû à des raisons multiples: en règle générale, la donnée image "brute", c'est-à-dire la luminance, n'est pas une fonction simple des variables d'état du modèle; le monde de l'image est fondamentalement bidimensionnel, c'est une projection plus ou moins complexe du monde tridimensionnel du modèle; enfin, l'information extraite des images est plus complexe

1. <http://www.gmes.info>

qu'une simple observation, ce peut être par exemple une structure géométrique, et l'on manque de techniques adaptées pour réaliser l'assimilation. Réciproquement, l'analyse d'image, particulièrement dans le cas de séquences d'images, n'exploite que peu les modèles physiques régissant les phénomènes observés.

Dans ce contexte particulier, ASSIMAGE vise à développer des techniques d'assimilation de la donnée image dans les modèles de simulation géophysique, c'est-à-dire: comment utiliser les images, éventuellement en conjonction avec d'autres sources plus classiques d'observation, pour reconstituer l'état d'un système dont les lois d'évolution sont connues.

On peut distinguer deux axes de recherche orthogonaux dans ASSIMAGE :

- *horizontal*: on cherche à étudier de manière **générique** les problèmes scientifiques de l'assimilation de données image (développement de fonctions d'observation spécifiques, choix de métriques adaptées à l'assimilation de diverses structures géométriques), ainsi que les problèmes liés à la prise en compte des lois physiques d'évolution par les méthodes d'analyse d'image (par exemple, dans le cadre de l'estimation du mouvement et de la vorticité) ;
- *vertical*: on cherche à utiliser les méthodologies étudiées sur des applications particulières, caractérisées par la présence des partenaires impliqués dans l'ACI et par la disponibilité complète des données image nécessaires. Parmi les applications retenues dans le texte fondateur d'ASSIMAGE, on trouve : inondations, calottes polaires et glaciers, avalanches et coulées de boues, **océanographie**, nappes tourbillonnaires.

C'est l'application océanographique qui a semblé être prioritaire pour débiter les travaux d'ASSIMAGE. Plus particulièrement, c'est l'assimilation de données lagrangiennes dans ce contexte qu'il paraît important d'étudier. Les principales raisons sont les suivantes :

1. l'assimilation de données dans des modèles lagrangiens présente des aspects théoriques intéressants, en effet les variables de contrôle et les variables d'état du modèle étant eulériennes, la comparaison avec les observations lagrangiennes nécessite la construction d'un opérateur permettant la transformation Euler vers Lagrange ;
2. les océans étant constamment observés, de nombreuses données océanographiques sont disponibles, il existe des séquences d'images satellitaires de divers types (température de surface, couleur de l'océan, altimétrie) et d'autre part des données lagrangiennes sous la forme de trajectoires de traceurs telles que des bouées et autres balises Argos; de plus les modèles de circulation océanographiques étant largement utilisés dans les contextes d'assimilation de données, les modèles adjoints, nécessaires lors de l'utilisation du formalisme de contrôle optimal, sont disponibles;
3. le traitement d'image propose plusieurs approches pour calculer des trajectoires à partir de séquences d'images; en particulier dans le cadre d'écoulement fluide, il est possible de développer des opérateurs qui prennent en compte les lois physique d'évolution.

1.3 Assimilation de données image

L'assimilation de données vise à combiner de manière optimale les sources d'information disponibles pour reconstituer l'état d'un système: information mathématique (lois décrivant l'évolution de la variable d'état), physique (observation *in situ* ou à distance) et statistique (fréquences d'occurrence). La prévision de l'évolution de ce système requiert de reconstituer l'état de celui-ci de façon aussi précise que possible à un instant donné. Cette technique est maintenant opérationnelle dans les principaux services météorologiques mondiaux, elle le deviendra avec les projets d'océanographie opérationnels tels MERCATOR². De façon générale, ce problème se pose pour tous les fluides géophysiques (eaux continentales et océaniques, air et ses composants, eau atmosphérique) et de nombreuses études sont en cours de développement dans le monde entier pour adapter ces méthodes à des fluides particulier. Les écoulements géophysiques ont certaines similarités: ce sont des phénomènes pour lesquels la dynamique joue un rôle important et chaque épisode est unique bien que des propriétés statistiques existent, et puissent être déterminées.

Les données image sont très peu utilisées dans ce contexte. Au mieux, les images sont utilisées dans les modèles géophysiques de manière partielle: seule l'information radiométrique ponctuelle est utilisée. Il existe pourtant des informations supplémentaires et intrinsèques à la nature des images: structures cohérentes spatialement et champs de déplacement pouvant être obtenus à partir de séquences, qui semblent essentielles, mais qui ne sont toutefois pas utilisés par les modèles.

Les méthodes variationnelles d'assimilation sont fondées sur les méthodes de contrôle optimal. On utilise les degrés de liberté du modèle: conditions initiales, paramètres pour minimiser l'écart entre les prévisions et les observation, et les observations elles-mêmes. En écrivant la condition d'optimalité (équation d'Euler-Lagrange), on met en évidence un système d'optimalité qui contient toute l'information disponible. Dès lors, on peut considérer ce système comme un modèle généralisé. Ce concept peut s'appliquer à tous les fluides géophysiques.

Dans le cas de l'utilisation de données image, on cherche à assimiler l'observation de variables qui ne sont pas directement des variables d'état du modèle. La transformation des variables du modèle en éléments quantifiables dans l'image nécessite l'application de plusieurs lois physiques. La projection de la variable d'état du modèle dans le domaine image doit être explicitée ainsi que la transformation adjointe. De plus, l'assimilation de données a été, jusqu'ici, utilisée principalement avec des modèles eulériens. L'extension du formalisme à des modèles lagrangiens nécessite la construction d'un opérateur permettant la transformation Euler vers Lagrange ainsi que la transposition de l'opérateur linéarisé.

Au niveau image, plusieurs cas de figures sont possibles: le plus simple est l'existence de

2. <http://www.mercator-ocean.fr>

traceurs lagrangiens naturels conservant certaines propriétés dans l'évolution temporelle ; le cas le plus complexe est celui des éléments de l'écoulement (vortex, front, *etc*) qui peuvent être pris comme des traceurs.

1.4 Traitement d'image pour le calcul de trajectoires

La définition d'opérateurs d'observation *image* permettant, à parti d'images, d'extraire une information relevante pour les modèles de simulation géophysique et pouvant être assimilée dans les modèles est l'un des objectifs de l'ACI. On ne cherche pas ici une interprétation physique de la luminance de chaque pixel de l'image (auquel cas on peut se diriger vers des techniques d'assimilation originelles). Mais, on cherche à extraire de l'information structurée (spatialement ou temporellement) : ici des trajectoires.

Il existe plusieurs approches du traitement d'image pour calculer les trajectoires. On peut les classer en deux catégories :

- intégration d'un champ dense de mouvement,
- identification de points ou de structures caractéristiques et suivi au cours du temps.

Les **approches champs denses** sont basées sur l'estimation de champs de vitesses instantanés ou de trajectoires complètes. Contrairement aux mesures physiques traditionnelle, issues de capteurs *in situ* dédiés et en général éparées, l'image offre la possibilité de reconstruire des informations de mouvement denses pour le phénomène observé. Les techniques standards d'analyse du mouvement sont issues de la vision par ordinateur. Elles s'appuient sur des hypothèses de conservation de la luminance et de mouvement rigide qui sont valables sous certaines conditions, et donnent de bons résultats dans le cas de scènes contrastées. Non seulement les images d'écoulements fluides sont peu contrastées mais les hypothèses de conservation utilisées correspondent rarement à la physique de ce genre de phénomène. De plus, cette difficulté est accrue par la perte de dimension due à la projection d'un mouvement tridimensionnel dans le domaine image. Développer une méthode prenant réellement en compte les lois dynamiques de la mécanique des fluides est nécessaire pour estimer les vitesses, et par conséquent les trajectoires, de manière fiable.

Les approches par extraction puis **suivi de points ou structures caractéristiques** sont elles aussi classiques en vision par ordinateur. Elles s'appuient sur l'identification de traceurs du mouvement. Ces traceurs peuvent être des points identifiés par leurs propriétés radiométriques, géométriques (centre d'une forme tourbillonnaire), voire caractéristiques du champ de mouvement (centre d'un vortex extrait grâce aux techniques sus-citées). Ou bien des structures pouvant subir de plus ou moins grandes déformations voire des changements de topologies. Les méthodes de suivi associées à ce type de structures (filtrage stochastique, mise en correspondance, *etc*) permettent ensuite de reconstruire leurs trajectoires.

Les approches denses offrent la qualité de fournir un résultat pour chaque point de l'image mais sont contraintes à de petits déplacements entre deux images. Lors de grandes déformations ou d'occlusions (dus à des nuages par exemple) seules les approches par extraction/suivi sont envisageables. Il est probable que des approches conjointes soient nécessaires dans le contexte de la circulation océanographique.

1.5 Présentation du document

Outre la présente introduction (1) et la conclusion finale (5), ce rapport se compose de trois chapitres :

- 2 rappelle les principes de l'assimilation de données,
- 3 introduit les principes qui régissent la circulation océanographique,
- 4 présente les méthodes de traitement d'images que nous développons.

Chapitre 2

Assimilation de données

2.1 Motivations

Lorsqu'on cherche à prévoir l'évolution d'un phénomène géophysique, comme les conditions météorologiques ou l'état de la mer, ou bien à déterminer les conditions initiales qui ont permis d'arriver à cet état, on peut aborder ce problème en quatre étapes:

- Une première étape consiste à établir une modélisation continue du milieu. Cette modélisation repose sur la mécanique des milieux continus, la mécanique des fluides, le rayonnement électromagnétique, la thermodynamique, *etc.*
- Une deuxième étape consiste à simuler sur un ordinateur (calculateur discret) les Equations aux Dérivées Partielles qui constituent le modèle d'évolution (équations continues).
- Une troisième étape consiste à collecter les observations du milieu naturel: dans l'air, dans l'eau ou au sol. Ainsi, les réseaux d'observations météorologiques et océanographiques sont constitués depuis de nombreuses années (ballons sondes, stations météorologiques au sol, bouées, capteurs sur avions ou bateaux). De plus, l'avènement des observations satellitaires a révolutionné l'observation de la Terre en apportant un réseau dense de mesures.
- La quatrième et dernière étape fait l'objet de l'assimilation de données qui consiste à réunir les observations du milieu naturel avec les modèles qui permettent de le décrire tout en tenant compte de leurs incertitudes respectives. Il s'agit de déterminer l'état instantané du milieu modélisé, d'en prédire l'évolution, ou bien d'en déterminer les conditions initiales. Ceci se formalise mathématiquement par la minimisation d'une fonction de coût, qui représente l'écart entre les observations réelles et les estimations que l'on peut déduire du modèle.

2.2 Définitions et notations

On suppose que l'on dispose d'un modèle décrivant un état $y \in \mathbb{R}^n$, on appelle chaque composante du vecteur y , les **variables d'état** du modèle. Ce modèle dépend de paramètres d'entrée $x \in \mathbb{R}^m$ et s'écrit sous la forme d'une fonctionnelle:

$$y = F(x), \quad (2.1)$$

x représente les **conditions initiales**, les **champs de forçage** et certains paramètres physiques. On dit que F est un **modèle direct**: sur la base des entrées x on calcule directement les sorties y .

Supposons à présent qu'un réseau d'observation délivre une mesure $obs \in \mathbb{R}^p$ qui est reliée à la variable d'état y par:

$$obs = H(y) \quad (2.2)$$

où H est appelé l'**opérateur d'observation**.

On appelle **analyse**, une approximation du véritable état du système à un instant donné. Les informations sur laquelle l'analyse est basée incluent:

- les données d'observation obs ;
- le modèle physique de comportement F ;
- l'information sur les conditions initiales, les conditions aux bords, et des contraintes supplémentaires sur x .

Lorsqu'on inclut l'évolution dynamique du phénomène physique analysé, on parle alors d'**assimilation** de données. Le problème d'assimilation peut mathématiquement se décrire par le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + M(y) = \varepsilon_m \\ y(0) = y_b(0) + \varepsilon_b \\ obs = H(y) + \varepsilon_o \end{cases} \quad (2.3)$$

où M représente le modèle d'évolution, y_b représente la valeur initiale ou **terme d'ébauche** (ou **background**) de la variable d'état; et chacune des entités manipulée est entâchée d'une erreur, respectivement ε_m erreur de modélisation, ε_b erreur sur la condition initiale et ε_o l'erreur sur les observations.

Que l'on désire améliorer la **prévision** y en affinant la connaissance des entrées x ou au contraire retrouver (ou affiner la connaissance de) x par **modélisation inverse**, il est nécessaire de définir une mesure de l'écart entre les observations réelles et leurs équivalents modélisés. Cette mesure, se traduit par une fonctionnelle de coût dont la minimisation

fournit une solution du système (2.3). Il existe plusieurs approches pour résoudre ce problème, on les classe en deux catégories: les **méthodes séquentielles** basées sur des estimations de densités de probabilités et la propagation des incertitudes, elles sont classiquement basées sur le filtre de Kalman et ses extensions; les **méthodes variationnelles** qui reviennent à utiliser un algorithme itératif pour calculer la solution du problème de minimisation. Seule cette seconde approche est détaillée dans la section suivante. Il est bien évident que le présent document se devra également par la suite de présenter les approches séquentielles.

2.3 Assimilation variationnelle

2.3.1 Fonctionnelle de coût

Une approche logique est de chercher à minimiser par rapport à x la fonction:

$$J(x) = ||obs - H(F(x))||^2.$$

On peut par ailleurs disposer d'une estimation *a priori* de la valeur recherchée x_b , pour assurer un compromis entre les observations et l'information donnée par cette valeur, la fonctionnelle J devient:

$$J(x) = \frac{1}{2}R^{-1}||obs - H(F(x))||^2 + \frac{1}{2}B^{-1}||x - x_b||^2. \quad (2.4)$$

Où B et R sont des pondérations qui permettent de donner plus ou moins de valeur au modèle ou à l'*a priori* qui restent à définir.

On définit de la même manière une fonctionnelle sur l'état:

$$J(y) = \frac{1}{2}R^{-1}||obs - H(y)||^2 + \frac{1}{2}B^{-1}||y - y_b||^2. \quad (2.5)$$

2.3.2 3D-var

Dans l'approche 3D-variationnelle, on utilise pas explicitement l'existence du modèle d'évolution M . On cherche à retrouver l'état y à partir des seuls observations $obs = H(y)$ et d'une valeur initiale y_b . En pratique y_b est donné par le modèle M . La figure 2.1 représente cette approche: à un instant donné t_i on cherche le y *update* (en bleu) qui minimise à la fois l'écart à l'observation (en rouge) et l'écart au modèle (en vert).

La méthode 3D-var consiste à choisir B et R comme respectivement proportionnelles aux variances et covariances d'erreurs de prévision et d'observation. On cherche donc à minimiser la fonction de coût en fonction de l'état cherché, c'est-à-dire à résoudre l'équation:

$$\nabla_y J = B^{-1}(y - y_b) - R^{-1}\mathbf{H}^T(obs - H(y)) = 0. \quad (2.6)$$

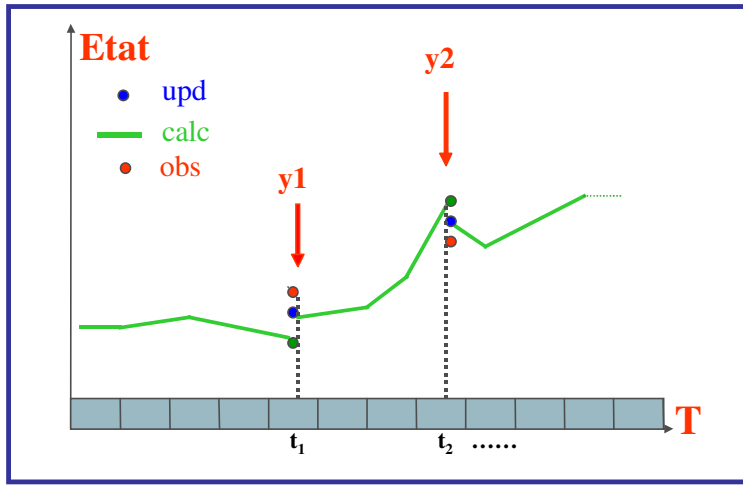


FIG. 2.1 – Principe de l'assimilation 3D-var.

Remarquons ici, qu'on peut obtenir une solution directement (on parle alors d'**interpolation optimale**), en effet un minimum local est en effet donnée par l'analyse y_a :

$$y_a = y_b + K(obs - H(y_b)), \quad (2.7)$$

avec K la matrice de gain:

$$K = BH^T(\mathbf{H}BH^T + R)^{-1}. \quad (2.8)$$

Notons qu'ici, la notation matricielle $\mathbf{H}y$ au lieu de $H(y)$ sous entend l'utilisation d'un opérateur d'observation linéaire, si H n'est pas linéaire par définition (en pratique c'est souvent le cas), il est nécessaire de le linéariser: l'opérateur \mathbf{H} est appelé le *tangent* de H et doit satisfaire:

$$H(y) - H(y_b) \approx \mathbf{H}(y - y_b). \quad (2.9)$$

L'opérateur \mathbf{H}^T est appelé l'adjoint de H .

Le vecteur $obs - H(y_b)$ est parfois appelé *vecteur d'innovation*, il correspond à ce qu'amène l'observation conjointe observation/*background*. La matrice K donne la pondération relative en fonction de la confiance accordée respectivement aux observations et au *background*. On peut d'ailleurs remarquer que si $R \gg B$ (peu de confiance en l'observation) alors on retrouve $y_a \approx y_b$; à l'inverse si $R \ll B$ (peu de confiance dans la condition initiale), on retrouve $\mathbf{H}y_a \approx obs$ via:

$$\mathbf{H}K = I - R(\mathbf{H}BH^T + R)^{-1}.$$

Après calcul, on a également une estimation de la variance d'erreur d'analyse: $A = \text{cov}(y_a)$ avec:

$$A = (I - K\mathbf{H})B. \quad (2.10)$$

La méthode 3D-Var, consiste à éviter le calcul de la matrice de gain K par l'utilisation d'un algorithme de minimisation du type descente de gradient. On calcule alors une suite de

valeurs estimées selon:

$$y_a^{k+1} = y_a^k - \alpha_k \nabla_y J(y_a^k) \quad (2.11)$$

où α_k est le pas de résolution et $\nabla_y J(y_a^k)$ est le gradient de la fonction de coût donné par l'équation (2.6).

En pratique, l'une des difficulté d'utilisation de 3D-var est la nécessité d'estimer correctement la matrice B qui est composée des covariances d'erreur de *background* pour toutes les paires de variables du modèle. Elle doit être définie positive, et les variances doivent être réalistes par rapport aux paramètres d'observation car cela détermine la pondération données à ces observations dans l'analyse. 3D-var est malgré tout très populaire car facile à mettre en œuvre lorsque des opérateurs d'observation complexes sont utilisés, en effet seuls H et l'adjoint \mathbf{H}^T doivent être fournis. L'utilisation d'opérateurs d'observation (faiblement) non linéaires est envisageable avec peu de perte dans l'optimalité du résultat. Pour peu que la fonctionnelle de coût reste strictement convexe, il n'y a qu'une et une seule solution.

2.3.3 4D-var

On considère à présent un modèle dynamique $M(t)$ que l'on va écrire sous la forme discrétisée suivante pour passer du temps $t = i$ au temps $t = i + 1$:

$$y_{i+1} = M(i, i + 1)y_i + q_i \quad (2.12)$$

avec $q_i = \varepsilon_{m_i}$ l'erreur sur le modèle à l'instant $t = i$, supposée suivre une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance Q_i . La figure 2.2 illustre ce principe: l'*update* y_i à l'instant $t = i$ (en bleu) dépend d'un ensemble d'observations (en rouge) et d'un modèle dynamique (en vert).

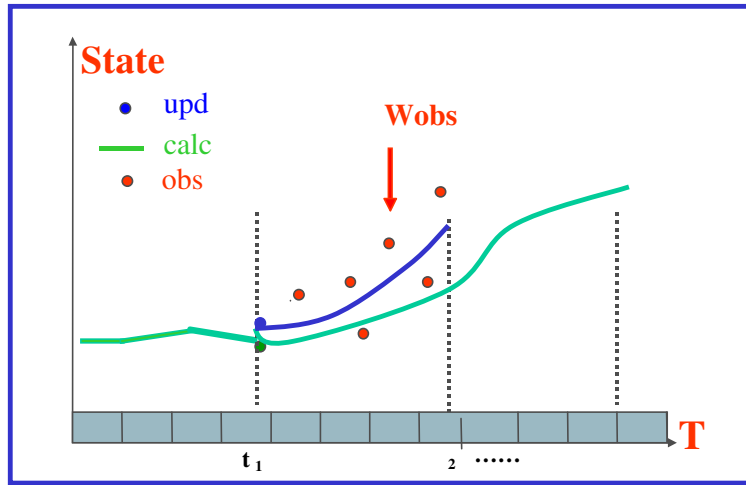


FIG. 2.2 – Principe de l'assimilation 4D-var.

On suppose également que l'on dispose d'observations distribuées en temps obs_i associées à un jeu d'opérateurs d'observation, non constant *a priori*, H_i et des matrices de covariance d'erreur d'observation R_i .

On reprend l'approche par minimisation d'une fonctionnelle en définissant pour un jeu d'observations distribuées en temps aux instants $t = 0 \dots n$:

$$J(y) = \frac{1}{2B} \|\vec{y}_n - \vec{y}_b\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{R_i} \|obs_i - H_i(y_i)\|^2. \quad (2.13)$$

Si l'on suppose que le modèle est parfait, alors on peut écrire que les états successifs sont reliés par le modèle dynamique:

$$y_{i+1} = M_i(y_i) = M_i(M_{i-1}(\dots M_0(y_0))). \quad (2.14)$$

Notons que la fonction de coût n'est alors plus fonction que de la condition initiale. En considérant le modèle linéarisé \mathbf{M} on peut écrire:

$$y_{i+1} = \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_0 y_0. \quad (2.15)$$

L'approche 4D-var consiste à utiliser, de même que précédemment, un algorithme itératif de minimisation, en général réalisé par une descente de gradient. Le gradient de la fonctionnelle, devient:

$$\nabla_y J = B^{-1}(y - y_b) - \sum_{i=0}^n G_i(y) \quad (2.16)$$

où G_i est définie par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} G_0(y) = \mathbf{H}^T d_0 \\ G_i(y) = \mathbf{M}_i^T [\mathbf{H}^T d_i + G_{i+1}(y)] \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n, \end{cases} \quad (2.17)$$

avec $d_i = R_i^2 (obs_i - \mathbf{H}y_i)$.

4D-var est donc une généralisation de 3D-var incorporant des observations temporellement distribuées. Les équations ainsi que l'opérateur d'observation restent les mêmes. 4D-var nécessite de calculer le modèle adjoint \mathbf{M}^T et d'intégrer le modèle et son adjoint. Cette approche n'est valable que sous l'hypothèse d'un modèle parfait ou quasi-parfait, c'est-à-dire que l'erreur sur le modèle est faible. On peut montrer qu'une analyse fournie par 4D-var à la fin d'un intervalle de temps est équivalente à l'analyse fournie par un filtre de Kalman au même instant. Une des propriétés particulières de l'approche 4D-var, est qu'une analyse calculée au milieu d'un intervalle de temps est basée non seulement sur les observations précédentes dans l'intervalle, mais également sur les suivantes. On dit que 4D-var est un algorithme de lissage.

2.4 Euler vs. Lagrange

Dans les modèles géophysiques, les variables de contrôle x et les variables d'état du modèle sont eulériennes. Or lorsqu'on s'intéresse à la description d'un mouvement, on cherche à mesurer les variations locales de position, de vitesse, ou autres, qui se produisent au cours du temps. Pour mesurer ces variations, deux approches existent: les approches eulériennes et les approches lagrangiennes. La comparaison d'un modèle eulérien avec des observations lagrangiennes nécessite la construction d'un opérateur spécifique ainsi que sont adjoint linéarisé.

L'approche eulérienne consiste à "regarder évoluer" un phénomène complexe depuis un repère fixe. Plus précisément, si l'on considère une discretisation de l'espace par une grille de volumes élémentaires juxtaposés, alors décrire un mouvement avec une telle approche revient à évaluer, au cours du temps, ce qui rentre et ce qui sort de chacun de ces volumes élémentaires. La vision lagrangienne paraît plus naturelle pour décrire un mouvement. Elle consiste à placer l'observateur "à la place" de l'objet en mouvement. On considère une particule élémentaire et *on suit son évolution dans le temps*. On relèvera ainsi l'évolution de la position, de la vitesse, de la température, *etc.* mesurée sur cette particule.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine fluide. Soit $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un repère fixe de Ω . Soit P une particule du fluide. On note (X_1, X_2, X_3) les coordonnées de P à $t = 0$.

$$\vec{OP} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.18)$$

$X = (X_1, X_2, X_3)$ sont les coordonnées lagrangiennes de P .

A l'instant t , la particule P a pour coordonnées $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ dans le repère fixe. Ce sont les coordonnées eulériennes de P .

Le champ de vitesse peut être écrit comme:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_E(\mathbf{x}(t), t), \quad (2.19)$$

où $\mathbf{u}_L(\mathbf{X}, t)$ correspond à la description lagrangienne, c'est-à-dire la vitesse à l'instant t de la particule qui se trouvait à la position \mathbf{X} à l'instant initial; $\mathbf{u}_E(\mathbf{x}(t), t)$ correspond à la description eulérienne, c'est-à-dire la vitesse de la particule se trouvant à la position \mathbf{x} à l'instant t .

On appelle **dérivée lagrangienne** d'une quantité Q associée à une particule, la dérivée temporelle dQ/dt quand on suit une particule dans son mouvement. Si Q est exprimée en coordonnées lagrangiennes:

$$\frac{dQ}{dt}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial Q}{\partial t}(\mathbf{X}, t). \quad (2.20)$$

Si Q est exprimée en coordonnées eulériennes, la formule des dérivées totales donne:

$$\frac{dQ}{dt}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial Q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla Q(\mathbf{x}, t), \quad (2.21)$$

où ∇ correspond au gradient spatial.

Dans le cadre de l'assimilation d'une observation lagrangienne dans un modèle eulérien, on aura une fonctionnelle de coût qui pourra prendre la forme:

$$J(y) = \frac{1}{2} B^{-1} \|\vec{y}_n - \vec{y}_b\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n R_i^{-1} \|\mathbf{x}_i - H_i(y_i)\|^2. \quad (2.22)$$

On doit définir l'opérateur d'observation $H(y_i) = \xi(t = i)$ où on aurait par exemple $\xi(t) = (\xi_x, \xi_y)(t)$ la position de la particule dans un plan $z = z_0$, et on ajoute au modèle l'équation d'advection de la particule:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{u}_h \quad \text{et} \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (2.23)$$

où \mathbf{u}_h représente la vitesse horizontale.

Chapitre 3

Océanographie

3.1 Modèles numériques d'océan

La plupart des modèles de circulation océanique sont basés sur les équations dites primitives [20, 2]. C'est-à-dire qu'elles correspondent à une approximation des équations de Navier-Stokes associées à une équation d'état non linéaire, qui couple les deux traceurs actifs que sont la salinité et la température à la vitesse du fluide. A ces équations on ajoute également des hypothèses spatiales et d'échelle et des conditions aux limites.

On peut présenter l'ensemble de ces considérations en trois points:

1. Considérations issues de la mécanique des fluides

- Conservation de la masse, si l'on prend en compte les précipitations et l'évaporation, la masse d'eau océanique reste constante, ce qui permet d'écrire l'**équation de continuité**.
- Conservation de la quantité de mouvement, directement issue des lois qui régissent la mécanique newtonienne, ce qui donne l'**équation du mouvement**
- Conservation de grandeurs scalaires, elle permet de déduire l'**équation de conservation de la température** et l'**équation de conservation de la salinité**, fondamentales pour décrire la circulation océanique.
- Hypothèse d'incompressibilité: la divergence tridimensionnelle du vecteur vitesse est supposée nulle, ce qui permet de déduire les **équations de Navier-Stokes**.
- Hypothèse hydrostatique, qui consiste à négliger les termes d'accélération verticale, de la composante verticale de la force de Coriolis et de viscosité devant la gravité terrestre. On en déduit l'**équation de l'équilibre hydrostatique** qui régit l'équilibre vertical d'un liquide au repos.

2. Considérations spatiales et d'échelle

- La Terre est approximée à une sphère: c'est-dire que la gravité (verticale localement) est considérée être parallèle au rayon de la Terre. Les modèles utilisent le plus souvent un système de coordonnées horizontales orthogonales ou curvilignes

orthogonales, parfois plus ou moins généralisé grâce à des procédés de projection et de raccordement de grille.

- La profondeur de l’océan est considérée négligeable devant le rayon de la Terre. La coordonnée verticale est un degré de liberté important à choisir pour le modèle car il y a de nombreuses conséquences dans la formulation des équations et des paramétrisations.
- Les océans sont bordés par des lignes de côtes complexes, les systèmes de coordonnées curvilignes utilisés permettent dans certaines conditions une adaptation à la forme des côtes et un déplacement éventuel hors du domaine de calcul de la singularité associée au pôle nord.

3. Conditions aux limites

- La couche de mélange est la partie supérieure de l’océan qui interagit directement avec l’atmosphère et la glace de mer. Elle est le lieu de phénomènes dynamiques et thermodynamiques complexes.
- De façon analogue, la couche de fond est une autre couche mélangée dont l’épaisseur dépend de la rugosité du fond et de la vitesse du fluide.

3.2 Notions de mécanique des fluides

La mécanique des fluides, ou hydrodynamique, est l’étude du comportement des fluides [3, 8]. Elle modélise les différents fluides existants par une relation reliant les variations des différentes grandeurs (variables d’état) au sein du fluide.

3.2.1 Conservation de la masse

La masse d’un ensemble de particules qu’on suit dans leur mouvement est constante. Si l’on note V le volume occupé par ces particules à l’instant t et ρ la densité du fluide telle que la masse m s’écrit $\int_V \rho d\mathbf{x}$, où \mathbf{x} représente le vecteur position, alors sa conservation s’écrit:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0,$$

où \mathbf{u} est le vecteur vitesse tridimensionnel. Cette relation étant vraie pour tout V , on en déduit l’équation de conservation de la masse également appelée **équation de continuité**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1)$$

écrite ici dans un contexte lagrangien, elle peut également se simplifier et être réécrite dans un contexte eulérien (voir 2.4):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

Si le fluide est incompressible, on se ramène plus simplement à:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.3)$$

3.2.2 Conservation d'une quantité scalaire

Soit une quantité scalaire ϕ . La conservation de ϕ s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi d\mathbf{x} = S + P + Tr,$$

où S et P désignent respectivement les sources et les puits de la quantité ϕ . Tr désigne le transport dû à des mécanismes autres que la convection, c'est-à-dire essentiellement le transport diffusif, qui est souvent décrit par un gradient:

$$Tr = \int_{\partial V} K \nabla \phi \cdot \mathbf{n},$$

où K est un coefficient de diffusion dépendant de la quantité observée. En intégrant le terme diffusif on obtient:

$$\frac{d(\rho\phi)}{dt} + \rho\phi \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(K \nabla \phi) + \text{sources} + \text{puits}. \quad (3.4)$$

Pour un fluide incompressible, et pour un coefficient de diffusion constant, cette relation devient alors:

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = K \Delta \phi + \text{sources} + \text{puits}. \quad (3.5)$$

Conservation de la température

La température est une des variables d'état du système d'équation régissant la circulation océanique. Elle est particulièrement importante. Dans le cas de la conservation de la chaleur, il faut ajouter à la diffusion de la température les effets de compressibilité, l'équation (3.4) devient:

$$\frac{d(\rho T)}{dt} + \rho T \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{T}{\rho C_p} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dp}{dt} = \operatorname{div}(K_T \nabla T), \quad (3.6)$$

où K_T est le coefficient de diffusion de la chaleur donné par la loi de Fourier et C_p la capacité calorifique du fluide. Le terme en $\rho T \operatorname{div} \mathbf{u}$ décrit les effets de compressibilité du fluide c'est-à-dire qu'il exprime le transport de la chaleur, appelé l'advection; tandis que le terme en $\operatorname{div}(K_T \nabla T)$ exprime la diffusion. On appelle également cette relation (3.6), **l'équation d'advection-diffusion**.

Conservation de la salinité

Si la température est facile à mesurer, il en est autrement de la salinité. La salinité correspond la concentration en sel dans l'eau, plus simplement il s'agit de la quantité de sel, exprimée en grammes, dissoute dans un kilogramme d'eau de mer. Or la variabilité du pouvoir de dissolution du sel dans l'eau est très petite, et il est très difficile de définir la

salinité de façon précise. En pratique, les océanographes utilisent la conductivité de l'eau pour la mesurer. La salinité est alors donnée par la relation:

$$\begin{aligned} S &= -0,08996 + 28,29729R_{15} + 12,80832R_{15}^2 \\ &\quad - 10,67869R_{15}^3 + 5,98624R_{15}^4 - 1,32311R_{15}^5 \\ R_{15} &= C(S,15,0)/C(35,15,0), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $C(S,15,0)$ est la conductivité d'un échantillon eau de mer à 15°C et à pression atmosphérique, à une salinité S et $C(35,15,0)$ est la conductivité standard de "Copenhague".

En notant K_S le coefficient de diffusion de salinité, on à partir de l'équation (3.4):

$$\frac{d(\rho S)}{dt} + \rho S \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(K_S \nabla S), \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, comme c'est le cas de l'eau à l'état liquide, l'équation (3.5) devient:

$$\rho \frac{dS}{dt} = K_S \Delta S. \quad (3.9)$$

3.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Le principe de conservation de la quantité de mouvement donné par la loi de Newton (bilan des forces = masse \times accélération) est appliqué ici au fluide considéré comme un ensemble de particules:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dx = \sum F_{ext},$$

où les forces extérieures au système représentent les forces de gravité, de pression et de viscosité, elles sont respectivement définies sur chaque particule de fluide dx par: $\rho dx g$, $\nabla p dx$ où p est la pression locale et $(\mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})) dx$ où μ représente le coefficient de viscosité propre au fluide.

On en déduit l'équation du mouvement:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho g - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}). \quad (3.10)$$

3.2.4 Equation de Navier-Stokes

Dans le cas de fluides non-compressibles tels que les liquides, on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Si on remarque qu'on peut écrire la force gravitationnelle comme fonction de la pression, on obtient à partir de l'équation (3.10) le système d'équations de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est appelée la viscosité cinématique.

Dans le cas d'un fluide homogène, ρ vaut une constante ρ_0 et la pression peut-être exprimée en fonction de la vitesse sous la forme:

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.13)$$

On peut adimensionner ces équations en se référant à des grandeurs *typiques* caractérisant l'écoulement. Ainsi, on peut définir une longueur de référence L (typiquement on peut prendre le diamètre d'une section orthogonale du flux), et une vitesse de référence correspondante U , on en déduit l'échelle de temps $T = L/U$ et l'échelle de pression $P = \rho_0 U^2$. On obtient les équations adimensionnées:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\Delta p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

où $R_e = UL/\nu$ est appelé le **nombre de Reynolds** qui mesure le *degré de turbulence de l'écoulement* [6]. Si R_e est grand, le système va tendre vers les équations d'Euler correspondant à un fluide parfait non-visqueux:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \Delta p \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Si au contraire R_e est petit, les termes convectifs deviennent négligeables, et l'on obtient les équations de Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\Delta p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

voire:

$$\begin{cases} 0 = -\Delta p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour les écoulements océaniques R_e a des valeurs de l'ordre de 10^8 à 10^{12} .

3.3 Equations primitives des écoulements océaniques

3.3.1 Equations de départ

Les équations qui régissent les écoulements océaniques s'écrivent dans le repère terrestre qui peut être assimilé à une sphère en rotation, on réécrit donc naturellement les équations de mécanique des fluides en coordonnées sphériques. Rappelons que pour un vecteur \mathbf{v} on a:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{v}_I = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} \quad (3.18)$$

et

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\mathbf{v}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}), \quad (3.19)$$

où I et R désignent les repères immobiles (galiléen) et en rotation, et $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation.

Pour les échelles qui nous intéressent, on considère que pour la rotation de la Terre $\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = 0$. Si \mathbf{v} représente la position d'une particule de fluide, le terme en $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_R = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$ est l'accélération de Coriolis et le terme $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v})$ est l'accélération centripète. On peut considérer l'accélération de Coriolis comme une pseudo-force. On l'appelle **force de coriolis**: $\mathbf{F}_c = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$. Cette force est toujours perpendiculaire au mouvement, sa composante "utile", située dans le plan tangent à la Terre, vaut $-2|\boldsymbol{\Omega}|\mathbf{u} \sin \theta$, où θ est la latitude. Elle est donc nulle à l'équateur et a pour effet de dévier les mouvements océaniques vers la droite dans l'hémisphère nord et vers la gauche dans l'hémisphère sud. D'autre part, pour les échelles qui nous intéressent, l'accélération centripète se réduit essentiellement à la **force gravitationnelle** \mathbf{g} .

Les termes de viscosité restant inchangés en repère tournant, les équations de conservation deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{d(\rho T)}{dt} + \rho T \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{T}{\rho C_p} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dp}{dt} = \operatorname{div}(K_T \nabla T) \\ \frac{d(\rho S)}{dt} + \rho S \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(K_S \nabla S) \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Il faut fermer le système (3.20) par une **équation d'état**, loi empirique reliant la masse volumique aux autres variables:

$$\rho = \rho(T, S, p). \quad (3.21)$$

3.3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites de l'océan peuvent prendre différentes formes, qui sont toutes déduites des propriétés de conservation énoncées ci-dessus:

- le long des côtes et sur le fond de l'océan, les courants océaniques vérifient une condition d'imperméabilité: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, à laquelle on ajoute une condition de glissement: $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ ou de non glissement: $\mathbf{u} = 0$;
- à la couche-limite de surface de l'océan, si $\mathbf{u} = (u, v, w)$ on a:

$$\mu \left(\begin{array}{c} \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial z \end{array} \right)_{|z=0} = C_f \mathbf{T}, \quad (3.22)$$

où C_f est le coefficient de rugosité et \mathbf{T} la tension du vent. Pour la température on prend $\partial T_{\text{océan}} / \partial z = \partial T_{\text{atmo}} / \partial z$. Pour la salinité on écrit la continuité des flux: $\partial S / \partial z|_{z=0} = Q$, où Q désigne le flux d'évaporation et de précipitation.

3.3.3 Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq consiste à considérer que les variations relatives de densité sont faibles: $\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1$. Ainsi, pour l'océan, la masse volumique varie de $1000 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour l'eau douce à $1050 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour les eaux les plus denses, et 75% de l'eau de mer a une masse volumique comprise entre 1034,4 et $1034,7 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Reportée dans l'équation de continuité, l'hypothèse de Boussinesq revient à négliger le terme de compressibilité: $\text{div } \mathbf{u} = 0$. On dit qu'on considère un fluide **quasi-incompressible**. Le système (3.20) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{dT}{dt} = K_T \Delta T \\ \frac{dS}{dt} = K_S \Delta S. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

3.3.4 Approximation hydrostatique

On constate aisément que les composantes verticales de l'accélération $(d\mathbf{u}/dt)|_z = dw/dt$, la force de Coriolis $-2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})|_z$ et le terme de viscosité ν sont très inférieurs à la gravité $g = |\mathbf{g}|$. Or, la projection sur l'axe vertical de l'équation du mouvement est donnée par:

$$\frac{dw}{dt} = -2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})|_z - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w,$$

où l'équilibre principal, grâce à cette constatation, est:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (3.24)$$

Cet équilibre est appelé **équilibre hydrostatique**. Il régit l'équilibre vertical d'un liquide au repos.

3.3.5 Equations primitives

Les **équations primitives** formées à partir du système (3.20), de l'équation d'état (3.21) et des approximations de Boussinesq et hydrostatique, correspondent finalement à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{dT}{dt} = K_T \Delta T \\ \frac{dS}{dt} = K_S \Delta S \\ \frac{du}{dt} - 2fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta u = 0 \\ \frac{dv}{dt} - 2fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \rho = \rho(T, S, p), \end{array} \right. \quad (3.25)$$

où $f = 2|\boldsymbol{\Omega}| \sin \theta$ est appelé paramètre de Coriolis.

3.3.6 Equations quasi-géostrophiques

L'hypothèse quasi-géostrophiques indique que le mouvement est proche de l'équilibre géostrophique. Celui-ci traduit la balance entre la force de Coriolis et le gradient de pression horizontal. Cet équilibre est fondamental pour les écoulements océaniques (et atmosphériques) de grande échelle. Il permet de décomposer l'écoulement en strates horizontales entre lesquelles il n'y a pas d'échange verticaux de densité ou de chaleur. Ce qui autorise la simplification des équations primitives.

A l'**équilibre géostrophique** on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} fv = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ -fu = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

On note f_0 la valeur moyenne du paramètre de Coriolis, L et U les échelles de longueur et de vitesse horizontales et D l'échelle de longueur verticale. L'échelle de temps est $T = L/U$

et l'échelle de vitesse verticale est $W = UD/L$.

On pose $\delta = D/L$ le **paramètre d'aspect** qui mesure l'aplatissement de la couche de fluide, et $\epsilon = U/(f_0L)$ le **nombre de Rossby** rapport entre la période de rotation terrestre et le temps caractéristique des écoulements. Pour les écoulements océaniques de grande et moyenne échelle, on a $\delta \ll 1$ et $\epsilon \ll 1$, ce qui signifie que l'on a une couche fluide mince, dont les mouvements sont lents par rapport à la vitesse de rotation de la Terre et donc très influencées par celle-ci.

On suppose que $\delta = \mathcal{O}(\epsilon)$ et que $L/R_T = \mathcal{O}(\epsilon)$, où R_T est le rayon de la Terre. Pour toute variable ϕ , on écrit un développement de Taylor $\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots$, et on l'intègre dans les équations. On tronque ensuite les équations à différents ordres en ϵ . A l'ordre 0, on retrouve l'équilibre géostrophique. A l'ordre 1, on obtient les équations **quasi-géostrophiques**:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\Delta\psi + f + f_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (3.27)$$

avec $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial\rho}{\partial z}$ et $w = -\frac{f_0}{N^2(z)} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$.

Il faut noter que ces équations ne sont pas valides à l'équateur (car $\epsilon \ll 1$ n'est plus valide). De plus, elles sont en théorie limitées à des zones de dimensions petites par rapport au rayon de la Terre, bien qu'on puisse en pratique transgresser cette hypothèse sans dommages apparents sur la solution.

Chapitre 4

Traitement d'image

4.1 Objectifs

Les deux chapitres précédents présentent des états de l'art (non exhaustifs) des différents thèmes auxquels ils s'intéressent: assimilation de donnée et modélisation de la circulation océanographique. En complément, ce chapitre se restreint à décrire les méthodes que nous développons ou proposons de développer dans le cadre d'ASSIMAGE. L'application initiale, que nous avons choisie étant l'assimilation de données lagrangiennes en océanographie, on s'intéresse ici à la reconstruction de trajectoires à partir de séquences d'images. Seule l'approche **champ dense** (*cf* section 1.4) est détaillée dans ce document, avec plus particulièrement les méthodes de type **flot optique**.

4.2 Approche champ dense

Il existe de nombreuses méthodes d'estimation de champ dense de déplacement et dans un contexte d'imagerie fluide, plusieurs techniques d'estimation de champ dense ont été proposées. Les champs obtenus par les méthodes de type flot optique, se sont révélés pertinents dans le contexte de l'application météorologique pour la prédiction des conditions météorologiques. Ces champs de vecteurs, permettent par leur intégration temporelle, d'accéder aux trajectoires des particules. En outre, ces champs permettent également de détecter et de classer les singularités présentes, entités fondamentales pour la compréhension, la prédiction et la caractérisation de l'écoulement étudié.

Disposer d'un champ dense de mouvement vise à déterminer les vecteurs de vitesse en chaque point de l'image. Les méthodes de détermination d'un tel flot font partie des principales contributions qui ont été présentées pour extraire une information dense et précise du mouvement, sans nécessairement se fier à une connaissance *a priori* très précise.

4.2.1 Hypothèses de conservation

Hypothèse fondatrice

Les principes fondamentaux de l'estimation du flot optique ont été proposés par Horn & Schunck en 1981 [12] et s'appuient sur deux hypothèses: la **conservation de la luminance**, à laquelle il est nécessaire d'ajouter une hypothèse sur la **cohérence spatiale** du champ des vecteurs de vitesse, présentée section 4.2.2.

L'hypothèse de conservation de la luminance consiste à supposer que les points élémentaires d'une image se déplacent en conservant leur intensité lumineuse. Il en découle la relation suivante:

$$\frac{dI}{dt}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.1)$$

où \mathbf{x} représente la position d'un point et I la fonction d'intensité lumineuse des images. Une décomposition de la dérivée par rapport aux trois composantes x , y et t donne, en notant $I_x = \partial I / \partial x$, $I_y = \partial I / \partial y$ et $I_t = \partial I / \partial t$:

$$I_x \frac{dx}{dt} + I_y \frac{dy}{dt} + I_t = 0. \quad (4.2)$$

Or, les composantes dx/dt et dy/dt sont en fait les composantes du vecteur vitesse \mathbf{w} représentatif du mouvement apparent. Ainsi, on obtient la relation appelée **Equation de Contrainte du Mouvement Apparent** (ECMA ou *OFC* pour *Optical Flow Constraint*):

$$\nabla I \cdot \mathbf{w} + I_t = 0, \quad (4.3)$$

où ∇ représente le gradient spatial.

Remarquons que si le profil de la fonction de luminance n'est pas linéaire (ce qui est le cas dans la plupart des exemples réels), l'ECMA ne peut pas prendre en compte de larges déplacements. En effet, cette équation peut être assimilée au développement de Taylor du premier ordre de la contrainte de conservation de la luminance $I(x + v, t + 1) - I(x, t) = 0$. Une telle linéarisation n'autorise pas de grands déplacements. Pour s'affranchir de ceci, certains auteurs ont proposé de traiter le problème du flot optique dans un cadre multirésolution [16, 17].

D'autre part, l'ECMA est une hypothèse qui n'est *a priori* pas vérifiée dans le cas d'écoulement fluide, *a fortiori* océanographique. On peut alors s'intéresser à des schémas de flot optique ne se basant pas sur l'ECMA mais qui utilisent la physique de l'écoulement, c'est-à-dire les équations de la mécanique des fluides présentées chapitre 3.

Conservation de la masse

Un cas intéressant se produit lorsque la luminance est reliée à la densité ρ du fluide observé. En effet, l'équation (3.1) correspond à:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

où \mathbf{u} correspond à la vitesse instantannée tridimensionnelle du fluide.

On obtient une équation de continuité qui consiste à faire l'hypothèse que la variation de la luminance I suit la loi:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \operatorname{div}(I\mathbf{w}) = 0 \quad (4.4)$$

parfois notée *EOFC* (*Extended Optical Flow Constraint*). Pour les fluides incompressibles tels que l'eau liquide, la divergence tridimensionnelle de la vitesse instantannée est nulle. Sous l'hypothèse forte que la vitesse bidimensionnelle apparente est également à divergence nulle, alors la contrainte représentée par l'équation (4.4) conduit à l'ECMA. En effet, nous avons:

$$\operatorname{div}(I\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla I + I \operatorname{div}\mathbf{w}, \quad (4.5)$$

avec $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$ on retrouve:

$$\nabla I \cdot \mathbf{w} + I_t = 0.$$

La propriété d'incompressibilité peut néanmoins être exploitée avantageusement dans le terme de régularisation (voir 4.2.2).

Il est cependant nécessaire de s'interroger de manière plus approfondie sur la validité du passage entre les relations (3.1) et (4.4). On peut effectivement se demander d'une part s'il est convenable de faire l'hypothèse que la luminance des images soit relative à une densité et, d'autre part sous quelles conditions une version bidimensionnelle, telle que (4.4), de l'équation de continuité (3.1) a un sens.

Dans le cas d'images atmosphériques on peut justifier l'utilisation de l'équation de continuité sous une hypothèse de conservation du volume [5]. Les images Meteosat infrarouges étant représentatives de l'altitude d'un nuage, on peut supposer que le volume d'une colonne verticale délimitée par le sol et le sommet d'un nuage reste constant au cours du temps. Cette hypothèse n'est en rien applicable en océanographie. On peut malgré tout supposer une intégration verticale de z_0 à z_1 valide [9], en s'appuyant sur l'approximation hydrostatique, on utilise alors l'équation (3.24):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Dans ce cas, on peut approcher la luminance I de l'image par:

$$I(x,y,t) = \int_{z_0}^{z_1} \rho(x,y,z,t) dz. \quad (4.6)$$

L'intégration de l'équation de continuité (3.1) selon z en utilisant la relation (4.6) conduit à:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \operatorname{div}(I\mathbf{w}) + [I\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]_{z_0}^{z_1} = 0, \quad (4.7)$$

\mathbf{u} est la vitesse instantannée tridimensionnelle de l'écoulement et la vitesse bidimensionnelle apparente \mathbf{w} est définie par:

$$\mathbf{w} = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \rho \mathbf{u}_h}{\int_{z_0}^{z_1} \rho} \quad (4.8)$$

\mathbf{u}_h correspondant à la composante horizontale de \mathbf{u} et \mathbf{k} au vecteur unitaire vertical.

Sous l'hypothèse quasi-géostrophique, on peut considérer la composante verticale $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ de la vitesse instantannée négligable devant les composantes horizontales \mathbf{u}_h . La représentation des images respecte alors une forme bidimensionnelle de l'équation de continuité en fonction de la vitesse apparente \mathbf{w} .

Incorporation d'une nouvelle contrainte

On trouve dans le chapitre 3, l'équation de conservation de la chaleur dite d'advection-diffusion, relation (3.6):

$$\frac{d(\rho T)}{dt} + \rho T \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{T}{\rho C_p} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dp}{dt} = \operatorname{div}(K_T \nabla T).$$

Dans le cas d'un fluide incompressible $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et sous l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique $\partial p / \partial z = -\rho g$, on peut montrer [23] qu'on peut réécrire cette relation sous la forme:

$$\rho \frac{dT}{dt} = K_T \Delta T - \frac{\partial}{\partial z} w_\tau T_\tau + \frac{1}{\rho_0 C_p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4.9)$$

où les composantes indicées par τ correspondent aux fluctuations turbulentes, ainsi: T_τ correspond à la température de ces fluctuations et w_τ la composante verticale de la vitesse de ce flux; ρ_0 est la densité moyenne de l'eau, C_p la capacité calorifique, et q le flux vertical de température.

Si l'on considère que l'eau est homogène depuis la surface jusqu'à une profondeur h , une intégration verticale de (4.9) permet de déduire:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = K_T \Delta T + \frac{Q}{h \rho_0 C_p} - \frac{\delta T w_e}{h}, \quad (4.10)$$

où (u, v) sont les composantes horizontales du champ de vitesse instantannée, Q représente le bilan de température à la surface, δT est la différence entre la température moyenne de la couche comprise entre la profondeur h avec la surface et la température de la couche située au dessous, et w_e est la vitesse d'*entraînement* à la base de la couche c'est-à-dire à la profondeur h .

Les termes en $Q/(h\rho_0C_p)$ et $(\delta Tw_e)/h$ correspondent à des termes de *sources* qui ne peuvent être évalués à la résolution spatiale des capteurs satellitaires utilisés. On peut les représenter par un unique terme: Src .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = K_T \Delta T + Src. \quad (4.11)$$

De plus, aux échelles de temps qui nous intéressent en imagerie océanographique, on peut considérer la diffusion horizontale ΔT négligeable: si l'intervalle entre deux acquisitions est suffisamment petit (en pratique il est d'environ 12 heures) la diffusion n'affecte pas "significativement" la température [24]. En considérant la relation (4.11) on peut alors écrire:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = Src. \quad (4.12)$$

Remarquons que sous l'hypothèse géostrophique, il n'y pas d'échanges verticaux de chaleur, et on retrouve alors l'ECMA puisque la variable observée est directement la température sur les images de **température de surface**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (4.13)$$

4.2.2 Régularisations

Tenter de calculer le champ de vitesse, en utilisant une des hypothèses de conservation proposée dans la section précédente, revient à vouloir résoudre un problème mal posé puisqu'une unique équation contient deux inconnues. C'est ce qu'on appelle communément le **problème d'ouverture**. Pour déterminer complètement les composantes du vecteur vitesse, il faut rajouter une contrainte supplémentaire. Cette contrainte varie selon les applications, mais en général, il s'agit d'une contrainte sur la régularité spatiale du champ de vitesse.

Régularisation au premier ordre

Pour résoudre le problème d'ouverture, il est nécessaire d'ajouter une contrainte, qui se traduit par un terme supplémentaire dans l'équation à résoudre. Horn *et al.* ont proposé une contrainte restreignant les variations du champ de vitesse au moyen d'une norme L^2 , soit le terme:

$$|\nabla \mathbf{w}|^2 = |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2. \quad (4.14)$$

Cette régularisation a été proposée dans un contexte appliqué à la de vision par ordinateur. Elle a pour effet d'atténuer fortement les ruptures de continuité. Dans un contexte d'écoulement fluide, elle a peu de réalité physique, d'autant que seule la composante parallèle au gradient spatial est évaluée. Cette limitation peut être suffisante dans certaines applications (telle que la robotique par exemple) mais elle est peu réaliste en océanographie.

Une régularisation plus intéressante pour l'étude de mouvement fluide peut-être construite en s'appuyant sur les propriétés **irrotationnelles** et **solénoïdales** du champ de vitesses, c'est-à-dire respectivement $\operatorname{div}\mathbf{w}$ et $\operatorname{curl}\mathbf{w}$. En effet, la décomposition de Helmholtz stipule que tout champ de vitesse \mathbf{w} peut s'écrire en une somme de deux composantes l'une étant irrotationnelle, l'autre solénoïdale. Or, div et curl sont les opérateurs qui permettent d'exprimer la turbulence. On obtient un nouveau terme de régularité sur le champ de vitesse:

$$\alpha|\operatorname{div}\mathbf{w}|^2 + \beta|\operatorname{curl}\mathbf{w}|^2. \quad (4.15)$$

On peut néanmoins remarquer les conditions d'optimalités d'Euler-Lagrange qui en découlent sont

$$\begin{cases} \alpha u_{xx} + \beta u_{yy} + (\alpha - \beta)v_{xy} = 0 \\ \beta v_{xx} + \alpha v_{yy} + (\alpha - \beta)u_{xy} = 0 \end{cases}$$

et donc si $\alpha = \beta$, ces conditions sont les mêmes que pour la régularisation au premier ordre.

Notons qu'il est possible de remplacer la norme sur le gradient de \mathbf{w} par une norme au sens L^1 [7]. Ce qui permet de mieux estimer des discontinuités du champ de vitesse, en effet la norme L^2 a l'inconvénient de trop lisser le champ \mathbf{w} . Mais, dans un contexte variationnel, les équations d'Euler-Lagrange deviennent plus complexes que dans le cas de la norme L^2 .

Régularisation div

On peut rappeler que l'équation de conservation de la température d'un fluide (3.6) comporte un terme en $\operatorname{div}\mathbf{u}$, or ce terme doit être nul pour les fluides incompressibles. Proposer une régularisation tendant à minimiser la composante irrotationnelle du champ de vecteur, correspond à autoriser une composante solénoïdale forte, ce qui semble intéressant lorsqu'on étudie les écoulements océaniques. D'un point de vue physique, plus la divergence du champ de vitesse est faible, plus on se rapproche de l'équilibre quasi-géostrophique.

Un terme de régularisation div , revient à autoriser le coefficient $\beta = 0$ dans le terme précédent (4.15), soit le terme:

$$|\operatorname{div}\mathbf{w}|^2. \quad (4.16)$$

Régularisation div - curl au second ordre

On peut également s'intéresser à un schéma de régularisation au second ordre [21] s'appuyant toujours sur la divergence et le rotationnel du champ de vitesse:

$$\alpha|\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}|^2 + \beta|\nabla\operatorname{curl}\mathbf{w}|^2. \quad (4.17)$$

Cette régularisation est intéressante car elle ne s'applique pas directement sur les variations du champ de vitesse représentatives de la continuité du déplacement, mais sur les variations de quantités significatives du mouvement fluide. Elle favorise des champs de divergence et de vortacité constante.

4.2.3 Implémentations

Approche variationnelle

Afin de résoudre la contrainte (4.3), Horn *et al* optent pour une approche variationnelle, on construit une fonctionnelle dont le minimum doit fournir la solution recherchée. Cette fonctionnelle est composée à partir des contraintes (4.3) et (4.14), soient:

$$E_{obs}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t})^2 dx dy \quad (4.18)$$

et

$$E_{reg}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx dy. \quad (4.19)$$

Pour calculer \mathbf{w} , il faut minimiser la fonctionnelle suivante:

$$E(\mathbf{w}) = E_{obs}(\mathbf{w}) + \gamma E_{reg}(\mathbf{w}), \quad (4.20)$$

γ est un terme fixé empiriquement permettant de pondérer les effets du terme E_{reg} . Pour minimiser (4.20), on calcule les équations d'Euler-Lagrange de E et on en déduit un schéma de minimisation de Gauss-Seidel.

Avec cette approche, on peut tenter de coupler la plupart des contraintes de conservation proposées dans la section 4.2.1 et de régularisation de la section 4.2.2. Par exemple (4.13) et (4.16) donne:

$$E(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left((\mathbf{w} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t})^2 + \gamma (\operatorname{div} \mathbf{w})^2 \right) dx dy. \quad (4.21)$$

Béréziat [5] utilise quant à lui les contraintes (4.4) et (4.14), soit:

$$E(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left((\mathbf{w} \cdot \nabla I + \frac{\partial I}{\partial t} + I \operatorname{div} \mathbf{w})^2 + \gamma (\nabla \mathbf{w})^2 \right) dx dy. \quad (4.22)$$

L'utilisation de cette approche avec la régularisation *div-curl* d'ordre deux correspondant au terme (4.17), nécessite de résoudre des EDP d'ordre quatre résultantes des équations d'Euler-Lagrange. Afin de pallier à cette difficulté, Corpetti [9] propose un schéma de régularisation qui vise à approcher ce critère mais plus simple d'emploi:

$$\begin{aligned} E_{reg}(\mathbf{w}) &= \int_{\Omega} (|\operatorname{div} \mathbf{w} - \xi|^2 + \lambda |\nabla \xi|^2) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} (|\operatorname{curl} \mathbf{w} - \zeta|^2 + \lambda |\nabla \zeta|^2) dx dy. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les fonctions scalaires ξ et ζ sont respectivement des estimations des fonctions de divergence (*div*) et de rotationnel (*curl*) de la vitesse \mathbf{w} à estimer, λ étant un paramètre positif. Cette régularisation est composée de deux parties, l'une concerne la divergence et l'autre la vorticité. Chacune de ces parties est composée de deux termes. Le premier encourage la divergence et la vorticité du mouvement \mathbf{w} à se conformer aux valeurs de ξ et ζ . Lorsque ces

quantités de divergence et de rotationnel se rapprochent de zéro, le terme (4.23) se ramène alors à une régularisation du premier ordre. Le second terme impose quant à lui un lissage sur les estimées de la divergence et du rotationnel, lorsque celles-ci sont significativement non nulles. Ce terme favorise l'émergence de zones de divergence ou de rotationnel homogènes. Cette régularisation peut se minimiser de manière alternée par rapport aux variables ξ , ζ et \mathbf{w} . Dans un premier temps, ξ et ζ sont fixés et le champ \mathbf{w} est estimé. Une fois ce champ estimé, il est lui-même fixé tandis que ξ et ζ sont estimées successivement. Cette opération est itérée jusqu'à convergence. D'un point de vue calculatoire, cette régularisation possède l'avantage de s'affranchir du problème de la résolution des équations aux dérivées partielles d'ordre quatre qui découlaient de (4.17).

Approche champ de vecteur spline

Une autre approche pour éviter la manipulation de ces EDP d'ordre quatre est la résolution par champs de vecteur splines. Bien que les splines soient plutôt utilisées dans le cadre de l'approximation de champs de vecteurs, le choix de leur utilisation pour le flot se justifie également, car comparativement à l'approche variationnelle, elle fournit une solution exacte en un certain nombre de points.

On considère le cas où l'on a des données de départ qui sont des données projetées dans une direction \mathbf{n}_i , à des positions \mathbf{x}_i . La projection y_i en \mathbf{x}_i s'exprime par le produit scalaire d'un vecteur dans la direction \mathbf{n}_i , et un ensemble de fonctionnelles linéaires L_i :

$$\begin{aligned} y_i &= L_i \mathbf{w} + \epsilon \\ &= \mathbf{w}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_i) + \epsilon(X_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.24)$$

où \mathbf{w} est la fonction que l'on cherche à déterminer: ici $\mathbf{w} = (u, v)$ avec u et v les composantes des vecteurs vitesses. La fonction \mathbf{w} sera approximée par les projections y_i (les observations de départ), qui contiennent un terme d'erreur $\epsilon(X_i)$. \mathbf{x}_i représente les coordonnées des points dans le plan 2D.

On peut décrire le problème de minimisation-spline comme la recherche d'une solution \mathbf{w} , qui satisfait les conditions d'interpolation de (4.24) et qui minimise la fonctionnelle:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - L_i \mathbf{w})^2 + \lambda \int_{R^n} [\alpha \|\nabla^m(\operatorname{div} \mathbf{w})\|^2 + \beta \|\nabla^m(\operatorname{curl} \mathbf{w})\|^2] \quad (4.25)$$

où N est le nombre de données de départ. Le premier terme de l'équation (4.25) est un terme de fidélité: il définit l'erreur résiduelle ϵ du résultat de l'approximation à partir des données projetées (dans le cas qui nous intéresse ce sont les données du gradient temporel I_t). Le second terme intégral de (4.25) est une mesure de pénalité sur \mathbf{w} , il fait intervenir deux types de paramètres:

- $\lambda \geq 0$ est un terme général de lissage de la solution.

– $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ contrôlent la régularité des variations en divergence et en vorticité.

La solution du problème de minimisation (4.25) est associée à une équation matricielle aux dérivées partielles :

$$\Delta[\alpha(\nabla^T \cdot \nabla) + \beta(\text{curl}^T \cdot \text{curl})]K = \delta Id \quad (4.26)$$

La définition du noyau K se trouve avec l'équation (4.26) : on considère la transformée de Fourier et on inverse le système [1]. On peut remarquer que l'expression de K dépend des contraintes de régularité imposées. La définition du noyau $K = \theta|\mathbf{x}|^4 \log(|\mathbf{x}|)$ (θ constant), est un résultat des équations de convolution de la théorie des distributions : c'est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel laplacien (K est une solution élémentaire de $a * u = b$ si $a * K = \delta$). La solution du problème de minimisation (4.25) peut être exprimée par une combinaison linéaire des noyaux K translatés :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N c_i K(\|X - X_i\|) \cdot \mathbf{n}(X_i) + p_m(X), \quad (4.27)$$

où les c_i sont des coefficients et $p_m(X)$ est un polynôme de degré au plus m .

La solution (4.27) peut aussi s'exprimer, en considérant ϕ_j ($j = 1, \dots, d$) comme une base de l'espace nul (de l'opérateur de lissage) :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N c_i K(\|X - X_i\|) \cdot \mathbf{n}(X_i) + \sum_{j=1}^d d_j \phi_j, \quad (4.28)$$

Pour avoir une expression explicite de la solution, il faut dériver le noyau K . Pour K donné, on peut trouver les coefficients c et d en résolvant un système linéaire :

$$\begin{aligned} (Q + \lambda N Id)c + Sd &= y \\ S^T c &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Où Q est une matrice de taille $N \times N$ avec pour entrées : $Q_{ij} = L_i L_j K = \mathbf{n}_j^T \cdot K \cdot \mathbf{n}_i$, et S est une matrice de taille $N \times 2d$ avec pour entrées : $S_{ij} = L_i \phi_j = \mathbf{n}_i^T \cdot \phi_j$. La seconde équation de (4.29) impose des conditions d'orthogonalité :

$$\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{n}_i^T \cdot \phi_j(X_i) = 0, \quad j = 1, \dots, d \quad (4.30)$$

En fait le système (4.29) revient à imposer que le champ global résultant passe par tous les points y_i . Les autres points sont interpolés avec des contraintes en divergence et/ou rotationnel.

4.3 Trajectographie

Pour reconstruire des trajectoires en utilisant directement l'information mouvement, il suffit de considérer le vecteur vitesse \mathbf{w} comme étant la dérivée du vecteur trajectoire φ selon la définition suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,y,t) = \mathbf{w} \circ \varphi(x,y,t) \\ \varphi(x,y,0) = (x,y) \end{cases} \quad (4.31)$$

Les équations différentielles du type de l'équation 4.31 sont facilement résolubles numériquement. D'une manière générale, l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.32)$$

possède une solution unique si la fonction f est lipchitzienne, c'est-à-dire si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall t, \forall y, z \in \mathbb{R}, \exists L > 0 \mid |f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$$

Les différentes méthodes numériques reposent sur des schémas explicites qui utilisent une approximation en différences finies du terme y' ($y'(t_n) \sim \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$) :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) \quad (4.33)$$

où h est le pas de discrétisation. La condition de Lipchitz suffit à assurer la convergence du schéma vers la solution de l'équation différentielle. On peut en outre améliorer la méthode en développant le terme $f(t_n, y_n)$ par une formule de Taylor à un ordre fixé, et montrer que l'erreur est d'autant moindre que l'ordre du développement de Taylor est élevé. Dans notre cas, nous ne connaissons par explicitement la valeur de f mais seulement les valeurs en certains points (c'est le champ de vitesse \mathbf{w}). Nous ne pouvons donc pas calculer les dérivées successives de f (utilisées dans le développement de Taylor). Pour résoudre ce problème, nous utilisons les méthodes introduites par Runge-Kutta dans les années trente. On utilise le fait que la solution de l'équation 4.32 est :

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Au lieu d'approximer f directement, on cherche à approximer l'intégrale de f . Si on utilise des méthodes du type Simpson, nous retombons sur le schéma 4.33. Soit le schéma explicite suivant :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f_n^1 + \frac{f_n^2}{2} + \frac{f_n^3}{2} + f_n^4)$$

avec :

$$\begin{cases} f_n^1 = f(t_n, y_n) \\ f_n^2 = f(t_n, y_n + 2hf_n^1) \\ f_n^3 = f(t_n, y_n + 2hf_n^2) \\ f_n^4 = f(t_n, y_n + hf_n^3) \end{cases} \quad (4.34)$$

Ce schéma s'appelle le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4. La condition de Lipchitz assure la convergence du schéma vers la solution unique de l'équation différentielle (4.32).

Nous choisissons donc d'appliquer la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 à l'équation (4.31). C'est-à-dire que nous avons un système de deux équations différentielles en u et v , à résoudre respectivement en $\varphi^1(t, x, y)$ et $\varphi^2(t, x, y)$ et cela à (x, y) fixé ; $\varphi^1(t, x, y)$ et $\varphi^2(t, x, y)$ étant les deux composantes du vecteur trajectoire $\varphi(t, x, y)$:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}^1 = \varphi_n^1 + \frac{h}{6}(u_n^1 + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{2} + u_n^4) \\ \varphi_{n+1}^2 = \varphi_n^2 + \frac{h}{6}(v_n^1 + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^3}{2} + v_n^4) \\ \varphi_0^1(x, y) = x \\ \varphi_0^2(x, y) = y \end{cases}$$

Les termes u_j et v_j pour $j = 1, 2, 3, 4$, donnés par les formules (4.34), sont calculés par interpolation bilinéaire à partir du champ de vitesses connu, c'est-à-dire en chaque pixel (x_i, y_i) . Les calculs se font donc à (x_i, y_i) fixé, de façon à ce que $\varphi(x_i, y_i, t) = \varphi(t)$. Le calcul des termes u_j et v_j , pour $j = 1, 2, 3, 4$, à l'étape n utilisent conjointement les valeurs φ_n^1 et φ_n^2 , soit :

$$\begin{cases} u_n^1 = u(t_n, \varphi_n^1, \varphi_n^2) \\ u_n^2 = u(t_n, \varphi_n^1 + 2hu_n^1, \varphi_n^2) \\ u_n^3 = u(t_n, \varphi_n^1 + 2hu_n^2, \varphi_n^2) \\ u_n^4 = u(t_n, \varphi_n^1 + hu_n^3, \varphi_n^2) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_n^1 = v(t_n, \varphi_n^1, \varphi_n^2) \\ v_n^2 = v(t_n, \varphi_n^1, \varphi_n^2 + 2hv_n^1) \\ v_n^3 = v(t_n, \varphi_n^1, \varphi_n^2 + 2hv_n^2) \\ v_n^4 = v(t_n, \varphi_n^1, \varphi_n^2 + hv_n^3) \end{cases}$$

Chapitre 5

Conclusion provisoire

Le travail réalisé dans le cadre d'ASSIMAGE ne fait que commencer, seuls trois mois séparent la réunion officielle de lancement de la rédaction de cette conclusion provisoire. Il m'est donc difficile de conclure sur le travail réalisé par l'ensemble des équipes impliquées dans cette ACI. Je peux néanmoins faire quelques remarques sur le présent document et détailler les prochaines étapes, qui correspondront au travail qu'il me sera nécessaire de réaliser dans les mois à venir.

Cette ACI regroupant des équipes pluridisciplinaires, l'une des principales motivations de ce document était de proposer un tour d'horizon des différentes méthodologies pouvant être mise en œuvre par chacune de ces disciplines. Ce document devra comporter plusieurs ajouts: le chapitre consacré à l'assimilation nécessite un état de l'art concernant les techniques d'assimilation séquentielles; le chapitre océanographique devrait présenter quelques modèles de circulation existant (par exemple les modèles OPA et MICOM) et comment ces modèles sont couplés à des modèles de prévision atmosphérique (comme LMDZ) ou biologiques (comme LOBSTER); l'ajout d'un chapitre dédiés aux données images est également nécessaire (type de capteurs, résolutions, *etc*); enfin une section concernant les méthodes de suivi de structures ou de points caractéristiques devra être intégrée au chapitre image. Bien que les diverses applications proposées couvrent toutes les composantes du cycle de l'eau, l'océanographie a été choisie pour initier les travaux. Ce document devra bien entendu être complété pour les autres applications de l'ACI.

En ce qui concerne le travail qu'il me faudra réaliser prochainement au sein d'ASSIMAGE, les différentes étapes sont: la mise au point d'une méthode d'estimation de champ dense adaptée à la problématique océanographique, la validation sur des séquences d'images synthétiques directement issues des modèles de circulation océanographique, la mise en pratique sur des images issues d'imageurs réels (ces différentes étapes se font en collaboration avec les équipes CLIME et VISTA de l'INRIA); l'application à d'autres thèmes de l'ACI des méthodes développées, par exemple sur les flux tourbillonnant de particules polluées du CEMAGREF Rennes. Il faudra aussi faire une évaluation des erreurs d'observation générées par les opérateurs de traitement d'image: c'est une étape primordiale pour réaliser l'assimi-

lation de données, qui doit être réalisée conjointement avec les spécialistes de cette discipline (équipe IDOPT). De même il faudra évaluer l'apport, pour la prévision, de l'assimilation de ces données structurées. D'autre-part, les autres volets applicatifs de l'ACI devront sans aucun doute faire l'objet de méthodologies de traitement d'image différentes, en particulier les méthodes de suivi par mise en correspondance et propagation de fronts devraient s'avérer intéressantes en hydrologie, en glaciologie et surtout pour le suivie de coulées de boue ou de neige. Il faudra alors s'intéresser à l'intégration des lois physiques d'évolution dans ces méthodes et avoir les mêmes démarches que pour les méthodes d'estimation de champ dense (validation théorique, validation pratique, évaluation des erreurs d'observation, évaluation de l'apport de ces données pour la prévision).

A l'interface de trois disciplines scientifiques: géophysique, assimilation de données et traitement d'image, les enjeux scientifiques d'ASSIMAGE sont particulièrement motivants. Les prochains mois de travail devraient être passionnants.

Bibliographie

- [1] L. Amodei. A vector spline approximation. *Journal of approximation theory*, 67:51–79, 1991.
- [2] E. Blayo. Modélisation numérique et assimilation de données en océanographie - Habilitation à Diriger des Recherches, 2002.
- [3] E. Blayo. Notions de mécanique des fluides, 2003-2004. Notes de cours, DEA de mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- [4] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods, 1999. Training Course of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts.
- [5] D. Béréziat. *Estimation et suivi de structures déformables en mouvement: application à la météorologie*. PhD thesis, Université de Paris Sud - Paris XI, 1999.
- [6] A. Chorin. *Vorticity and Turbulence*. Springer, 1998.
- [7] I. Cohen and I. Herlin. Optical flow and phase portrait methods for environmental satellite image sequences. In *Proceedings of the 4th European Conference on Computer Vision 1996*, Oxford, UK, April 1996.
- [8] J. Coirier. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1997.
- [9] T. Corpetti. *Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides*. PhD thesis, Université de Rennes I, July 2002.
- [10] M. Fisher. Assimilation techniques: 3dvar, 2001. Training Course of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts.
- [11] M. Fisher. Assimilation techniques: 4dvar, 2001. Training Course of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts.
- [12] B. Horn and B. Schunck. Determining optical flow. *AI*, 17(1-3):185–203, August 1981.
- [13] F.-X. Le Dimet. Assimilation de données pour les fluides géophysiques, 2002. Support de cours, Ecoles CEA-EDF-INRIA.
- [14] F.-X. Le Dimet. Assimilation: Etude de techniques d'assimilations de données image dans des modèles de simulation de fluides géophysiques, texte de proposition, 2003. ACI Masse de données.
- [15] M. Lévy. Mesoscale variability of phytoplankton and new production: Impact of the large-scale nutrient distribution. *Journal of Geophysical Research*, 2003.
- [16] E. Mémin and P. Pérez. Optical flow estimation and object-based segmentation with robust techniques. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(5):703–719, May 1998.

- [17] J.-M. Odobez. *Estimation, détection et segmentation du mouvement: une approche robuste et markovienne*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Mention Traitement du Signal et Télécommunications, December 1994.
- [18] T. Pendruff, P. Brasseur, C.-E. Testut, B. Barnier, and J. Verron. A four year eddy-permitting assimilation of sea-surface temperature and altimetric data in the South Atlantic Ocean. *Journal of Marine Research*, 2002.
- [19] B. Sportisse. Modélisation, simulation et assimilation de données pour la pollution atmosphérique, 2004. Cours ENSTA et DEA M2SAP.
- [20] R. Stewart. *Introduction to Physical Oceanography*. Department of Oceanography, Texas A&M University, 2002.
- [21] D. Suter. Motion estimation and vector splines. In *CVPR94*, 1994.
- [22] E. Valur Hólm. Assimilation algorithms, 2003. Training Course of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts.
- [23] X. Vigan, C. Provost, R. Bleck, and P. Courtier. Sea surface velocities from sea surface temperature image sequences. *Journal of Geophysical Research*, August 2000.
- [24] D.D. Wahl and J.J. Simpson. Physical processes affecting the objective determination of near-surface velocities from satellite data. *Journal of Geophysical Research*, 1990.