

Modèle de particules pour l'analyse de mouvements fluides

Anne Cuzol et Etienne Mémin

IRISA

3 février 2005

Introduction

Problème d'estimation de mouvement fluide

Notions utiles sur les champs de vecteurs 2D

Méthode de particules de vortex

Présentation

Particules de vortex et de source

Problème d'estimation à partir des données image

Représentation paramétrique du mouvement

Modèle de variation de luminance

Estimation

Résultats

Problème de suivi à partir d'une séquence d'images

Navier-Stokes dans le cadre de la méthode de vortex

Méthode de la *marche aléatoire*

Application au suivi de structures fluides

Problème d'estimation de mouvement fluide

- Estimation d'un champ de vecteurs bidimensionnel $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, Ω correspondant au domaine image. $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$ avec $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathbf{x} = (x, y)$.
- Recherche d'une solution **dense** mais de **faible dimension**, pouvant par exemple être utilisée pour un problème de suivi temporel.
- Nécessité d'une méthode adaptée aux mouvements **fluides** (préservant les zones de vorticité et de divergence du champ).

Propriétés relatives aux champs de vecteurs

La **décomposition de Helmholtz** stipule que tout champ de vecteur s'écrit comme somme d'une composante **irrotationnelle** (à vorticité nulle) et d'une composante **solénoïdale** (à divergence nulle) :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{irr} + \mathbf{w}_{sol},$$

où :

$$\mathbf{w}_{irr} = \nabla\phi \text{ avec } \phi \text{ potentiel de vitesse,}$$

$$\mathbf{w}_{sol} = \nabla\psi^\perp \text{ avec } \psi \text{ fonction de courant.}$$

Écriture des composantes du champ à l'aide de l'*intégrale de Bio-Savart*

- Les fonctions de potentiel ψ et ϕ sont solutions de deux **équations de Poisson** : $\Delta\psi = -\text{curl } \mathbf{w}_{sol}$ et $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{w}_{irr}$.
- Les solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= -G \otimes \text{curl } \mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}), \\ \phi(\mathbf{x}) &= G \otimes \text{div } \mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

avec $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x}|)$.

- Les composantes s'écrivent à partir de la **vorticité** et la **divergence** du champ :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) &= -K^\perp \otimes \text{curl } \mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) &= K \otimes \text{div } \mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

avec $K(\mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi|\mathbf{x}|^2}$.

Discrétisation de la vorticité

- **Idée** : approcher la vorticité d'un champ \mathbf{w} par un nombre limité d'éléments appelés **particules de vortex**.
- Initialement : approximation par une somme discrète de Diracs centrés en des **vortex ponctuels** \mathbf{z}_i :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i).$$

- Problème dans l'évaluation de l'intégrale de Bio-Savart.
- **Solution** : lisser la mesure de Dirac.

Particules de vortex et de source

- La vorticité est finalement approchée par une somme de fonctions **radiales** de paramètres ϵ_i , centrées en \mathbf{z}_i :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i f_{\epsilon_i}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i).$$

- La divergence est approchée de manière similaire :

$$\text{div } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i f_{\epsilon_i}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i),$$

- Certains choix judicieux pour f_ϵ conduisent à une forme explicite pour le noyau lissé K_ϵ .

Exemple : $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{\epsilon^2}} \rightarrow K_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi|\mathbf{x}|^2} (1 - e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{\epsilon^2}}).$

Représentation paramétrique des deux composantes du mouvement

La **discrétisation** de l'intégrale de Bio-Savart conduit finalement à l'expression suivante pour chaque composante :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=0}^{n^{sol}} \gamma_i^{sol} \frac{(\mathbf{z}_i^{sol} - \mathbf{x})^\perp}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{sol}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{sol}|^2}{\epsilon_i^{sol2}}} \right),$$

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=0}^{n^{irr}} \gamma_i^{irr} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i^{irr}|^2}{\epsilon_i^{irr2}}} \right),$$

avec $\beta = \left(\{ \mathbf{z}_i^{sol}, \gamma_i^{sol}, \epsilon_i^{sol} \}_{i=1:n^{sol}}, \{ \mathbf{z}_i^{irr}, \gamma_i^{irr}, \epsilon_i^{irr} \}_{i=1:n^{irr}} \right)$ vecteur de paramètres à estimer.

Modèle de variation de luminance et problème de minimisation associé

- Modèle de données construit à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{dl}{dt} = l \operatorname{div} \mathbf{w}.$$

- Forme intégrée pour les grands déplacements :

$$l(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - l(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Problème de minimisation : $\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \mathcal{F}(l, \mathbf{w}(\beta))$, avec :

$$\mathcal{F}(l, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [l(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}), t + 1) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - l(\mathbf{x}, t)]^2 dx.$$

Méthode d'estimation

- Schéma d'estimation **incrémental** de type Gauss-Newton associé à une représentation **multirésolution** des données :

$$\mathcal{F}(I, \mathbf{h}) = \int_{\Omega} \left[\exp(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}) \{ (\tilde{I} \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{I})^T \mathbf{h} + \tilde{I} \} - I \right]^2 d\mathbf{x}.$$

- L'optimisation par rapport aux paramètres de force γ_i et d'amplitude ϵ_i est résolue par la méthode de **Fletcher Reeves**, extension du gradient conjugué. Cette estimation est réalisée pour des positions fixes des particules.
- Les positions sont ensuite ajustées automatiquement.

Ajustement des positions des particules

Idée : utilisation de la procédure **mean shift**.

- Construction d'une surface $S_{\mathbf{z}_{1:n}^k}$ pour l'ensemble des particules, combinant deux informations :
 - L'erreur de reconstruction résultant de l'estimation précédente du champ,
 - Les amas de vorticité et de divergence.
- *A priori* gaussien sur la position de chaque particule :

$$\mathbf{z}_i^{k+1} | \mathbf{z}_{1:n}^k \sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_i^k, \sigma_i^k).$$
- Chaque particule est déplacée par mean shift vers le mode le plus proche de la distribution conditionnelle $p_{\mathbf{z}_i^{k+1} | \mathbf{z}_{1:n}^k, S_{\mathbf{z}_{1:n}^k}}$.

Mean shift : procédure itérative convergeant vers le point stationnaire le plus proche d'une densité de probabilité, estimée non paramétriquement par une méthode de type noyau.

Résultats

Ecoulement fluide 2D, avec 100 particules :

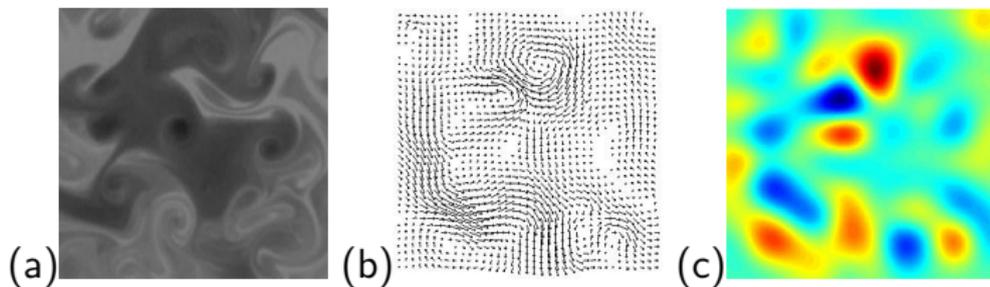


FIG.: (a) Fumée; (b) Champ estimé; (c) Vorticité estimée.

Avec 25 particules :

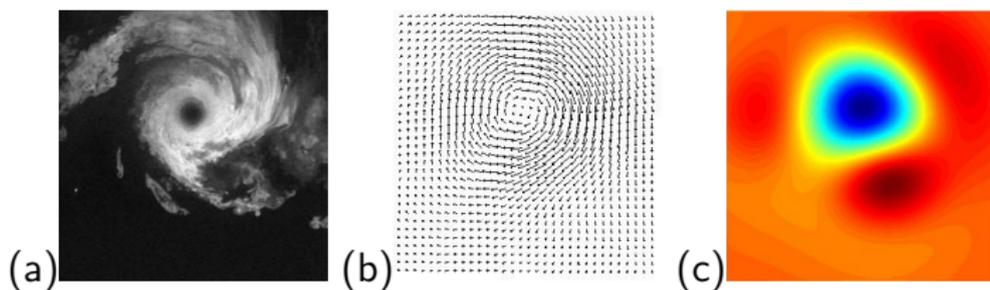


FIG.: (a) ONERA; (b) Champ estimé; (c) Vorticité estimée.

Extension à un problème de suivi dans une séquence d'images

- **But** : suivi temporel de structures fluides à partir d'une séquence d'images.
- Pour la composante **solenoïdale** : utilisation de l'équation de Navier-Stokes pour décrire le mouvement des **particules de vortex**.

Navier-Stokes dans le cadre de la méthode de vortex

- Formulation **vorticité-vitesse** de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = \nu \Delta \xi$$

- La **convection** et la **diffusion** de la vorticité sont traitées séparément :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = 0 \text{ et } \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi.$$

- Dans le cadre **Lagrangien** de la méthode de particules de vortex :

$$\frac{d\mathbf{z}_i}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{z}_i) \text{ avec } \frac{d\xi_i}{dt} = 0 \text{ et } \frac{d\mathbf{z}_i}{dt} = 0 \text{ avec } \frac{d\xi_p}{dt} = \nu \Delta \xi(\mathbf{z}_i).$$

Méthode de la *marche aléatoire*

- La partie **convection** est réalisée en déplaçant chaque particule \mathbf{z}_i selon $w(\mathbf{z}_i)$. La vorticité est ainsi transportée par la particule.
- La **diffusion** de la vorticité est ensuite simulée en appliquant un mouvement Brownien à chaque particule.
- L'évolution de la particule est alors entièrement décrite par le **processus de diffusion de Itô** :

$$d\mathbf{z}_i(t) = w(\mathbf{z}_i(t))dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{B}_i(t)$$

- Le processus est discrétisé par un **schéma d'Euler** :

$$\mathbf{z}_i^{n+1} = \mathbf{z}_i^n + \mathbf{w}(\mathbf{z}_i^n)\Delta t + \eta_i$$

$$\text{avec } \eta_i \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 2\nu\Delta t & 0 \\ 0 & 2\nu\Delta t \end{pmatrix}\right).$$

Application au suivi de structures fluides

- L'**initialisation** est directement donnée par la méthode d'estimation qui fournit :
 - Un ensemble de **positions** pour les particules de vortex décrivant le champ,
 - Une description de la **vorticité** transportée par chaque particule à travers le coefficient de force et l'amplitude associés.
- Les particules sont ensuite propagées à l'aide du processus de Itô.

Rab-6

À venir...

- Introduction d'un processus de **mesure** :
 - **non linéaire** (champ de vitesse estimé par une autre méthode)
 - **linéaire** (position observée d'une particule par mean shift, corrélation ou autre méthode)
- Procédure de filtrage stochastique non linéaire implémenté par un **filtre particulaire** (continu/discret).

Suivi de courbes déformables par méthodes d'assimilation de données

N. PAPADAKIS E.MEMIN

IRISA

3 février 2005

Présentation

Suivi de courbes :

- ▶ Problème important en Vision par Ordinateur
- ▶ Actuellement, pas de solution satisfaisante (robuste aux occultations, aux bruits et intégrant un modèle d'évolution)
- ▶ Idée : S'appuyer sur les techniques d'Assimilation Variationnelles (4DVAR)

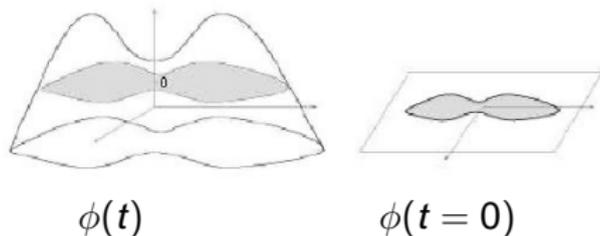
Modèle d'évolution

Suivi de formes a l'aide de contours fermés

Représentation basée sur l'évolution d'une Level Set ϕ de niveau 0

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \vec{n} - \epsilon k) \cdot \|\vec{\nabla} \phi\| = 0$$

- ▶ $\vec{\omega}$: Champs denses de déplacement (données)
- ▶ \vec{n} : Déplacement normal a la courbe
- ▶ k : Courbure pour lisser selon les contours



Système complet

- ▶ ϕ : Surfaces implicites représentant le contour suivi
- ▶ Y : Surfaces d'observations construites à partir de processus de segmentation instantané (distance signée à la courbe observée)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + M(\phi) = \varepsilon_m \\ \phi(\mathbf{0}) = \phi_b(\mathbf{0}) + \varepsilon_b \\ Y_n = H_n(\phi) + \varepsilon_{0,n} \end{array} \right. \quad n = 1..N \quad (1)$$

Avec Q,B et R les matrices de covariances associées

Assimilation de données

Minimisation de $J(\phi)$

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \frac{1}{2} \int_I \int_I \int_0^\tau \int_0^\tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + M(\phi) \right)^T \mathbf{Q}^{-1}(\xi, t, \xi', t') \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + M(\phi) \right) dt dt' d\xi d\xi' \\ &+ \frac{1}{2} \int_I \int_I (\phi(\xi, 0) - \phi_b(\xi, 0))^T \mathbf{B}^{-1}(\xi, \xi') (\phi(\xi', 0) - \phi_b(\xi', 0)) d\xi d\xi' \\ &+ \frac{1}{2} \int_I \int_0^\tau (\mathbf{y} - H(\phi))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - H(\phi)) dt d\xi \end{aligned} \tag{2}$$

- ▶ Introduction de la variable adjointe λ

$$\lambda(\xi, t) = \int_I \int_0^\tau \mathbf{Q}^{-1} \left(\frac{\partial \phi(\xi', t')}{\partial t} + M(\phi(\xi', t')) \right) dt' d\xi'$$

- ▶ Linéarisation de l'opérateur M :

$$M(\phi + \delta\phi) = M(\phi) + \frac{\partial M}{\partial \phi} \delta\phi + \mathbf{o}(\|\delta\phi\|^2)$$

Assimilation de données

$$\begin{aligned}\lambda(\xi, \tau) &= 0 \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial \phi}\right)^* \lambda &= \int_1 \int_0^\tau \left(\frac{\partial H}{\partial \phi}\right)^* R^{-1} (y - H(\phi)) dt' d\xi' \\ \lambda(\xi, 0) &= \int_1 \left(B^{-1}(\phi(\xi', 0) - \phi_b(\xi', 0)) \right) d\xi' \\ \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t} + M(\phi(\xi, t)) &= \int_1 \int_0^\tau Q(\xi, t, \xi', t') \lambda(\xi', t') dt' d\xi' \quad (3)\end{aligned}$$

- ▶ Avec la linéarisation de ϕ , on sépare (3) en 2 équations distinctes sur la condition initiale et l'incrément :

$$\frac{\partial \phi_b(\xi, t)}{\partial t} + M(\phi_b(\xi, t)) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta \phi(\xi, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial \phi}\right) \delta \phi(\xi, t) = \int_1 \int_0^\tau Q(\xi, t, \xi', t') \lambda(\xi', t') dt' d\xi' \quad (5)$$

Exemple sur mouvement fluide

Segmentation Initiale

Résultats

Suivi d'objet déformable

Segmentation Initiale

Résultats

Détails d'implémentation

Linéarisation :

$$M(\phi) = \vec{\nabla} \phi^T \cdot \vec{\omega} - \epsilon \left(\Delta \phi - \frac{\vec{\nabla} \phi^T \nabla^2 \phi \vec{\nabla} \phi}{\|\vec{\nabla} \phi\|^2} \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \phi} \delta \phi = \vec{\nabla} \delta \phi^T \cdot \vec{\omega} - \epsilon \left[\Delta \delta \phi - \frac{\vec{\nabla} \phi^T \nabla^2 \delta \phi \vec{\nabla} \phi}{\|\vec{\nabla} \phi\|^2} + 2 \frac{\vec{\nabla} \phi^T \nabla^2 \phi}{\|\vec{\nabla} \phi\|^2} \left(\frac{\vec{\nabla} \phi \vec{\nabla} \phi^T}{\|\vec{\nabla} \phi\|^2} - Id \right) \vec{\nabla} \delta \phi \right]$$

Discrétisation implicite de $\vec{\nabla} \phi$ et semi-implicite centrée de $\nabla^2 \phi$:

$$M_{\phi_{i,j}^k} \phi_{i,j}^{k+1} = \begin{pmatrix} D_x^0 \phi_{i,j}^{k+1} \\ D_y^0 \phi_{i,j}^{k+1} \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} - \frac{\epsilon}{\|\vec{\nabla} \phi_{i,j}^k\|^2} \begin{pmatrix} -D_y^0 \phi_{i,j}^k \\ D_x^0 \phi_{i,j}^k \end{pmatrix}^T \nabla^2 \phi_{i,j}^{k+1} \begin{pmatrix} -D_y^0 \phi_{i,j}^k \\ D_x^0 \phi_{i,j}^k \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \phi_{i,j}^k} \delta \phi_{i,j}^{k+1} = M_{\phi_{i,j}^k} \delta \phi_{i,j}^{k+1} - 2 \frac{\epsilon}{\|\vec{\nabla} \phi\|^4} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x^0 \delta \phi_{i,j}^{k+1} \\ D_y^0 \delta \phi_{i,j}^{k+1} \end{pmatrix}$$

et pour le modèle tangent linéaire :

$$A = D_x^0 D_y^0 (-D_{xx}^0 D_y^0 + D_{xy}^0 D_x^0) + (D_y^0)^2 (D_{yy}^0 D_x^0 - D_{xy}^0 D_y^0)$$

$$B = D_x^0 D_y^0 (-D_{yy}^0 D_x^0 + D_{xy}^0 D_y^0) + (D_x^0)^2 (D_{xx}^0 D_y^0 - D_{xy}^0 D_x^0)$$