

CNRS



Université Paul Sabatier (Toulouse 3)

Mathématiques pour l'Industrie

et la Physique.

# Les méthodes de gradient topologique

DIDIER AUROUX, JÉRÔME FEHRENBACH

# Plan de l'exposé

---

1. Qu'est-ce que le gradient topologique ?
2. Des méthodes qui ont fait leurs preuves
3. Restauration d'image
4. Segmentation

# 1. Qu'est-ce que le gradient topologique ?

---

Les méthodes d'**asymptotique topologique** ont été développées pour l'**optimisation de forme** [Schumacher, Sokolowski, Masmoudi, Guillaume].

Cadre général : soit une **EDP** dépendant d'un domaine  $\Omega$ ,  $u_\Omega$  la solution de cette EDP. On considère également une **fonction coût**  $j(\Omega) = J(u_\Omega)$  :

$$\Omega \longmapsto u_\Omega \longmapsto j(\Omega) = J(u_\Omega).$$

L'asymptotique topologique étudie comment varie la fonction coût lorsque l'on effectue un "trou" de forme  $B$  et de taille  $\rho$  dans le domaine  $\Omega$  à l'endroit  $x$  : d'une manière générale

$$j(\Omega \setminus \rho B_x) - j(\Omega) = f(\rho)g(x) + o(f(\rho)),$$

avec  $f(\rho) > 0$  et  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0$ .

$g$  est le **gradient topologique**.

On a intérêt à trouver là où le gradient topologique est le plus négatif.

---

exemple de calcul :

*cadre* : dans  $\mathcal{V}$  espace de Hilbert. Formulation faible de l'EDP :

$$a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

( $a_\rho, l_\rho$  unif.continues,  $a_\rho$  unif.coercive)

**hypothèses :**

$$\begin{cases} \|a_\rho - a_0 - f(\rho)\delta_a\| = o(f(\rho)) \\ \|l_\rho - l_0 - f(\rho)\delta_l\| = o(f(\rho)) \\ J_\rho(v) - J_\rho(u) = DJ_0(u - v) + f(\rho)\delta J + o(f(\rho)) \end{cases}$$

soit  $p_0$  la solution du problème adjoint :

$$a_0(w, p_0) = -DJ_0(u_0)w, \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

Alors le gradient topologique vaut [Masmoudi] :

$$\delta_J(u_0) + \delta_a(u_0, p_0) - \delta l(p_0).$$

---

En résumé : si l'EDP et la fonction coût le permettent, le calcul du gradient topologique se fait avec :

- 1) résolution de l'état direct  $u_0$
- 2) résolution de l'état adjoint  $p_0$
- 3) des calculs "élémentaires" en chaque point

## 2. Des méthodes qui ont fait leurs preuves

---

Ce principe a été appliqué à :

- l'équation de Laplace
- l'élasticité linéaire [Guillaume-Garreau-Masmoudi]
- l'équation de Stokes [Guillaume-Sid Idriss]
- l'équation de Helmholtz [Samet-Amstutz-Masmoudi]
- l'équation de Navier-Stokes [Amstutz]
- élastographie [Fehrenbach-Masmoudi]

Intérêt : on peut prendre des fonctions de coût globales.

---

Localisation de fissures [Masmoudi-Amstutz-Horchani] (équation de Laplace)

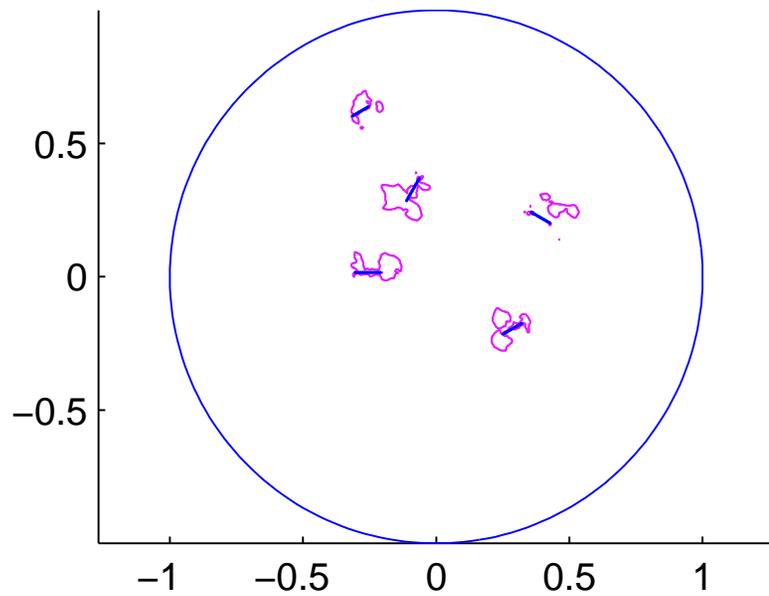


FIG. 1 – les fissures, isovalues du gradient topologique

---

Optimisation d'écoulement [Masmoudi-Hassine] (éq. de Stokes) : on souhaite maximiser le flux à pression d'entrée donnée :

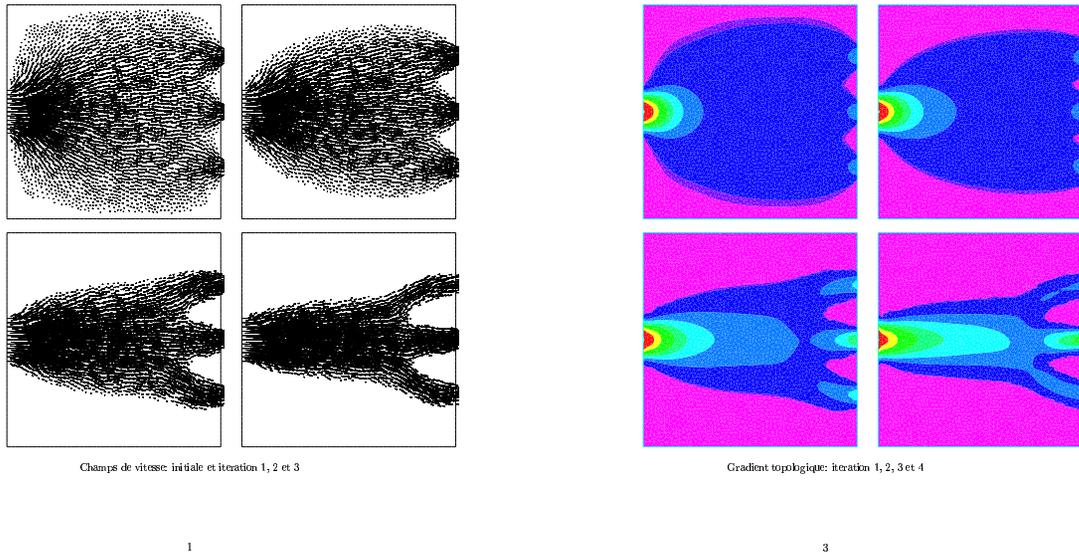
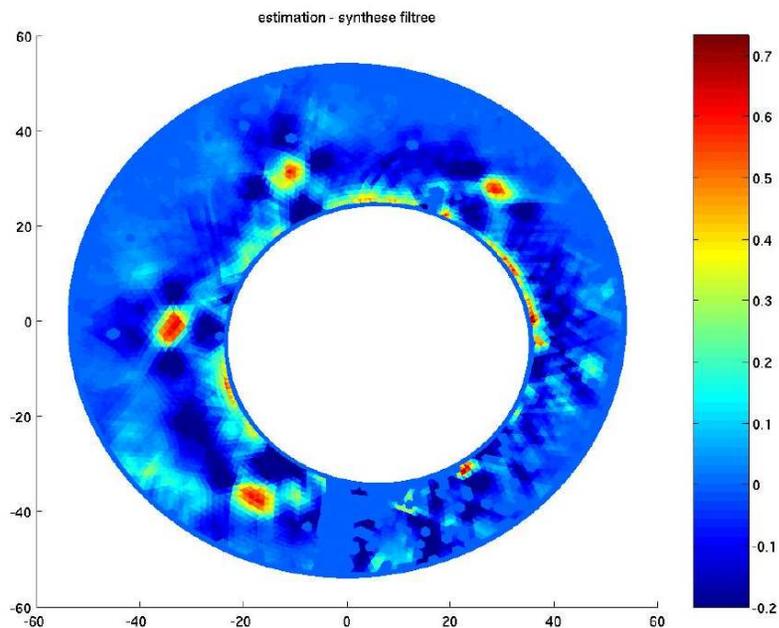


FIG. 2 – les itérations du domaine ; le gradient topologique

---

Elastographie [Fehrenbach-Masmoudi] (élasticité plane) :

on souhaite localiser des inhomogénéités dans un matériau connaissant son déplacement radial sous l'action d'une force :



### 3. Application à la restauration d'image

---

On utilise la méthode EDP de restauration d'images :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla u) + u = v & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

Il s'agit de choisir la fonction  $c$  de façon à obtenir une restauration satisfaisante.

Idée classique : donner à  $c$  une **petite valeur sur les contours de l'image** : une méthode de type **gradient topologique** donne des résultats satisfaisants [Masmoudi, Jafaar]. En effet, on peut considérer que les contours forment un domaine  $\omega$  (=une réunion de pixels) tel que

$$c = 1 \text{ sur } \Omega \setminus \omega \quad \text{et} \quad c = \epsilon \text{ sur } \omega \text{ (avec p.ex. } \epsilon = 10^{-3}\text{)}.$$

Il s'agit de trouver le domaine  $\omega$  : on part de  $\Omega$ , et on calcule le gradient topologique d'insertion à l'endroit  $x$  d'un "morceau de contour"...

---

Plus précisément : si on insère une fissure  $\sigma_\rho$  (=ellipsoïde très aplati) de taille  $\rho$  et de normale  $\mathbf{n}$ , cela revient à chercher  $\mathbf{u}_\rho$  solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla\mathbf{u}_\rho) + \mathbf{u}_\rho = v & \text{dans } \Omega_\rho = \Omega \setminus \sigma_\rho, \\ \partial_n \mathbf{u}_\rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\rho, \end{cases} \quad (2)$$

où  $c$  est la fonction constante par morceaux :

$$c = \begin{cases} \epsilon & \text{dans } \sigma_\rho, \\ 1 & \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases} \quad \epsilon > 0 \quad (3)$$

Pour restaurer les images en dégradant les contours le moins possible, on cherche  $c$  qui minimise la fonction coût suivante :

$$j(\rho) = J(\mathbf{u}_\rho) = \int_{\Omega_\rho} \|\nabla\mathbf{u}_\rho\|^2 + \alpha|\omega|. \quad (4)$$

---

On considère  $p$  solution du **problème adjoint** :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(c\nabla p) + p = -\partial_u J(u), & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n p = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

**Résultat** : [Masmoudi, Jafaar]

Dans le cas d'une fissure avec condition aux limites  $\partial_n u = 0$  sur  $\partial\sigma$ , on a :

$$j(\rho) - j(0) = \rho^2 G(x_0, n) + o(\rho^2), \quad (6)$$

avec

$$G(x_0, n) = -\pi(\nabla u(x_0) \cdot n)(\nabla p(x_0) \cdot n) - \pi|\nabla u(x_0) \cdot n|^2. \quad (7)$$

---

Pour la restauration d'image :

- 1) résolution de l'état direct  $u_0$  avec  $c \equiv 1$  à l'aide d'une DCT.
- 2) résolution de l'état adjoint  $p_0$  avec  $c \equiv 1$  à l'aide d'une DCT
- 3) calcul du gradient topologique  $g(x)$  : on prend alors  $c = 1$  si  $g > seuil$  et  $c = 10^{-3}$  si  $g < seuil$ .
- 4) résolution de  $u_c$  : on utilise le gradient conjugué préconditionné par la matrice obtenue pour  $c \equiv 1$  (car les valeurs où  $c = 10^{-3}$  forment un "petit" ensemble)

---

Exemple d'application :



## Un autre exemple (classique)

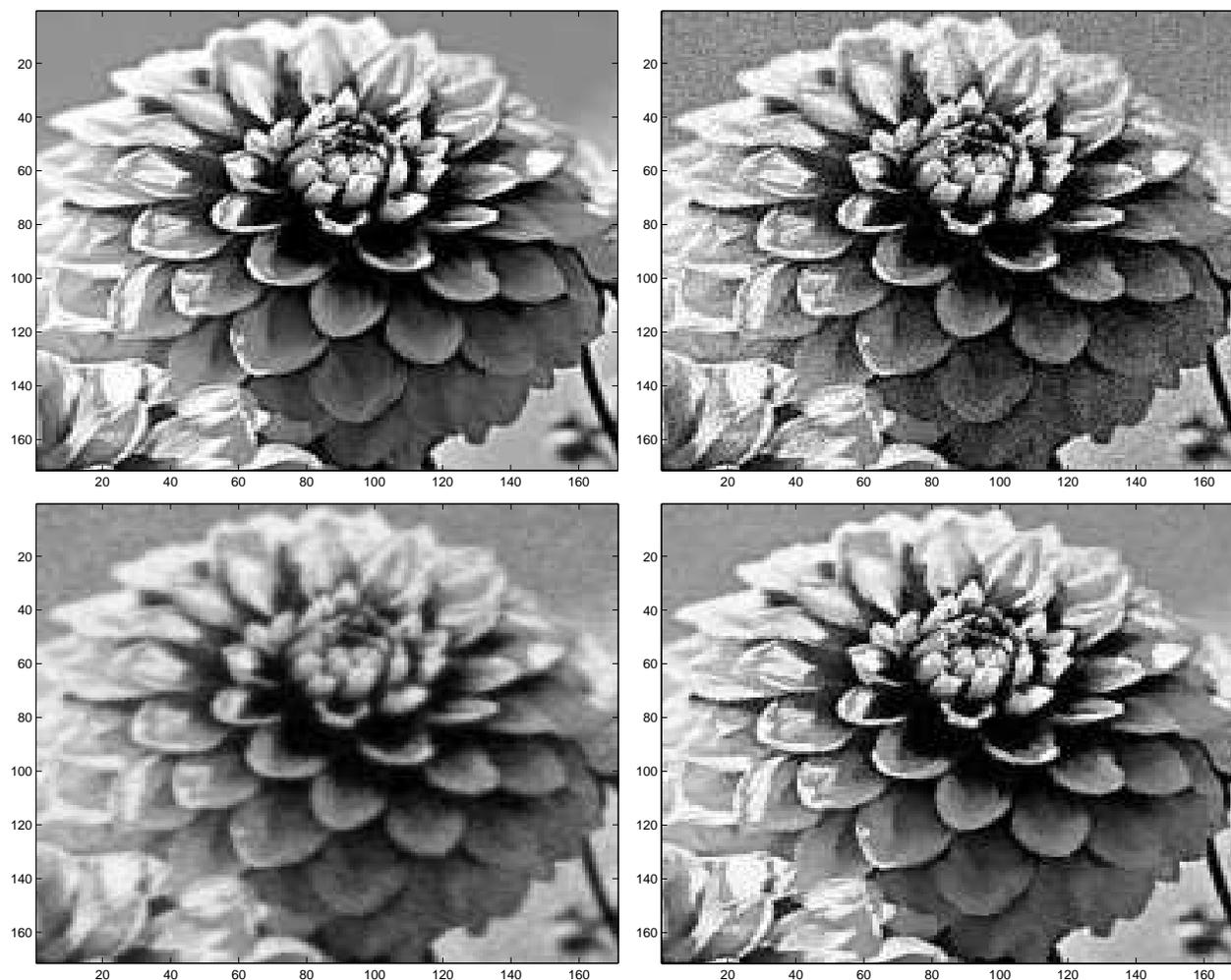


FIG. 3 – image de départ; image bruitée; restauration  $\phi(|\nabla u|)$ ; restauration gradient topologique

---

Avantages :

- on peut trouver l'**orientation** du contour (fissure)
- "**peu**" de calculs : (en restauration d'image, une itération suffit) on trouve l'état direct et l'état adjoint avec la DCT, il reste à résoudre le système avec la valeur de  $c$  trouvée : on préconditionne par la valeur  $c \equiv 1$ .
- comme on adopte le principe du "tout ou rien", les calculs sont rapides.

## 4. Application à la classification

---

Les méthodes de gradient topologique permettent aussi la classification.

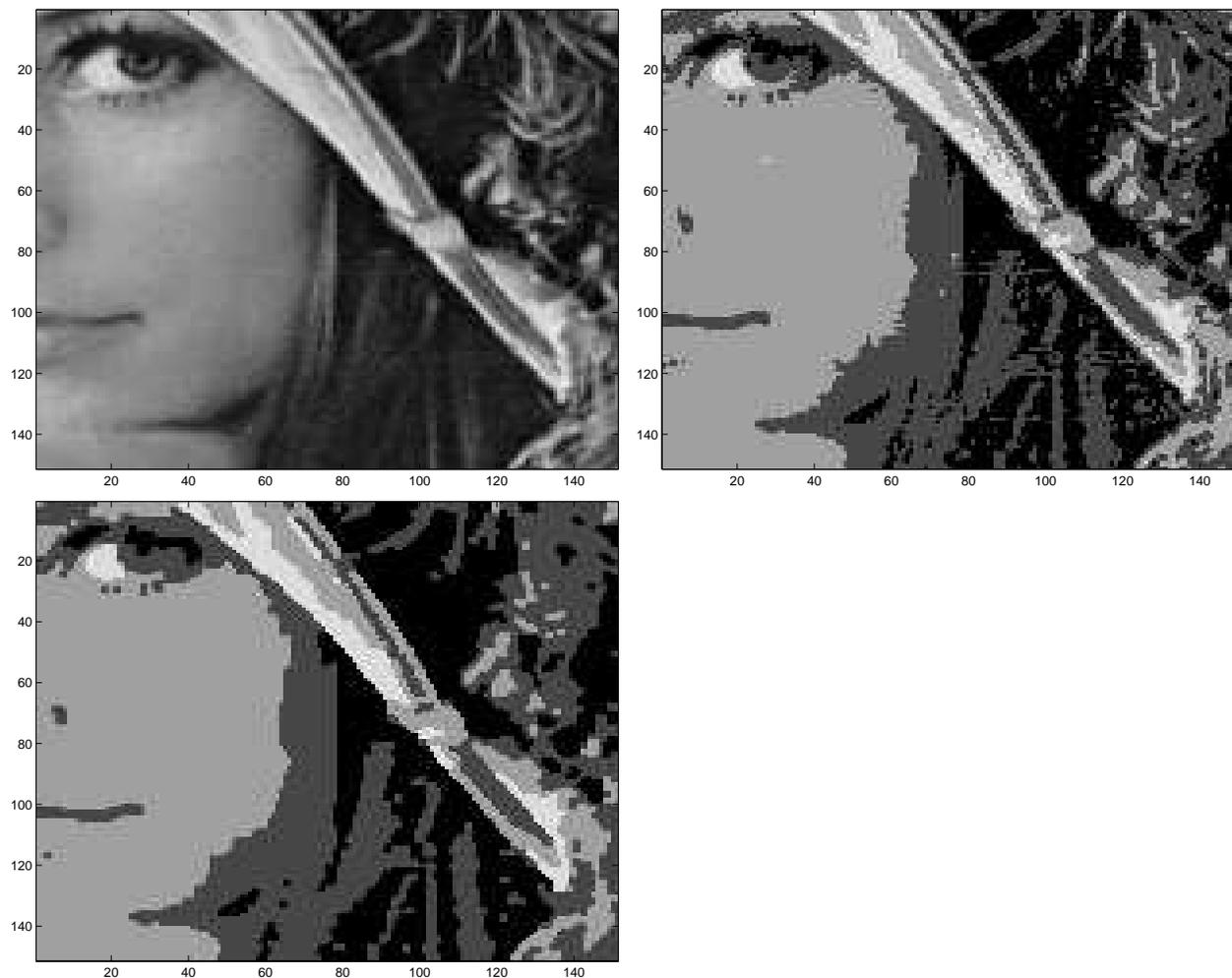


FIG. 4 – Image initiale ; niveaux de gris ; après classification