

# On the convergence of FSG method

SAMI NABI-Universite Paris 1

February 18, 2016

Premia 18

## 1 Introduction

Au cours des dernières années, les besoins de gestion des risques financiers se sont multipliés et ont suscité le développement de contrats financiers tels que les contrats à terme fermes et les contrats à terme conditionnels appelés options .

La finance de marché s'est alors amorcée pour étudier l'efficience des marchés financiers et réduire les possibilités de spéculations et d'arbitrages générant, dans plusieurs cas, des bulles financières qui ont déstabilisé les systèmes économiques de plusieurs pays.

Dans ce cadre, la valorisation des options représente un axe principal de la recherche en mathématiques financières. Les travaux de F. Black et M. Scholes ont ouvert la porte à la détermination de formules exactes des prix des options. Cependant, pour beaucoup d'entre elles les formules exactes ne sont pas encore déterminées et on a recours de plus en plus aux méthodes numériques. Ces dernières sont multiples et leur efficacité en terme de vitesse convergence et de précision varie en fonction du type de l'option considéré.

Plusieurs algorithmes utilisés pour la valorisation d'options sont issues des méthodes d'arbres qui comptent parmi les méthodes numériques les plus populaires. Souvent les études de la convergence théorique du prix approché, fourni par l'algorithme, vers le prix exact de l'option manquent et on se contente des études numériques.

C'est dans ce cadre que se situe notre étude. Il s'agit d'étudier la convergence théorique de "l'algorithme de la méthode Forward Shooting Grid (FSG)" pour les options sur moyenne et les options lookback. Cet algorithme a été présenté par Barraquand et Pudet en 1996 (cf [2]). Mais leur preuve

théorique de la convergence du prix approché vers le prix exacte de l'option, lorsque le nombre d'itérations tends vers l'infini, est erronée d'où l'intérêt de notre étude.

Dans la section (2) nous rappelons les différents types d'options, leurs caractéristiques, les hypothèses du modèle Black Scholes et le modèle de Cox-Ross-Rubinstein et nous listons les principales méthodes numériques utilisées pour la valorisation des options. Dans la section (3), nous présentons le principe général de la méthode de la FSG telqu'il a été présenté par Barraquand et Pudet et nous l'illustrons pour quatre types d'options. Nous présentons en particulier notre version de l'algorithme pour les options sur moyenne. La preuve de convergence des prix approchés des options sur moyenne (donnés par la nouvelle version de l'algorithme) sera présentée dans la section (5) après avoir rappelé le théorème de Kushner, dans la section (4).

## 2 Rappel sur les options

### 2.1 Généralités

Une option est un contrat à terme conditionnel. Si l'option ne peut être exercée qu'à une date fixée appelée échéance, l'option est dite européenne. Si au contraire, le détenteur de l'option peut l'exercer à n'importe quelle date entre la date d'émission du contrat et l'échéance, l'option est dite américaine. Qu'elle soit européenne ou américaine, on distingue l'option d'achat (call) de l'option de vente (put).

Le call (respectivement put) donne à son acheteur le droit et non l'obligation d'acheter (respectivement vendre) l'actif sous-jacent à un prix d'exercice fixé (ou dont la règle de détermination est fixée) dans le contrat. Quand au vendeur il s'engage à honorer son contrat si l'acheteur exerce son droit.

Si le prix d'exercice est une constante fixée par le contrat, on parle d'options standards. Par contre s'il dépend des évolutions du cours de l'actif sous-jacent, on parle d'options exotiques tels que les options sur trajectoires. Parmi ces dernières on s'intéressera particulièrement aux options lookback et aux options sur moyenne.

- Options lookback :

Ce sont des options dont le payoff terminal dépend non seulement du cours de l'actif sous-jacent à l'échéance mais également de ses fluctuations tout au long de la durée de vie de l'option. L'option d'achat standard lookback paie

$$(S_T - m_T)^+ \text{ où } m_T = \inf_{0 \leq t \leq T} S_t$$

Alors que l'option de vente standard lookback paie

$$(M_T - S_T)^+ \text{ où } M_T = \sup_{0 \leq t \leq T} S_t.$$

- Options sur moyenne :

Appelées aussi options asiatiques sont les options dont le payoff terminal est basé sur la moyenne des valeurs du cours de l'actif sous-jacent durant une période de la vie de l'option. Si  $[T_0, T]$  désigne la période sur laquelle on calcule la moyenne, le payoff terminal est donné par

$$(A_S(T_0, T) - K)^+$$

où

$$A_S(T_0, T) = \frac{1}{T_0 - T} \int_{T_0}^T S_u du$$

et  $K$  est le prix d'exercice. Parceque la variable aléatoire  $A_S(T_0, T)$  n'a pas une distribution log-normale, il est difficile de trouver une formule explicite du prix d'une option asiatique. La majorité des études des options asiatiques se sont basées sur des approximations de  $A_S(T_0, T)$  ou sur l'implémentation directe de la méthode de Monte Carlo. Notons qu'une formule quasi-explicite du prix d'une option asiatique a été développée par Geman et Yor (1992,1993) qui utilisent les processus de Bessel.

- Options sur moyenne capée :

C'est une option qui est différente de l'option sur moyenne dans la mesure où le cours de l'actif est limité vers la baisse par le prix d'exercice  $K$  lors du calcul de la moyenne des cours. Pour cette option  $A_S(T_0, T)$  est donné par

$$A_S(T_0, T) = \frac{1}{T_0 - T} \int_{T_0}^T \max(S_u, K) du$$

Les formules fermes des prix des options lookback et des options sur moyenne existent dans [8] . Par contre, il n'existe pas de formules fermes pour les options américaines lookback et sur moyenne. On a recours à des approximations numériques.

## 2.2 Les hypothèses du modèle de Black et Scholes

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black et Scholes qui repose sur deux types d'hypothèses :

- Hypothèses de marché :

- Le marché est parfait : pas de bid-ask sur les cours de l'action, liquidité parfaite, pas de coûts de transactions et les découverts sont autorisés.
- Les actions ne payent pas de dividendes.
- Il existe un actif sans risque.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.
- Hypothèses sur la dynamique du sous-jacent :  
Le cours du sous-jacent  $S_t$  est régi par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (1)$$

### 2.3 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

La motivation initiale de Cox, Ross et Rubinstein était d'approcher le prix d'une option dans le cadre du modèle de Black et Scholes. La simplicité de la valorisation des options standards par récurrence backward est l'un des éléments qui expliquent la popularité du modèle CRR.

Soit  $N$  le nombre d'itérations de l'algorithme : la dynamique de Black-Scholes sous la probabilité risque-neutre est remplacée par la dynamique du schéma général du CRR

$$\begin{aligned} S^{(n+1)h} &= \begin{cases} u S^{nh} & \text{avec une probabilité } p \\ d S^{nh} & \text{avec une probabilité } 1 - p \end{cases} \end{aligned}$$

où  $h = \frac{T}{N}$ , et  $T$  étant la durée de vie de l'option et avec le choix convenable des paramètres :

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

Notons que  $p = \frac{e^{rh} - d}{u - d}$  est la probabilité risque-neutre dans le schéma général du CRR.

### 2.4 Aperçu sur les méthodes numériques

On peut distinguer trois catégories de méthodes numériques :

- La méthode de Monte Carlo et la méthode de réduction des variances :

La méthode de Monte Carlo se base sur la simulation forward des variables aléatoires. Selon J.Hull (cf [4]), cette méthode est numériquement plus efficace que d'autres méthodes lorsque le nombre de variables stochastiques est

supérieur à trois. Ceci est dû au fait que le temps de convergence est presque linéaire en fonction du nombre de variables, alors qu'il croît de manière exponentielle pour la plupart des méthodes. La méthode de Monte Carlo a l'avantage de donner l'erreur commise. Elle s'applique aux options sur trajectoires. Cependant, elle ne peut pas s'appliquer aux options américaines car il n'y a pas moyen de savoir s'il est optimal d'exercer l'option à un instant donné.

- Les méthodes de différences finies :

Ces méthodes sont utilisées pour approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) de type parabolique, analogues à celles qui interviennent dans le modèle de Black et Scholes.

Selon Barraquand et Pudet ( cf [2] ), lorsqu'il s'agit de problèmes de valorisation d'options sur trajectoires on obtient des EDP dégénérées (la matrice instantanée de covariance est singulière) pour lesquels les méthodes de différences finies explicites sont instables. Quand aux méthodes de différences finies implicites, elles sont stables mais ne sont précises que pour une structure particulière de la volatilité.

- La méthode de l'arbre binomial (multinomiale):

Proposée par Cox, Ross et Rubinstein (1979), cette méthode représente l'évolution du cours de l'actif sous-jacent sous la forme d'un arbre binomial. Elle se base sur l'évaluation backward du prix de l'option sur chacun des noeuds de l'arbre.

Dans la suite nous présentons La méthode de la FSG. Pour le cas des options asiatiques, elle peut être vue comme une extension de la méthode de l'arbre binomial.

### 3 La méthode Forward Shooting Grid (FSG)

La méthode FSG a été présentée par Barraquand et Latombe en 1993 et reprise par Barraquand et Pudet en 1996 ( cf [2] ).

Nous présentons le principe général de la methode tel qu'il a été présenté dans l'article de Barraquand et Pudet. Ensuite, nous illustrons la méthode pour les cas des options lookback et nous donnons notre version de l'algorithme pour les options sur moyenne et sur moyenne capée.

#### 3.1 Le principe général

Soit  $(\Omega, A, P)$  un espace probabilisé et  $(F_t)$  une filtration de cet espace.

Soit  $X = (x_1, \dots, x_d)^t \in R^d$  un vecteur de variables aléatoires, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2)$$

où  $W_t$  est un  $F_t$ -mouvement brownien  $p$ -dimensionnel.

$b : R^+ \times R^d \rightarrow R^d$  et  $\sigma : R^+ \times R^d \rightarrow R^{d \times p}$  sont des fonctions à variables réelles vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} |b(t, X) - b(t, Y)| + |\sigma(t, X) - \sigma(t, Y)| &\leq K |X - Y| \\ |b(t, X)| + |\sigma(t, X)| &\leq K (1 + |X|) \end{aligned}$$

Soit  $r : R^+ \times R^d \rightarrow R^+$  une fonction continue bornée modélisant le taux d'intérêt sans risque.

Soit  $g : R^d \rightarrow R^+$  une fonction  $F_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité risque-neutre  $P$ .

On considère les options européenne et américaines suivantes

L'option européenne :

Considérons l'option européenne d'échéance  $T$ , ayant pour vecteur d'état  $X$  et de payoff terminal

$$C(T, x_1, \dots, x_d) = g(x_1, \dots, x_d)$$

En appliquant la formule de Feynman-Kac, le prix de cette option à l'instant  $t$  est donné par :

$$C(t, x_1, \dots, x_d) = E^P \left( e^{-\int_t^T r(u, X(u))du} g(X(T)) / F_t \right)$$

L'option américaine :

On suppose de plus que  $g$  est à croissance polynômiale.

Soit  $v$  une fonction de classe  $C^{1,2}([0, T] \times R^d)$  à dérivée bornée uniformément en temps et solution de

$$\begin{cases} \max \left( \frac{\partial v}{\partial t} + A_t v - r v, g - v \right) = 0 \text{ sur } [0, T] \times R^d \\ v(T, x) = g(x) \text{ pour } x \in R^d \end{cases}$$

avec

$$A_t v(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et

$$a_{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^p \sigma_{ik}(t, x) \sigma_{kj}(t, x)$$

On note  $(X_s^{t,x}, s \geq t)$  la solution de (...) partant de  $x$  à l'instant  $t$ .

La valeur à l'instant  $t$  de l'option américaine ayant pour vecteur d'état  $X$  est

$$\begin{aligned} C^a &= \sup_{\tau \in \Upsilon(t,T)} E \left( e^{-\int_t^\tau r(u, X(u)) du} g(X_\tau^{t,x}) / F_t \right) \\ &= E \left( e^{-\int_t^{\tau_t^*} r(u, X(u)) du} g(X_{\tau_t^*}^{t,x}) / F_t \right) \end{aligned}$$

où  $\Upsilon(t, T)$  est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans  $[t, T]$  et  $\tau_t^*$  le temps d'arrêt optimal défini par

$$\tau_t^* = \inf \left\{ s \geq t, \quad v(s, X_s^{t,x}) = g(X_s^{t,x}) \right\}$$

Description de la FSG dans un cadre général :

Soit  $(nh)_{n \in N}$  une subdivision de  $[0, T]$  où  $h = \frac{T}{N}$

La méthode de la FSG se base sur les étapes suivantes :

1- Discrétisation des  $d$  variables d'état  $x_1, \dots, x_d$ , en faisant un bon choix (dans le sens de la complexité de l'algorithme) des pas de discrétisation dans les directions des variables dépendant de la trajectoire.

2- Construction d'une chaîne de markov  $(\bar{X}^{nh})_{n \in N}$  approximant le processus continu  $(X_t)$  et vérifiant des conditions de consistance locales qui vont être présentées dans (...).

Notons que les étapes (1) et (2) permettent de construire la suite des grilles de l'espace d'état.

3- Approximation de la valeur de l'option par récurrence backward classique du modèle binomial.

Etape 1:

Pour la discrétisation on choisit  $d$  fonctions  $f_1, \dots, f_d$  tel que

$$\text{pour } i = 1, \dots, d \quad x_{i, j_i^{nh}}^{nh} = f_i(nh, j_i^{nh} \rho_i(nh)) \quad (3)$$

$\rho_i(nh)$  étant le pas de discrétisation dans la direction de la  $i^{\text{ème}}$  variable, à l'instant  $nh$ , à choisir de manière à satisfaire les conditions de consistance locale et de garantir une complexité satisfaisante de l'algorithme.

$j_i^{nh} \in \{0, \dots, (j^*)_i^{nh}\}$  tel que

$$\begin{aligned} x_{i,0}^{nh} &= x_{i,m}^{nh} : \text{la valeur minimale que peut prendre la variable } i \text{ à l'instant } t = nh \\ x_{i,(j^*)_i^{nh}}^{nh} &= x_{i,M}^{nh} : \text{la valeur maximale que peut prendre la variable } i \text{ à l'instant } t = nh \end{aligned}$$

On note  $(X^{nh})$  la discrétisation du vecteur  $X_t$  à l'instant  $t = nh$

Etape 2:

On sait que le mouvement brownien standard est la limite quand  $h \rightarrow 0$  de la distribution binomiale de pas  $\sqrt{h}$ . (cf [1]). Soit  $(\bar{W}^{nh})$  le processus binomial approximant  $(W_t)$  et qui est défini par :

$$P\left(\bar{W}^{(n+1)h} = \bar{W}^{nh} + \epsilon\sqrt{h}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } \epsilon = \pm 1$$

On peut discrétiser l'équation différentielle stochastique (2) par un schéma d'Euler qui converge en moyenne quadratique vers la solution de l'EDS (...):

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(n+1)h} &= X^{nh} + b(nh, X^{nh})h + \sigma(nh, X^{nh})(\bar{W}^{(n+1)h} - \bar{W}^{nh}) \\ &= X^{nh} + b(nh, X^{nh})h + \epsilon\sigma(nh, X^{nh})\sqrt{h} \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $\bar{X}^0 = X^0 = X_0$

Dans les exemples que nous traitons nous choisissons d'autres types de chaînes mais qui vérifient les conditions de consistance locale.

D'après (4) on peut, à l'instant  $t = nh$ , déterminer les valeurs possibles  $\bar{x}_i^{(n+1)h}$  de la variable  $i$ . Nous pouvons alors déterminer les valeurs possibles de  $j_i^{(n+1)h}$  de manière à ce que la valeur donnée par la discrétisation (3) soit la plus proche possible de  $\bar{x}_i^{(n+1)h}$  :

$$j_i^{(n+1)h}(j_i^{nh}, \epsilon) = P.Entière\left(\frac{f_i^{-1}((n+1)h, \bar{x}_i^{(n+1)h})}{\rho_i((n+1)h)}\right)$$

On note

$$\begin{aligned} j_i^{(n+1)h}(j_i^{nh}, 1) &= j_{+-}^i, \quad J_{+-} = (j_{+-}^1, \dots, j_{+-}^d)^t \\ j_i^{(n+1)h}(j_i^{nh}, -1) &= j_{--}^i, \quad J_{--} = (j_{--}^1, \dots, j_{--}^d)^t \end{aligned}$$

Etape 3:

Une approximation de la valeur de l'option européenne peut être obtenu par récurrence backward en utilisant :

$$\begin{aligned} C^{nh} &= e^{-r(nh, X^{nh})} \left( \frac{1}{2} C_{J_{+-}}^{(n+1)h} + \frac{1}{2} (1-p) C_{J_{--}}^{(n+1)h} \right) \quad \text{pour } n = 0, \dots, N-1 \\ C^{Nh} &= g(T, X^{Nh}) \end{aligned}$$



Remarque : La FSG pour la valorisation des options américaines

A chaque instant  $t = nh$ , on calcule pour tous les noeuds de la grille de l'espace d'état la valeur de l'option européenne. On calcule aussi la valeur du payoff en supposant que la date d'exercice est  $t = nh$ . Sur chaque noeud de la grille, la valeur de l'option américaine est alors le maximum entre les deux valeurs ainsi calculées. En raisonnant par récurrence backward on détermine la valeur à  $t = 0$  de l'option.

Dans nos applications, l'espace d'état est de dimension 2. On se placera dans le cadre du modèle CRR. Dans ce cas, par rapport à la méthode d'arbre binomial, la FSG ajoute un second vecteur d'état qui tient compte de la trajectoire du cours de l'actif risqué.

## 3.2 Applications

Pour illustrer la méthode nous considérons une option européenne sur trajectoire dont l'actif contingent est de prix  $(S_t)$  ne versant pas de dividendes et évoluant selon le modèle de Black Scholes. L'échéance de l'option est  $T$  et le payoff terminal est  $C_T = g(S_T, \varphi_T)$  où  $\varphi_T$  est la variable qui dépend de la trajectoire. Nous considérons les exemples suivants :

### 3.2.1 Cas de l'option d'achat lookback

$$\varphi_t = m_t = \min_{0 \leq u \leq t} S_u$$

L'intervalle  $[0, T]$  est divisé en  $N$  subdivisions de pas  $h = \Delta t = \frac{T}{N}$

Nous discrétisons les valeurs de  $(S_t)$  et  $(m_t)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_j^{nh} &= S_0 e^{j\sigma\sqrt{h}} \\ m_k^{nh} &= S_0 e^{k\sigma\sqrt{h}} \end{aligned} \quad j, k = -n, \dots, n \quad (5)$$

La relation entre l'évolution de  $m$  et celle de  $S$  est donnée par :

$$m^{(n+1)h} = \min(m^{nh}, S^{(n+1)h})$$

En passant de l'instant  $t = nh$  à l'instant  $t = (n+1)h$  et sous l'approximation par l'arbre binomial, on associe les transitions :

( I )

up	$(m_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(m_k^{nh}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$p$
down	$(m_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(\min(S_{j-1}^{(n+1)h}, m_k^{nh}), S_{j-1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$(1 - p)$

Or, d'après la discrétisation de  $m$  donnée par (5) on a :

$$m_k^{(n+1)h} = S_0 e^{k^{(n+1)h} \sigma \sqrt{h}}$$

Ainsi,  $k^{(n+1)h} = k^+ = k$  si la transition est up  
et  $k^{(n+1)h} = k^- = \min(k, j-1)$  si la transition est down.

Soit  $C_{j,k}^{nh} = C(S_j^{nh}, m_k^{nh}, nh)$  la valeur de l'option à l'instant  $t = nh$  où  $m = m_k^{nh}$  et  $S = S_j^{nh}$ . La valeur de l'option étant donnée la condition du payoff terminal est obtenue par la récurrence backward :

$$C_{j,k}^{nh} = e^{-rh} \left[ p C_{j+1,k}^{(n+1)h} + (1-p) C_{j,k^-}^{(n+1)h} \right]$$

où  $r$  est le taux d'intérêt sans risque et  $p$  est le paramètre de la probabilité risque neutre ayant pour expression :

$$p = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \quad (6)$$

Remarques :

1) La valeur minimale du cours sur l'ensemble  $\{t = 0, \dots, t = nh\}$  appartient nécessairement à l'arbre du cours ( $S$ ). Ainsi, la grille, de l'espace d'état augmenté, à l'instant  $t = nh$  est  $(Y = S^0 e^{j\sigma\sqrt{h}}, Z = S^0 e^{k\sigma\sqrt{h}})_{j \in \{-n, \dots, n\}, k \in \{-n, \dots, 0\}}$ .

2) A l'instant  $t = nh$ , on peut modéliser le cours ( $S$ ) par  $S_j^{nh} = S_0 u^j d^{n-j}$  où  $j = 0, \dots, n$ . Pour atteindre ce cours, il y a  $C_n^j$  trajectoires possibles. Le nombre total de trajectoires à  $t = nh$  est donc égal à  $2^n$ . Cependant, le nombre maximal de valeurs possibles de  $m^{nh}$  est  $(n+1)(\frac{n}{2}+1) \ll 2^n$ .

### 3.2.2 Cas de l'option sur moyenne

$$\varphi_t = A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du$$

L'intervalle  $[0, T]$  est divisé en  $N$  subdivisions de pas  $h = \Delta t = \frac{T}{N}$  et on considère la même discrétisation du cours ( $S_t$ ) que précédemment.

Contrairement au cas du minimum, il y a autant de valeurs possibles de  $(A)$  à l'instant  $t = nh$  que de trajectoires :  $(2^n)$ . Ce nombre croît de manière exponentielle avec le nombre de pas de temps. Il est impensable de considérer un vecteur  $A^{nh}$  ayant pour composantes toutes les valeurs possibles de la moyenne.

La discrétisation proposée par Barraquand et Pudet est la suivante :

$$A_k^{nh} = S_0 e^{k\Delta Y} \quad k = -\frac{n}{\mu}, \dots, \frac{n}{\mu} \quad (7)$$

où  $\Delta Y = \mu\sigma\sqrt{h}$

$\mu$  est un paramètre fixé telque  $\frac{1}{\mu}$  soit entier.

Nous proposons de construire  $A^{nh} = (A_0^{nh}, \dots, A_{k^*(n,h)}^{nh})^t$  telque  $A_0^{nh} = A_m^{nh}$  (respectivement  $A_{k^*(n,h)}^{nh} = A_M^{nh}$ ) est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur que peut prendre la moyenne à un instant  $t = nh$  et pour  $k = 0, \dots, k^*(n, h)$

$$A_k^{nh} = A_m^{nh} e^{k\rho(nh)} \quad (8)$$

$\rho(nh)$  est un pas de discrétisation à choisir convenablement. Nous revenons sur ce choix dans la section 5.1.

Nous allons voir par la suite qu'une interpolation entre les composantes du vecteur  $A^{nh}$  est nécessaire pour déterminer par récurrence backward la valeur initiale de l'option.

En posant

$$\bar{A}^{nh} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S^{ih}$$

$S^{ih}$  vue comme la valeur du cours à  $t = ih$  et nom comme vecteur.

La nouvelle valeur  $\bar{A}^{(n+1)h}$  s'exprime en fonction de  $\bar{A}^{nh}$  et  $S^{(n+1)h}$  comme suit :

$$\bar{A}^{(n+1)h} = \bar{A}^{nh} + \frac{S^{(n+1)h} - \bar{A}^{nh}}{n+2}$$

En passant de l'instant  $t = nh$  à l'instant  $t = (n+1)h$  et sous l'approximation par l'arbre binomial, on associe les transitions :

up	$(A_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_+^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$p$
down	$(A_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_-^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$(1-p)$

avec

$$\begin{aligned} A_+^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} - A_k^{nh}}{n+2} \\ A_-^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + \frac{e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} - A_k^{nh}}{n+2} \end{aligned} \quad (9)$$

D'après la discrétisation de  $(A)$  donnée par (5) on a  $A_k^{(n+1)h} = A_m^{(n+1)h} e^{k^{(n+1)h}\rho((n+1)h)}$ . Ainsi, il n'est pas nécessaire que  $A_+^{(n+1)h}$  et  $A_-^{(n+1)h}$  coïncident avec des composantes du vecteur  $A^{(n+1)h}$ . On utilise l'interpolation décrite dans (3.1). On définit :

$$k^{+-} = P.Entière \left( \frac{\ln\left(\frac{A_+^{(n+1)h}}{A_m^{(n+1)h}}\right)}{\rho((n+1)h)} \right)$$

de même on définit  $k^{--}$  en remplaçant  $A_+^{(n+1)h}$  par  $A_-^{(n+1)h}$ .  
On définit aussi  $k^{++} = k^{+-} + 1$  et  $k^{-+} = k^{--} + 1$

On pose

$$\varepsilon_+^{(n+1)h} = \frac{A_+^{(n+1)h} - A_{k^{+-}}^{(n+1)h}}{A_{k^{++}}^{(n+1)h} - A_{k^{+-}}^{(n+1)h}}$$

et de même

$$\varepsilon_-^{(n+1)h} = \frac{A_-^{(n+1)h} - A_{k^{--}}^{(n+1)h}}{A_{k^{-+}}^{(n+1)h} - A_{k^{--}}^{(n+1)h}}$$

Le schéma markovien qu'on considère maintenant est le suivant :

$(A_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_{k^{++}}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$p\varepsilon_+^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(A_{k^{+-}}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$		$p(1 - \varepsilon_+^{(n+1)h})$
$(A_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(A_{k^{-+}}^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1 - p)\varepsilon_-^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(A_{k^{--}}^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1 - p)(1 - \varepsilon_-^{(n+1)h})$

Soit  $C_{j,k}^{nh} = C(S_j^{nh}, A_k^{nh}, nh)$  la valeur de l'option à l'instant  $t = nh$  où  $A = A_k^{nh}$  et  $S = S_j^{nh}$ . La valeur de l'option étant donnée la condition du payoff terminal est obtenue par la récurrence backward :

$$\begin{aligned} C_{j,k}^{nh} = e^{-rh} & \left[ p \left( \varepsilon_+^{(n+1)h} C_{j+1,k^{++}}^{(n+1)h} + (1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}) C_{j,k^{+-}}^{(n+1)h} \right) \right. \\ & \left. + (1 - p) \left( \varepsilon_-^{(n+1)h} C_{j,k^{-+}}^{(n+1)h} + (1 - \varepsilon_-^{(n+1)h}) C_{j,k^{--}}^{(n+1)h} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2.3 Cas de l'option sur moyenne capée

$$\begin{aligned} \varphi_t = B_t &= \frac{1}{t} \int_0^t \max(S_u, K) du \\ B_{t+h} &= B_t + \int_t^{t+h} \frac{\max(S_u, K) - B_u}{u} du \end{aligned}$$

Comme pour le cas de l'option sur moyenne nous choisissons la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} B_k^{nh} &= B_m^{nh} e^{k\lambda(nh)} \quad \text{pour } k = 0, \dots, k^*(n) \\ \text{avec } B_{k^*(n)}^{nh} &= B_M^{nh} \end{aligned} \quad (11)$$

où  $\lambda(nh)$  est un pas de discrétisation à choisir convenablement. Nous revenons sur ce choix dans la section 5.2.

On définit  $B_+^{(n+1)h}$  et  $B_-^{(n+1)h}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_+^{(n+1)h} &= B_k^{nh} + \frac{\max(e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{n+2} \\ B_-^{(n+1)h} &= B_k^{nh} + \frac{\max(e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{n+2} \end{aligned} \quad (12)$$

$B_{k++}^{(n+1)h}$ ,  $B_{k+-}^{(n+1)h}$ ,  $B_{k-+}^{(n+1)h}$  et  $B_{k--}^{(n+1)h}$  sont définis comme  $A_{k++}^{(n+1)h}$ ,  $A_{k+-}^{(n+1)h}$ ,  $A_{k-+}^{(n+1)h}$  et  $A_{k--}^{(n+1)h}$  pour le cas de la moyenne.

Le schéma markovien approximant le processus continu est le suivant :

$(B_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(B_{k++}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	avec une probabilité	$p\alpha_+^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(B_{k+-}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$		$p(1 - \alpha_+^{(n+1)h})$
$(B_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(B_{k-+}^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1-p)\alpha_-^{(n+1)h}$
	$\rightarrow$	$(B_{k--}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$		$(1-p)(1 - \alpha_-^{(n+1)h})$

où  $\alpha_{\pm}^{(n+1)h}$  sont définis comme  $\varepsilon_{\pm}^{(n+1)h}$  en remplaçant  $(A)$  par  $(B)$ .

L'expression de la valeur de l'option à l'instant  $t = nh$  où  $B = B_k^{nh}$  et  $S = S_j^{nh}$  est analogue à celle de l'option sur moyenne.

## 4 Les conditions de consistance locale et le théorème de Kushner

Dans la section (3.2) on a proposé des prix approchés des options lookback et sur moyenne. Ce qui est plus intéressant est d'être en mesure d'annoncer que ce prix tend vers le prix exact de l'option lorsque le pas de temps  $h$  tend vers 0. On a vu que l'algorithme de la FSG s'articule sur l'approximation du processus continu par une chaîne de Markov que l'on obtient une fois les étapes (1) et (2) sont accomplies. La méthode d'approximation par une chaîne de

Markov est générale et est utilisée pour approcher l'espérance de fonctions de processus stochastiques contrôlés. Harold Kushner s'est intéressée à cette méthode et a développé dans [5] et [6] des éléments théoriques concernant la convergence de la valeur d'une fonction approchée vers la valeur de la fonction exacte qui lui correspond.

Une propriété clé qui doit être satisfaite par la chaîne de Markov approximant le processus initial est la Consistance locale : la variation de la chaîne en passant de l'instant  $t = nh$  à l'instant  $t = (n+1)h$  doit vérifier que l'espérance et la covariance conditionnelles de sa moyenne sont égales à celles de la variation du processus continu entre ces deux instants à un  $o(h)$  près.

Le théorème de Kushner énonce que les conditions de consistance locale garantissent la convergence des espérances des fonctions usuelles. Nous présentons le théorème dans le cas de processus non contrôlés.

## 4.1 Le problème en temps continu

Considérons l'équation différentielle stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$

$$X_{t+s} = x + \int_t^{t+s} b(u, X_u) du + \int_t^{t+s} \sigma(u, X_u) . dW_u \quad (13)$$

où  $W$  est un mouvement brownien  $k$ -dimensionnel. Le problème est d'approximer la quantité

$$V(t, x) = E_{t,x} [g(X_\tau)]$$

où  $\tau$  est le premier temps de sortie de  $X_s$  d'un ensemble ouvert  $G$  de  $\mathbb{R}^{1+d}$  qui vérifie (H3)

$$\tau = \inf \{u > t, (u, X_u) \notin G\} \wedge T$$

Hypothèses :

(H1)  $b$  et  $\sigma$  sont continues et bornées.

(H2)  $g$  est continue et bornée.

(H3)

(a)  $G = \mathbb{R}^{1+d}$  ou :

(b) pour un certain indice  $i$

$$G = \{t < u < T, L_i(u) < x_i < U_i(u)\}$$

où  $L_i, U_i$  sont des fonctions continues sur  $[t, T]$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Pour ce même indice  $i$ ,  $\sum_{j=1}^k \sigma_{i,j}^2(u, X_u) > \alpha$  pour  $\alpha > 0$ , uniformément en  $u$ .

Remarque :

Dans le cadre de la valorisation des options  $G = \mathbb{R}^{1+d}$  et dans notre cas  $d = 2$ .

## 4.2 Les conditions de consistance locale

Soit  $N$  un entier strictement positif,  $h = \frac{T}{N}$  et  $(\xi^{nh})_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov discrète.

Notons  $\Delta \xi^{nh} = \xi^{(n+1)h} - \xi^{nh}$

La chaîne  $(\xi^{nh})_{n \geq 0}$  vérifie les conditions de consistance locale données par

$$\begin{aligned} E_{x,n}^h [\Delta \xi^{nh}] &= b(nh, x) h + o(h) \\ E_{x,n}^h \left[ (\Delta \xi^{nh} - E_{x,n}^h [\Delta \xi^{nh}]) \cdot (\Delta \xi^{nh} - E_{x,n}^h [\Delta \xi^{nh}])' \right] &= a(nh, x) h + o(h) \end{aligned}$$

où  $E_{x,n}^h$  est l'espérance conditionnelle à l'instant  $nh$  connaissant  $\xi^{nh} = x$ , et  $a(s, x) = \sigma(s, x) \sigma(s, x)'$ . Notons que ces conditions signifient que, localement, la chaîne a les mêmes moyenne et variance conditionnelles que celles du processus continu car

$$\begin{aligned} E_{x,s} [X_{s+h}] &= x + b(s, x) h + o(h) \\ E_{x,s} [(X_{s+h} - x) \cdot (X_{s+h} - x)'] &= a(s, x) h + o(h) \end{aligned}$$

Nous supposons aussi que

$$\sup_{n,\omega} |\Delta \xi^{nh}| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

Soit  $\hat{\xi}^h(t)$  le processus continu défini par

$$\hat{\xi}^h(t) = \xi_{n_t h}^h$$

où  $n_t$  est l'entier tel que  $n_t h \leq t < (n_t + 1)h$ .

Soit  $\hat{\tau}_h$  le premier temps de sortie du processus  $(t, \hat{\xi}^h(t))$  de l'ensemble  $G$ .

## 4.3 Le théorème de Kushner

Pour prouver la convergence du prix approché d'une option européenne asiatique, donné par l'algorithme de la FSG, on utilise le théorème suivant :

Théorème : ( cf [5], théorème 5.1)

Sous les hypothèses H1, H2 et H3 on a

$$V(t, x) = E[g(\tau, X_\tau)] = \lim_{h \rightarrow 0} V_h(t, x)$$

où

$$V_h(t, x) = E \left[ g \left( \hat{\tau}_h, \hat{\xi}^h(\hat{\tau}_h) \right) \right]$$

Pour la preuve de la convergence du prix approché d'une option américaine asiatique, donné par l'algorithme de la FSG, on utilise un théorème analogue au précédent. ( cf [6] théorème 6.2.).

## 5 Consistance locale pour la FSG: cas des options sur moyenne et des options lookback

### 5.1 A propos de la preuve de Barraquand et Pudet

Dans l'article [2] Barraquand et Pudet montrent qu'à l'instant  $N\Delta t$  l'écart entre le prix approché et le prix exact tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta Y$  ( le pas de discrétisation de la moyenne dans le cas de l'option sur moyenne) tendent vers 0 sans aucune relation entre les deux paramètres. Ensuite, ils généralisent l'expression et énoncent que la même conclusion pourrait être obtenu, par simple récurrence backward, pour l'écart entre les prix approché et exact à l'instant initial. Ce passage est erroné. Notre conclusion est confirmée par une étude réalisée par P.A. Forsyth, K.R. Vetzal et R. Zvan (cf[3]).

Nous avons vu, dans le cas de l'option sur moyenne, qu'une interpolation est faite à chaque étape pour déterminer le prix approché sur chacun des noeuds de la grille de l'espace d'état. Or, cette interpolation induit une erreur. Lorsque le pas  $h$  tend vers zéro, le nombre d'étapes tend vers l'infini. Ainsi, la somme infinie de l'erreur finie doit être manipulée convenablement. Selon Forsyth, Vetzal et Zvan, Barraquand et Pudet ne tiennent en compte dans leur démonstration que de l'erreur à l'instant  $N\Delta t$ . D'autre part, ils montrent que pour le choix de discrétisation de Barraquand et Pudet l'erreur ne tends pas nécessairement vers zéro et que ca serait le cas, si on choisit convenablement le pas  $\Delta Y$ . Nous parlons de ce choix dans la section (5.1) et nous aboutissons, en utilisant une preuve différente, à la même conclusion que celle de Forsyth, Vetzal et Zvan.

L'algorithme de la FSG pour les options sur moyenne telque l'on présente dans cette étude, diffère de celui proposé par Barraquand et Pudet au niveau du choix du pas de la discrétisation. Comme on l'a déjà dit, ce dernier étant un paramètre fondamental jouant un double rôle. Le premier au niveau de la convergence théorique de l'algorithme et le second au niveau de la vitesse de cette convergence.

Pour l'option d'achat lookback et l'option de vente lookback les processus continus  $(S, m)$  et  $(S, M)$  ne sont pas des diffusions stochastiques puisqu'ils



ne vérifient pas l'équation (14). Ainsi, nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Kushner. Cependant, il nous a paru naturel de vérifier que les conditions de consistance locale sont vérifiées.

Dans cette section nous prouvons la convergence, pour les options européenne et américaine sur moyenne et sur moyenne capée, de l'algorithme de la FSG. Pour cela nous vérifions les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et les conditions de consistance locale.

Dans le cadre du modèle de Black et Scholes (H1) est vérifiée. Concernant (H2) :  $g$  est le payoff actualisé de l'option.  $g$  est continue mais pourrait être non borné (cas des options d'achat (calls)). Pour contourner ce problème on peut utiliser la parité Call-Put. Enfin, (H3) est vérifiée car  $G = \mathbb{R}^2$

Dans la suite on vérifiera les conditions de consistance locale.

## 5.2 Consistance locale : cas de l'option sur moyenne

Le processus continu  $(S, A)$  est bien une diffusion stochastique puisque

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \\ dA_t = \frac{S_t - A_t}{t} dt \end{cases}$$

$(S, A)$  étant approché par la chaîne de Markov  $(S_j^n, A_k^n)$ . Pour prouver que le prix approché de cette option converge vers le prix exact, il ne nous reste que la vérification des conditions de consistance locale.

### 5.2.1 Calculs

Calcul des premiers et seconds moments

et du moment croisé du processus continu

On a

$$E_t(S_{t+h}) = E(S_{t+h}/S_t) = S_t + rS_th + o(h)$$

$$E_t((S_{t+h} - S_t)^2) = E((S_{t+h} - S_t)^2/S_t) = (\sigma S_t)^2 h + o(h)$$

on obtient

$$E_t((S_{t+h})^2) = (S_t)^2 + 2(S_t)^2 \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) h + o(h)$$

On a  $A_{t+h} = A_t + \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du$

$$E_t(A_{t+h}) = E(A_{t+h}/A_t) = A_t + \frac{S_t - A_t}{t} h + o(h)$$

En appliquant l'espérance conditionnelle dans la première ligne et en identifiant les deux expressions de  $E_t(A_{t+h})$

on a :

$$\begin{aligned} E_t \left( \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du \right) &= \frac{S_t - A_t}{t} h + o(h) \\ (A_{t+h})^2 &= (A_t)^2 + 2A_t \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du + \left( \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du \right)^2 \\ E \left( (A_{t+h})^2 / A_t \right) &= (A_t)^2 + 2A_t E_t \left( \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du \right) + o(h) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{E \left( (A_{t+h})^2 / A_t \right) = (A_t)^2 + 2A_t \frac{S_t - A_t}{t} h + o(h)}$$

$$\begin{aligned} &E_t(A_{t+h}S_{t+h}) \\ &= E_t \left( S_{t+h}A_t + S_{t+h} \int_t^{t+h} \frac{S_u - A_u}{u} du \right) \quad \text{or, } E_t(S_{t+h}) = e^{rh}S_t \\ &= e^{rh}A_tS_t + E_t \left( \int_t^{t+h} (S_{t+h} - S_ue^{(t+h-u)r} + S_ue^{(t+h-u)r}) \frac{S_u - A_u}{u} du \right) \\ &= e^{rh}A_tS_t + \int_t^{t+h} \left\{ E_t \left[ E_u(S_{t+h} - S_ue^{(t+h-u)r}) \frac{S_u - A_u}{u} \right] + e^{(t+h-u)r} E_t \left[ S_u \frac{S_u - A_u}{u} \right] \right\} du \\ &= e^{rh}A_tS_t + \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t \left[ S_u \frac{S_u - A_u}{u} \right] du \end{aligned}$$

En appelant  $f_t(s) = E_t(A_sS_s)$  on a :

$$f_t(t+h) = e^{rh}A_tS_t + \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t \left[ \frac{S_u^2}{u} \right] du - \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} \frac{f_t(u)}{u} du$$

Ainsi, la fonction  $t \rightarrow f_t$  est dérivable et on a :

$$f'_t(t+h) = re^{rh}A_tS_t + E_t \left[ \frac{S_{t+h}^2}{t+h} \right] - \frac{f_t(t+h)}{t+h}$$

En appliquant la formule de Taylor au premier ordre on obtient :

$$f_t(t+h) = f_t(t) + hf'_t(t) + o(h)$$

Soit

$$E_t(A_{t+h}S_{t+h}) = E(A_{t+h}S_{t+h}/A_t, S_t) = A_tS_t + S_t \left( rA_t + \frac{S_t - A_t}{t} \right) h + o(h)$$

Calcul des premiers et seconds moments  
et du moment croisé du processus discret

Notons  $A^{(n+1)h}$  la deuxième composante de notre chaîne de Markov à l'instant  $t = (n+1)h$ .

$A^{(n+1)h}$  prend ses valeurs dans  $\{A_{k++}^{(n+1)h}, A_{k+-}^{(n+1)h}, A_{k-+}^{(n+1)h}, A_{k--}^{(n+1)h}\}$

Calcul de  $E_n(S^{(n+1)h})$  :

$$\begin{aligned} E_n(S^{(n+1)h}) &= E(S^{(n+1)h}/S^{nh}) = pe^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh} \\ &= S^{nh}(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}) \end{aligned}$$

En faisant un d.l. à l'ordre 2 en  $\sqrt{h}$ , on obtient

$$E_n(S^{(n+1)h}) = S^{nh} + (rS^{nh})h + o(h)$$

Calcul de  $E_n((S^{(n+1)h})^2)$  :

$$\begin{aligned} E_n((S^{(n+1)h})^2) &= E((S^{(n+1)h})^2/S^{nh}) = pe^{\sigma\sqrt{h}}(S^{nh})^2 + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}(S^{nh})^2 \\ &= (S^{nh})^2(pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}}) \end{aligned}$$

En faisant un d.l. à l'ordre 2 en  $\sqrt{h}$ , on obtient

$$E_n((S^{(n+1)h})^2) = (S^{nh})^2 + 2\left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right](S^{nh})^2h + o(h)$$

Calcul de  $E_n(A^{(n+1)h})$  :

$$\begin{aligned}
& E_n \left( A^{(n+1)h} \right) \\
&= E_n \left( E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right. \\
&\quad \left. + E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right) \\
&= p E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\
&\quad + (1-p) E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\
&= p \left( \varepsilon_+^{(n+1)h} A_{k++}^{(n+1)h} + (1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}) A_{k+-}^{(n+1)h} \right) \\
&\quad + (1-p) \left( \varepsilon_-^{(n+1)h} A_{k-+}^{(n+1)h} + (1 - \varepsilon_-^{(n+1)h}) A_{k--}^{(n+1)h} \right) \\
&= p A_+^{(n+1)h} + (1-p) A_-^{(n+1)h}
\end{aligned}$$

■ Calcul intermédiaire :

D'après l'équation (9) on a :

$$\begin{aligned}
A_+^{(n+1)h} &= A_k^{nh} + \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} - A_k^{nh}}{n+2} \\
&= A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + \left( e^{\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) h \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{(nh+2h)} - \frac{2h^2(S^{nh} - A_k^{nh})}{nh(nh+2h)}
\end{aligned}$$

soit

$$A_+^{(n+1)h} = A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_+(h)$$

de même, on montre que :

$$A_-^{(n+1)h} = A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_-(h)$$

■

Ainsi,

$$E_n \left( A^{(n+1)h} \right) = A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o(h)$$

Calcul de  $E_n \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 \right)$  :

On a :

$$A_{k++}^{(n+1)h} = A_+^{(n+1)h} + \left( 1 - \varepsilon_+^{(n+1)h} \right) \Delta^+ A$$

$$A_{k+-}^{(n+1)h} = A_+^{(n+1)h} - \varepsilon_+^{(n+1)h} \Delta^+ A \quad \text{où } \Delta^+ A = \left( A_{k++}^{(n+1)h} - A_{k+-}^{(n+1)h} \right)$$

$$A_{k-+}^{(n+1)h} = A_-^{(n+1)h} + \left( 1 - \varepsilon_-^{(n+1)h} \right) \Delta^- A$$

$$A_{k--}^{(n+1)h} = A_-^{(n+1)h} - \varepsilon_-^{(n+1)h} \Delta^- A \quad \text{où } \Delta^- A = \left( A_{k-+}^{(n+1)h} - A_{k--}^{(n+1)h} \right)$$

$$\begin{aligned}
& E_n \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 \right) \\
&= E_n \left( E \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right. \\
&\quad \left. + E \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right) \\
&= p E \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\
&\quad + (1-p) E \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\
&= p \left( \varepsilon_+^{(n+1)h} \left( A_{k++}^{(n+1)h} \right)^2 + (1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}) \left( A_{k+-}^{(n+1)h} \right)^2 \right) \\
&\quad + (1-p) \left( \varepsilon_-^{(n+1)h} \left( A_{k-+}^{(n+1)h} \right)^2 + (1 - \varepsilon_-^{(n+1)h}) \left( A_{k--}^{(n+1)h} \right)^2 \right) \\
&= p \left\{ \varepsilon_+^{(n+1)h} \left[ \left( A_+^{(n+1)h} \right)^2 + 2 \left( 1 - \varepsilon_+^{(n+1)h} \right) A_+^{(n+1)h} \Delta^+ A + \left( 1 - \varepsilon_+^{(n+1)h} \right)^2 \left( \Delta^+ A \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \varepsilon_+^{(n+1)h} \right) \left[ \left( A_+^{(n+1)h} \right)^2 - 2 \varepsilon_+^{(n+1)h} A_+^{(n+1)h} \Delta^+ A + \left( \varepsilon_+^{(n+1)h} \right)^2 \left( \Delta^+ A \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad + (1-p) \left\{ \varepsilon_-^{(n+1)h} \left[ \left( A_-^{(n+1)h} \right)^2 + 2 \left( 1 - \varepsilon_-^{(n+1)h} \right) A_-^{(n+1)h} \Delta^- A + \left( 1 - \varepsilon_-^{(n+1)h} \right)^2 \left( \Delta^- A \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \varepsilon_-^{(n+1)h} \right) \left[ \left( A_-^{(n+1)h} \right)^2 - 2 \varepsilon_-^{(n+1)h} A_-^{(n+1)h} \Delta^- A + \left( \varepsilon_-^{(n+1)h} \right)^2 \left( \Delta^- A \right)^2 \right] \right\} \\
&= p \left( A_+^{(n+1)h} \right)^2 + (1-p) \left( A_-^{(n+1)h} \right)^2 + p \varepsilon_+^{(n+1)h} (1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}) \left( \Delta^+ A \right)^2 \\
&\quad + (1-p) \varepsilon_-^{(n+1)h} (1 - \varepsilon_-^{(n+1)h}) \left( \Delta^- A \right)^2 \\
&= p \left( A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_+(h) \right)^2 + (1-p) \left( A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_-(h) \right)^2 \\
&\quad + \underbrace{p \varepsilon_+^{(n+1)h} (1 - \varepsilon_+^{(n+1)h}) \left( \Delta^+ A \right)^2 + (1-p) \varepsilon_-^{(n+1)h} (1 - \varepsilon_-^{(n+1)h}) \left( \Delta^- A \right)^2}_{\substack{= \\ I}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{mais } \varepsilon_{\pm}^{(n+1)h} (1 - \varepsilon_{\pm}^{(n+1)h}) \leq \frac{1}{4} \\
&\text{soit } I \leq \frac{p}{4} (\Delta^+ A)^2 + \frac{1-p}{4} (\Delta^- A)^2
\end{aligned}$$

$\Delta^+ A = A_{k++}^{(n+1)h} - A_{k+-}^{(n+1)h}$  et  $A_{k+-}^{(n+1)h} \leq A_+^{(n+1)h}$  on obtient

$$\Delta^+ A \leq A_+^{(n+1)h} (e^{\rho((n+1)h)} - 1) = \frac{(nh + h)A_k^{nh} + he^{\sigma\sqrt{h}}S_j^n}{nh + 2h} (e^{\rho((n+1)h)} - 1)$$

Ainsi, il suffit de choisir  $\rho(nh)$  tel que

$$\boxed{\rho(nh) = o(\sqrt{h})}$$

pour avoir  $\Delta^+ A = o(\sqrt{h})$ . De même, on montre que  $\Delta^- A = o(\sqrt{h})$ . Soit finalement

$$\boxed{E_n \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( A_k^{nh} \right)^2 + 2A_k^{nh} \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o(h)}$$

Calcul de  $E_n \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right)$  :

$$\begin{aligned} & E_n \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) \\ = & E_n \left( E \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right. \\ & \left. + E \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) I_{\{S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh}\}} \right) \\ = & pe^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\ & + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} E \left( A^{(n+1)h} / A^{nh}, S^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \right) \\ = & pe^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} A_+^{(n+1)h} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} A_-^{(n+1)h} \\ = & pe^{\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \left( A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_+(h) \right) + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} S^{nh} \left( A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o_-(h) \right) \\ = & \left( pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} \right) S^{nh} A_k^{nh} + \left( pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} \right) S^{nh} \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o(h) \end{aligned}$$

Or,  $pe^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p)e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{rh}$

Ainsi,

$$\boxed{E_n \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = S^{nh} A_k^{nh} + S^{nh} \left( r A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} \right) h + o(h)}$$

Choix de  $\rho(nh)$  et complexité de l'algorithme de FSG :

Le vecteur  $A^{nh}$  est composé de  $k^*(n, h) + 1$  éléments avec d'après l'équation (7) section 3.2.2

$$A_M^{nh} = A_m^{nh} e^{k^*(n,h)\rho(nh)}$$

Déterminons l'ordre de grandeur de  $k^*(n, h)$

Pour  $j = -n, \dots, n$  le cours  $S_j^{nh} = S^0 e^{j\sigma\sqrt{h}}$  peut s'écrire sous la forme  $S_{j'}^{nh} = S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}$  où

$$j' = \frac{1}{2} \left( n + \frac{\ln \left( \frac{S^{nh}}{S^0} \right)}{\sigma\sqrt{h}} \right) \quad (14)$$

Les valeurs maximales respectivement minimale de la moyenne correspondant à  $S_{j'}^{nh}$  sont données par :

$$\begin{aligned} A_M^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} S^0 \left( 1 + e^{\sigma\sqrt{h}} + \dots + e^{j'\sigma\sqrt{h}} + e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-\sigma\sqrt{h}} + \dots + e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} S^0 \left( \frac{1 - e^{(j'+1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma\sqrt{h}}} + \frac{e^{(j'-1)\sigma\sqrt{h}} - e^{(2j'-n-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \right) \\ A_m^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} S^0 \left( 1 + e^{-\sigma\sqrt{h}} + \dots + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{\sigma\sqrt{h}} + \dots + e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{j'\sigma\sqrt{h}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} S^0 \left( \frac{1 - e^{-(n+1-j')\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} + \frac{e^{-(n-j'-1)\sigma\sqrt{h}} - e^{-(n-2j'-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma\sqrt{h}}} \right) \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{S^0} A_M^{nh}(j') &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2 \frac{e^{\frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}}}}{\sigma\sqrt{h}} \\ \frac{n+1}{S^0} A_m^{nh}(j') &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 + \frac{S^{nh}}{S^0}}{\sigma\sqrt{h}} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{A_M^{nh}(j')}{A_m^{nh}(j')} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2 \frac{e^{\frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}}}}{1 + \frac{S^{nh}}{S^0}}$$

Mais

$$k^*(n, h) = \frac{\ln \left( \frac{A_M^{nh}(j')}{A_m^{nh}(j')} \right)}{\rho(nh)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}\rho(nh)}$$



On a fait le choix  $\rho(nh) = o(\sqrt{h})$ . Choisissons  $\rho(nh) = h$   
 Comme  $h = \frac{T}{N}$ , on a :

$$k^*(n, h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{nh\sigma}{2T^{\frac{3}{2}}} N^{\frac{3}{2}}.$$

En particulier,

$$k^*(N, h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} N^{\frac{3}{2}} \ll 2^N$$

Le nombre total des noeuds de la grille de l'espace d'état augmenté à  $t = nh$  est

$$(n+1)(k^*(n, h) + 1) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sigma(nh)^2}{2T^{\frac{5}{2}}} N^{\frac{5}{2}}$$

Le choix de  $\rho(nh) = h$  correspond à une discrétisation dans la direction de la path-dependance plus raffinée que celle proposée par Barraquand et Pudet. En effet, d'après l'équation 8 de la section 3.2.2 on a

$$\ln \frac{A_{k+1}^{nh}}{A_k^{nh}} = \sqrt{h}$$

Alors qu'avec notre choix de discrétisation on a

$$\ln \frac{A_{k+1}^{nh}}{A_k^{nh}} = h = o(\sqrt{h})$$

### 5.2.2 Récapitulatif des résultats et conclusion

On a obtenu les résultats suivants :

$$E_t(S_{t+h}) = E(S_{t+h}/S_t) = S_t + rS_t h + o(h)$$

$$E_t((S_{t+h})^2) = (S_t)^2 + 2(S_t)^2 \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) h + o(h)$$

$$E_t(A_{t+h}) = E(A_{t+h}/A_t) = A_t + \frac{S_t - A_t}{t} h + o(h)$$

$$E_t((A_{t+h})^2 / A_t) = (A_t)^2 + 2A_t \frac{S_t - A_t}{t} h + o(h)$$

$$E_t(A_{t+h}S_{t+h}) = A_t S_t + S_t \left( rA_t + \frac{S_t - A_t}{t} \right) h + o(h)$$

$$\begin{aligned}
E_n \left( S^{(n+1)h} \right) &= S^{nh} + \left( r S^{nh} \right) h + o(h) \\
E_n \left( \left( S^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= \left( S^{nh} \right)^2 + 2 \left[ \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left( S^{nh} \right)^2 \right] h + o(h) \\
E_n \left( A^{(n+1)h} \right) &= A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{En choisissant } \boxed{\rho(nh) = o(\sqrt{h})} \\
E_n \left( \left( A^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= \left( A_k^{nh} \right)^2 + 2 A_k^{nh} \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} h + o(h)
\end{aligned}$$

$$E_n \left( A^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = S^{nh} A_k^{nh} + S^{nh} \left( r A_k^{nh} + \frac{S^{nh} - A_k^{nh}}{nh} \right) h + o(h)$$

$$\boxed{k^*(N, h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} N^{\frac{3}{2}} \ll 2^N}$$

On voit bien qu'en choisissant  $\rho(nh) = o(\sqrt{h})$ , les conditions de consistance locale sont satisfaites. Ce pas est plus raffiné que celui de Barraquand et Pudet.

Le choix particulier de  $\rho(Nh) = h$  permet de passer d'une dimension du vecteur  $A^{Nh}$  égale à  $2^N$  (si on considère toutes les trajectoires possibles du cours de l'actif risqué) à une dimension numériquement satisfaisante qui est de l'ordre de  $N\sqrt{N}$ .

Etant donnée que les hypothèses du théorème de Kushner et que les conditions de consistance locale sont satisfaites, nous pouvons conclure que le prix approché de l'option sur moyenne donnée par l'algorithme de la FSG converge vers le prix exact de cette option lorsque le pas  $h$  tend vers zéro (ou de manière équivalente le nombre d'itération tends vers l'infini).

### 5.3 Consistance locale : cas de l'option sur moyenne capee

Le processus continu  $(S, B)$  est bien une diffusion stochastique puisqu'on a

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dw_t \\ dB_t = \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} dt \end{cases}$$

$(S, B)$  est approché par la chaîne de Markov  $(S^{nh}, B^{nh})_{n \in N}$ . Vérifions les conditions de consistance locale.

### 5.3.1 Calculs

Le calcul des premiers et seconds moments de  $(S)$  dans le processus continu et dans la chaîne de Markov a été déjà fait dans la section précédente. On fait le calcul pour les processus continu et discret correspondant à  $(B)$ .

Calcul des premiers et seconds moments du processus continu  $(B_t)$  et du moment croisé de  $(B_t, S_t)$

$$B_{t+h} = B_t + \int_t^{t+h} \frac{\max(S_u, K) - B_u}{u} du$$

$$E_t(B_{t+h}) = E(B_{t+h}/B_t) = B_t + \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} h + o(h)$$

On utilise la même démarche que dans le cas de l'option sur moyenne pour obtenir:

$$E\left((B_{t+h})^2/B_t\right) = (B_t)^2 + 2B_t \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} h + o(h)$$

Calcul de  $E_t(B_{t+h}S_{t+h})$  :

On pose  $R(u) = \frac{\max(S_u, K) - B_u}{u}$

$$\begin{aligned} & E_t(B_{t+h}S_{t+h}) \\ = & E_t(B_tS_{t+h}) + E_t\left(S_{t+h} \int_t^{t+h} R(u)du\right) \\ = & e^{rh}B_tS_t + E_t\left(\int_t^{t+h} (S_{t+h} - S_ue^{(t+h-u)r} + S_ue^{(t+h-u)r}) R(u)du\right) \\ = & e^{rh}B_tS_t + \int_t^{t+h} \left\{ E_t\left[E_u(S_{t+h} - S_ue^{(t+h-u)r}) R(u)\right] + e^{(t+h-u)r} E_t[S_u R(u)] \right\} du \\ = & e^{rh}B_tS_t + \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t[S_u R(u)] du \end{aligned}$$

En appelant  $f_t(s) = E_t(B_sS_s)$  on a :

$$f_t(t+h) = e^{rh}B_tS_t + \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} E_t\left[S_u \frac{\max(S_u, K)}{u}\right] du - \int_t^{t+h} e^{(t+h-u)r} \frac{f_t(u)}{u} du$$

Ainsi, la fonction  $t \rightarrow f_t$  est dérivable et on a :

$$f'_t(t+h) = re^{rh}B_tS_t + E_t \left[ S_{t+h} \frac{\max(S_{t+h}, K)}{t+h} \right] - \frac{f_t(t+h)}{t+h}$$

En appliquant la formule de Taylor au premier ordre on obtient :

$$f_t(t+h) = f_t(t) + hf'_t(t) + o(h)$$

soit

$$E_t(B_{t+h}S_{t+h}) = B_tS_t + h \left( rB_tS_t + S_t \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} \right) + o(h)$$

Calcul des premiers et seconds moments du processus discret  $(B^{nh})$   
et du moment croisé de  $(B^{nh}, S^{nh})$

Notons  $B^{(n+1)h}$  le deuxième vecteur de notre chaîne de Markov à l'instant  $t = (n+1)h$ .

$B^{(n+1)h}$  prend ses valeurs dans  $\{B_{k++}^{(n+1)h}, B_{k+-}^{(n+1)h}, B_{k-+}^{(n+1)h}, B_{k--}^{(n+1)h}\}$

Calcul de  $E_n(B^{(n+1)h})$  :

Par le même type de calcul que pour l'option sur moyenne, on obtient :

$$E_n(B^{(n+1)h}) = pB_+^{(n+1)h} + (1-p)B_-^{(n+1)h}$$

■ Calcul intermédiaire :

$$\begin{aligned} & B_{\pm}^{(n+1)h} \\ = & B_k^{nh} + \frac{\max(e^{\pm\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{n+2} \\ = & B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh}h - \frac{2h^2(\max(e^{\pm\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) - A_k^{nh})}{nh(nh+2h)} + d^{\pm}(n, h) \\ \text{où } d^{\pm}(n, h) = & \frac{\max(e^{\pm\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) - \max(S^{nh}, K)}{n} \end{aligned}$$

Premier cas :  $\max(S^{nh}, K) = S^{nh}$

$$d^+(n, h) = \frac{h(e^{\sigma\sqrt{h}} - 1)S^{nh}}{nh} = o(h)$$

Si  $\max(e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) = e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}$  alors

$$d^-(n, h) = \frac{h(e^{-\sigma\sqrt{h}} - 1)S^{nh}}{nh} = o(h)$$

Si  $\max(e^{-\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) = K$  on obtient

$$\frac{h(e^{-\sigma\sqrt{h}} - 1)S^{nh}}{nh} \leq d^-(n, h) \leq 0$$

soit

$$d^-(n, h) = o(h)$$

Deuxième cas :  $\max(S^{nh}, K) = K$

$$d^-(n, h) = 0$$

Si  $\max(e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) = K$  alors

$$d^+(n, h) = 0$$

Si  $\max(e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}, K) = e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh}$  alors

$$\begin{aligned} d^+(n, h) &= \frac{h}{nh} (e^{\sigma\sqrt{h}}S^{nh} - K) \geq 0 \\ &= \frac{h}{nh} (S^{nh} - K + \sigma\sqrt{h}S^{nh} + o(\sqrt{h})) \quad \text{soit} \\ 0 &\leq d^+(n, h) \leq \frac{\sigma h\sqrt{h}S^{nh} + o(h^{\frac{3}{2}})}{nh} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d^+(n, h) = o(h)$$

On conclut que dans les deux cas possibles on a :

$$B_{\pm}^{(n+1)h} = B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh}h + o(h)$$

■

Ainsi,

$$E_n(B^{(n+1)h}) = B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh}h + o(h)$$

Par les même types de calculs établis dans le cas de l'option sur moyenne, on obtient :

- sous la condition

$$\lambda(nh) = o(\sqrt{h})$$

$$E_n \left( \left( B^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( B_k^{nh} \right)^2 + 2B_k^{nh} \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh} h + o(h)$$

•

$$E_n \left( B^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = S^{nh} B_k^{nh} + S^{nh} \left( r B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh} \right) h + o(h)$$

### Choix de $\lambda(nh)$ et complexité de l'algorithme de FSG

Le vecteur  $B^{nh}$  est composé de  $k^*(n, h) + 1$  éléments avec d'après l'équation (11)

$$B_M^{nh} = B_m^{nh} e^{k^*(n)\lambda(nh)}$$

Le but de cette section est de déterminer l'ordre de grandeur de  $k^*(n, h)$ .

On a déjà vu que le cours  $S_j^{nh} = S^0 e^{j\sigma\sqrt{h}}$  ( $j = -n, \dots, n$ ) peut s'écrire sous la forme  $S_{j'}^{nh} = S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}$  où  $j'$  est donné par l'équation (15)

Les valeurs maximale et minimale de  $(B)$  à l'instant  $t = nh$ , correspondant à  $S_{j'}^{nh}$  sont données par :

$$\begin{aligned} B_M^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( \max(S^0, K) + \max(S^0 e^{\sigma\sqrt{h}}, K) + \dots + \max(S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}}, K) \right. \\ &\quad \left. + \max(S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-\sigma\sqrt{h}}, K) + \dots + \max(S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}, K) \right) \\ B_m^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( \max(S^0, K) + \max(S^0 e^{-\sigma\sqrt{h}}, K) + \dots + \max(S^0 e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}, K) \right. \\ &\quad \left. + \max(S^0 e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{\sigma\sqrt{h}}, K) + \dots + \max(S^0 e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{j'\sigma\sqrt{h}}, K) \right) \end{aligned}$$

Pour déterminer leurs expressions explicites il faut distinguer les cas suivants :

Premier cas :  $S^0 \leq K$

Dans ce cas on a

$$B_m^{nh}(j') = K$$

Deux sous-cas sont à envisager concernant  $B_M^{nh}(j')$  :

a)  $Si = S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} \leq K$  on a

$$B_M^{nh}(j') = K$$

b)  $Si \exists r = \inf \{i \in \{0, \dots, j'\} / e^{i \sigma \sqrt{h}} S^0 > K\}$

b1)  $Si 2j' - n \geq r$  on a

$$\begin{aligned} B_M^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( rK + S^0 e^{r \sigma \sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-\sigma \sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-(n-j') \sigma \sqrt{h}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( rK + S^0 e^{r \sigma \sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{(j'-r+1) \sigma \sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma \sqrt{h}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-\sigma \sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{-(n-j') \sigma \sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma \sqrt{h}}} \right) \right) \end{aligned}$$

On rappelle que  $j' = \frac{1}{2} \left( n + \frac{\alpha}{\sigma \sqrt{h}} \right)$  où  $\alpha = \ln \left( \frac{S^{nh}}{S^0} \right)$ . On a :

$$B_M^{nh}(j') \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \left( \frac{2S^0 e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sigma n h} \right) \sqrt{h} e^{\left( \frac{nh\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{h}}}$$

b2)  $Si \exists l = \inf \{i \in \{1, \dots, n - j'\} / j' - i \leq r - 1\}$  on a

$$\begin{aligned} B_M^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( rK + S^0 e^{r \sigma \sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-\sigma \sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-(l-1) \sigma \sqrt{h}} + (n - j' - l + 1) K \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (r + n - j' - l + 1) K + S^0 e^{r \sigma \sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{(j'-r+1) \sigma \sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma \sqrt{h}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{j' \sigma \sqrt{h}} e^{-\sigma \sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{-(l-1) \sigma \sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma \sqrt{h}}} \right) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \left( \frac{S^0 e^{\frac{\alpha}{2}}}{\sigma n h} \right) \sqrt{h} e^{\left( \frac{nh\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{h}}} \end{aligned}$$

Deuxième cas :  $S^0 > K$

Pour determiner l'expression de  $B_M^{nh}(j')$  il faut distinguer les deux sous-cas suivants :

a) Si  $2j' - n > 0$

$$B_M^{nh}(j') = \frac{S^0}{n+1} \left( \frac{1 - e^{(j'+1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma\sqrt{h}}} + e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-\sigma\sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \right) \right)$$

On obtient le même équivalent que dans le premier cas /b1).

b) Si  $\exists l = \inf \left\{ i \in \{1, \dots, n - j'\} / S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-i\sigma\sqrt{h}} \leq K \right\}$

$$\begin{aligned} B_M^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( S^0 + S^0 e^{\sigma\sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-\sigma\sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-(l-1)\sigma\sqrt{h}} + (n - j' - l + 1) K \right) \\ &= \frac{S^0}{n+1} \left( \frac{1 - e^{(j'+1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma\sqrt{h}}} + e^{j'\sigma\sqrt{h}} e^{-\sigma\sqrt{h}} \left( \frac{1 - e^{-(l-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \right) + (n - j' - l + 1) K \right) \end{aligned}$$

On obtient le même équivalent que dans le premier cas /b2).

Pour determiner l'expression de  $B_m^{nh}(j')$  il faut distinguer les deux sous-cas suivants :

c) Si  $e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} S^0 \geq K$

$$\begin{aligned} B_m^{nh}(j') &= \frac{S^0}{n+1} \left( \frac{1 - e^{-(n-j'-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} + \frac{e^{-(n-j'-1)\sigma\sqrt{h}} - e^{-(n-2j'-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{\sigma\sqrt{h}}} \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{S^0 \sqrt{h} (1 + e^\tau)}{\sigma n h} \end{aligned}$$

d) Si  $\exists q = \inf \left\{ i \in \{0, \dots, n - j'\} / e^{-i\sigma\sqrt{h}} S^0 < K \right\}$

d1) Si  $n - 2j' \geq q$

$$\begin{aligned} B_m^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( S^0 + S^0 e^{-\sigma\sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{-(q-1)\sigma\sqrt{h}} + K + \dots + K \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( S^0 \frac{1 - e^{-q\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} + (n - q + 1) K \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} K \end{aligned}$$



d2) Si  $\exists z = \inf \{i \in \{1, \dots, j'\} / n - j' - z \leq q - 1\}$  on a :

$$\begin{aligned} B_m^{nh}(j') &= \frac{1}{n+1} \left( S^0 + S^0 e^{-\sigma\sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{-(q-1)\sigma\sqrt{h}} + K + \dots + K \right. \\ &\quad \left. + S^0 e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{z\sigma\sqrt{h}} + \dots + S^0 e^{-(n-j')\sigma\sqrt{h}} e^{j'\sigma\sqrt{h}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( S^0 \frac{1 - e^{-q\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} + (n - j' + z - q)K + S^0 \frac{e^{-(n-j'-z)\sigma\sqrt{h}} - e^{-(n-2j'-1)\sigma\sqrt{h}}}{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{S^0 \sqrt{h}}{\sigma n h} \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que dans tous les cas possibles, mis à part le premier cas/ a) où  $\frac{B_M^{nh}(j')}{B_m^{nh}(j')} = 1$ , on a :

$$\ln \left( \frac{B_M^{nh}(j')}{B_m^{nh}(j')} \right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}}$$

Ainsi,

$$k^*(n, h) = \frac{\ln \left( \frac{A_M^{nh}(j')}{A_m^{nh}(j')} \right)}{\lambda(nh)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{nh\sigma}{2\sqrt{h}\lambda(nh)}$$

On a fait le choix  $\lambda(nh) = o(\sqrt{h})$ . En choisissant  $\lambda(nh) = h$ , on aboutit aux mêmes conclusions que dans le cas de l'option sur moyenne, concernant la complexité de l'algorithme de la méthode de FSG.

### 5.3.2 Récapitulatif des résultats et conclusion

Résumons les résultats obtenus ci-dessus :

$$\begin{aligned} E_t(B_{t+h}) &= B_t + \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} h + o(h) \\ E \left( (B_{t+h})^2 / B_t \right) &= (B_t)^2 + 2B_t \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} h + o(h) \\ E_t(B_{t+h} S_{t+h}) &= B_t S_t + h \left( r B_t S_t + S_t \frac{\max(S_t, K) - B_t}{t} \right) + o(h) \\ E_n(B^{(n+1)h}) &= B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh} h + o(h) \end{aligned}$$

En choisissant  $\boxed{\lambda(nh) = o(\sqrt{h})}$

$$E_n \left( (B^{(n+1)h})^2 \right) = (B_k^{nh})^2 + 2B_k^{nh} \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh} h + o(h)$$

$$E_n \left( B^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = S^{nh} B_k^{nh} + S^{nh} \left( r B_k^{nh} + \frac{\max(S^{nh}, K) - B_k^{nh}}{nh} \right) h + o(h)$$

On voit bien qu'en choisissant  $\lambda(nh) = o(\sqrt{h})$  les conditions de consistance locale sont satisfaites. Comme dans le cas de l'option sur moyenne, ce paramètre de discrétisation a un autre rôle au niveau de la complexité numérique de l'algorithme. En effet, le choix particulier de  $\lambda(nh) = h$  par exemple, réduit la dimension du vecteur  $B^{nh}$  de  $2^N$  (si on décide d'y stocker toutes les valeurs possibles) à une dimension de l'ordre de  $N\sqrt{N} \ll 2^N$ .

L'application du théorème de Kushner nous permet de conclure que le prix approché de l'option sur moyenne capée, donné par l'algorithme de la FSG, tend vers le prix exact de cette option, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

## 5.4 Consistance locale: cas de l'option de vente look-back

Comme il a été déjà mentionné, l'application du théorème de Kushner pour cette option n'est pas possible. Toutefois, nous continuons de vérifier les conditions de consistance locale car nous pensons qu'il s'agit de propriétés naturelles qui doivent être satisfaites par la chaîne de Markov approximant le processus continu. Rappelons que ces propriétés concernent le comportement locale identique (au niveau de la moyenne et de la variance conditionnelles) à un  $o(h)$  du processus continu et du processus discret.

### 5.4.1 Calculs

Calcul des premiers et seconds moments du processus continu  $(M_t)$   
et du moment croisé de  $(M_t, S_t)$

$$\begin{aligned} M_{t+h} &= \max_{0 \leq u \leq t+h} S_u = \max(M_t, \max_{t \leq u \leq t+h} S_u) \\ &= \max \left( M_t, \max_{t \leq u \leq t+h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t) + \sigma(W_u - W_t)} \right) \\ &= \max \left( M_t, \max_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v + \sigma W_v} \right) \end{aligned}$$

Soit  $Q$  la probabilité équivalente à  $P$  de densité

$$L_T = \frac{dP}{dQ}$$

où

$$L_t = e^{-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$$

$(L_t)_t$  est une  $(F_t)_t$  martingale car  $E^P(e^{\frac{1}{2}\lambda^2 T}) < +\infty$   
D'après le théorème de Girsanov  $(B_t)_t$  telque :

$$B_t = W_t + \lambda t$$

est un mouvement brownien sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .  
Ainsi,

$$\begin{aligned} E_t^P(\psi(S_{t+h}, M_{t+h})) &= E_t^Q \left( \frac{\left(\frac{1}{L_{t+h}}\right) \psi(S_{t+h}, M_{t+h})}{E_t^Q \left(\frac{1}{L_T}\right)} \right) \\ &= E_t^Q \left( \frac{1}{L_h} \psi(S_{t+h}, M_{t+h}) \right) \\ &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda W_h + \frac{\lambda^2}{2}h} \psi \left( S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma W_h}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \max \left( M_t, \max_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v + \sigma W_v} \right) \right) \right\} \\ &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \max \left( M_t, \max_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\sigma B_v} \right) \right) \right\} \\ &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \max \left( M_t, S_t e^{\sigma N_h} \right) \right) \right\} \quad \text{où} \quad N_h = \max_{0 \leq v \leq h} B_v \end{aligned}$$

Premier cas :  $M_t = S_t$

$$E_t^P(\psi(S_{t+h}, M_{t+h})) = E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{\sigma N_h} \right) \right\}$$

Calcul de  $E_t^P(M_{t+h})$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y$

Soit

$$\begin{aligned} E_t^P(M_{t+h}) &= M_t E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} e^{\sigma N_h} \right\} \\ &= M_t E_t^Q \left\{ e^{\lambda \sqrt{h} B_1 - \frac{\lambda^2}{2}h} e^{\sigma \sqrt{h} N_1} \right\} \end{aligned}$$

A  $\omega$  fixé, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\lambda\sqrt{h}B_1(\omega)-\frac{\lambda^2}{2}h} &= 1 + \lambda\sqrt{h}B_1(\omega) + \frac{\lambda^2}{2} \left( B_1(\omega)^2 - 1 \right) h + o(h) \\
e^{\sigma\sqrt{h}N_1} &= 1 + \sigma\sqrt{h}N_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} N_1(\omega)^2 h + o(h)
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
e^{\lambda\sqrt{h}B_1(\omega)-\frac{\lambda^2}{2}h} e^{\sigma\sqrt{h}N_1} &= 1 + (\lambda B_1(\omega) + \sigma N_1(\omega)) \sqrt{h} \\
&\quad + \left( \frac{\lambda^2}{2} B_1(\omega)^2 + \lambda\sigma B_1(\omega)N_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} N_1(\omega)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h)
\end{aligned}$$

Après justification, on peut écrire

$$\begin{aligned}
E_t^P(M_{t+h}) &= M_t \left\{ 1 + \left( \lambda E_t^Q(B_1) + \sigma E_t^Q(N_1) \right) \sqrt{h} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\lambda^2}{2} E_t^Q(B_1^2) + \lambda\sigma E_t^Q(B_1 N_1) + \frac{\sigma^2}{2} E_t^Q(N_1^2) - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h) \right\}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
E_t^Q(B_1) &= 0 \\
E_t^Q(N_1) &= E_t^Q(|B_1|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
E_t^Q(N_1^2) &= E_t^Q(B_1^2) = 1
\end{aligned}$$

#### ■ Calcul intermédiaire

Montrons que

$$\boxed{E_t^Q(B_1 N_1) = \frac{1}{2}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
B_1 N_1 &= B_1 \left( \max_{0 \leq v \leq 1} B_v \right) \\
&= B_1 \left( B_1 + \max_{0 \leq v \leq 1} (B_v - B_1) \right)
\end{aligned}$$

Soit  $(\tilde{B}_v)$  le mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ , défini par :  $\tilde{B}_{1-v} = B_1 - B_v$ .

En remarquant que  $B_1 = \tilde{B}_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
B_1 N_1 &= (B_1)^2 - (-\tilde{B}_1) \max_{0 \leq v \leq 1} (-\tilde{B}_{1-v}) \\
&= (B_1)^2 - (-\tilde{B}_1) \max_{0 \leq v \leq 1} (-\tilde{B}_v) \\
&= (B_1)^2 - \hat{B}_1 \hat{N}_1 \text{ où } \hat{B}_v = -\tilde{B}_v
\end{aligned}$$

$$E_t^Q(B_1 N_1) = 1 - E_t^Q(\hat{B}_1 \hat{N}_1)$$

d'où

$$E_t^Q(B_1 N_1) = \frac{1}{2}$$

■

Ainsi,

$$E_t^P(M_{t+h}) = M_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t \right] \sqrt{h} + \left[ \sigma \left( \frac{\lambda + \sigma}{2} \right) M_t \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P(M_{t+h}) = M_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t \right] \sqrt{h} + \left[ \left( \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2} \right) M_t \right] h + o(h)} \quad (15)$$

Calcul de  $E_t^P((M_{t+h})^2)$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y^2$

$$E_t^P((M_{t+h})^2) = (M_t)^2 E_t^Q\left(e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{2\sigma N_h}\right)$$

On obtient :

$$E_t^P((M_{t+h})^2) = (M_t)^2 + \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (M_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ 2\sigma \left( \frac{\lambda + 2\sigma}{2} \right) (M_t)^2 \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P((M_{t+h})^2) = (M_t)^2 + \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (M_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \left( \frac{r + \frac{3\sigma^2}{2}}{2} \right) (M_t)^2 \right] h + o(h)} \quad (16)$$

Calcul de  $E_t^P(M_{t+h} S_{t+h})$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = xy$

$$E_t^P(M_{t+h} S_{t+h}) = M_t S_t E_t^Q\left(e^{(\lambda + \sigma) B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{\sigma N_h}\right)$$

$$\begin{aligned}
& e^{(\lambda+\sigma)B_h(\omega)-\frac{\lambda^2}{2}h} e^{\sigma N_h(\omega)} \\
= & e^{(\lambda+\sigma)\sqrt{h}B_1(\omega)-\frac{\lambda^2}{2}h} e^{\sigma\sqrt{h}N_1(\omega)} \\
= & 1 + ((\lambda + \sigma) B_1(\omega) + \sigma N_1(\omega)) \sqrt{h} \\
& + \left( \frac{(\lambda + \sigma)^2}{2} B_1(\omega)^2 + (\lambda + \sigma) \sigma B_1(\omega) N_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} N_1(\omega)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h)
\end{aligned}$$

On obtient :

$$E_t^P(M_{t+h}S_{t+h}) = M_t S_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \sigma (\lambda + \sigma) M_t S_t \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P(M_{t+h}S_{t+h}) = M_t S_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) M_t S_t \right] h + o(h)} \quad (17)$$

Deuxième cas :  $M_t > S_t$

$$\begin{aligned}
E_t^P(\psi(S_{t+h}, M_{t+h})) &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi(S_t e^{\sigma B_h}, \max(M_t, S_t e^{\sigma N_h})) \right\} \\
&= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi(S_t e^{\sigma B_h}, M_t) I_{\{M_t > S_t e^{\sigma N_h}\}} \right. \\
&\quad \left. + e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi(S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{\sigma N_h}) I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&= E_t^Q \left( e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \psi(S_t e^{\sigma B_h}, M_t) \right) \\
&\quad + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} [\psi(S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{\sigma N_h}) - \psi(S_t e^{\sigma B_h}, M_t)] I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Calcul de  $E_t^P(M_{t+h})$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P(M_{t+h}) &= E_t^Q \left\{ M_t e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} \right\} + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2}h} (S_t e^{\sigma N_h} - M_t) I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&= M_t + \left( S_t e^{-\frac{\lambda^2}{2}h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h + \sigma N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( M_t e^{-\frac{\lambda^2}{2}h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Calcul de  $E_t^P((M_{t+h})^2)$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P \left( (M_{t+h})^2 \right) &= E_t^Q \left\{ (M_t)^2 e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \right\} + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \left( (S_t)^2 e^{2\sigma N_h} - (M_t)^2 \right) I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&= (M_t)^2 + \left( (S_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h + 2\sigma N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( (M_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Calcul de  $E_t^P (M_{t+h} S_{t+h})$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P (M_{t+h} S_{t+h}) &= E_t^Q \left\{ M_t S_t e^{(\lambda + \sigma) B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \right\} \\
&\quad + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \left( (S_t)^2 e^{\sigma B_h} e^{\sigma N_h} - M_t S_t e^{\sigma B_h} \right) I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&= M_t S_t e^{\frac{\sigma}{2}(\sigma + 2\lambda)h} + \left( (S_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{(\lambda + \sigma) B_h} e^{\sigma N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( M_t S_t e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{(\lambda + \sigma) B_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

$$I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} = I_{\{N_1 \geq \frac{\tau}{\sqrt{h}}\}} \quad \text{où } \tau = \frac{\ln \frac{M_t}{S_t}}{\sigma}$$

pour tout  $a > 0$  on a :

$$\begin{aligned}
0 &\leq E_t^Q \left\{ e^{a B_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \leq E_t^Q \left\{ e^{a N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \\
0 &\leq E_t^Q \left\{ e^{a B_h} e^{\sigma N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} \leq E_t^Q \left\{ e^{(a + \sigma) N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Si on montre que

$$E_t^Q \left\{ e^{a N_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} = o(h) \quad \text{pour tout } a > 0 \quad (18)$$

on aura :

$$E_t^P (M_{t+h}) = M_t + o(h)$$

$$E_t^P \left( (M_{t+h})^2 \right) = (M_t)^2 + o(h)$$

$$E_t^P (M_{t+h} S_{t+h}) = M_t S_t + [r M_t S_t] h + o(h)$$

Preuve de (18)

$$\begin{aligned}
 E_t^Q \left\{ e^{aN_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} &= E_t^Q \left\{ e^{a\sqrt{h}N_1} I_{\{N_1 \geq \frac{\tau}{\sqrt{h}}\}} \right\} \\
 &= \int_{|x| > \frac{\tau}{\sqrt{h}}} e^{a\sqrt{h}|x|} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
 &= 2J(\tau, a)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 J(\tau, a) &= \int_{x=\frac{\tau}{\sqrt{h}}}^{+\infty} e^{a\sqrt{h}x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
 &= e^{\frac{a^2}{2}h} \int_{y=\frac{\tau}{\sqrt{h}}-a\sqrt{h}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy
 \end{aligned}$$

Pour  $h$  dans un voisinage de 0, on a :

$$0 \leq J(\tau, a) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=\frac{\tau}{\sqrt{h}}-a\sqrt{h}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\sqrt{h}}-a\sqrt{h}\right)^2} = o(h)$$

donc

$$E_t^Q \left\{ e^{aN_h} I_{\{M_t \leq S_t e^{\sigma N_h}\}} \right\} = 2J(\tau, a) = o(h)$$

Calcul des premiers et seconds moments du processus discret  $(M^{nh})$

et du moment croisé de  $(M^{nh}, S^{nh})$

Nous approximations les variables d'état (S) et (M) par la chaîne de Markov  $(S^{nh}, M^{nh})$  caractérisée par les transitions suivantes :

( II )

up	$(M_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(\max(M_k^{nh}, e^{\sigma\sqrt{h}}S_j^{nh}), e^{\sigma\sqrt{h}}S_j^{nh})$	probabilité	$p$
down	$(M_k^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(M_k^{nh}, e^{-\sigma\sqrt{h}}S_j^{nh})$	probabilité	$(1-p)$

Ainsi, on a :



$$\begin{aligned}
E_n \left( M^{(n+1)h} \right) &= p \max \left( M_k^{nh}, e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} \right) + (1-p) M_k^{nh} \\
E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= p \left[ \max \left( M_k^{nh}, e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} \right)^2 \right] + (1-p) \left( M_k^{nh} \right)^2 \\
E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= p e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} \left[ \max \left( M_k^{nh}, e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} \right) \right] + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} M_k^{nh}
\end{aligned}$$

Premier cas :  $M_k^{nh} = S_j^{nh}$

Dans ce cas  $k = j$  et  $\max \left( M_k^{nh}, e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} \right) = e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
E_n \left( M^{(n+1)h} \right) &= p e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} + (1-p) M_k^{nh} \\
&= M_k^{nh} \left( 1 + p \left( e^{\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= p \left[ e^{2\sigma\sqrt{h}} \left( S_j^{nh} \right)^2 \right] + (1-p) \left( M_k^{nh} \right)^2 \\
&= \left( M_k^{nh} \right)^2 \left( 1 + p \left( e^{2\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= p e^{2\sigma\sqrt{h}} \left( S_j^{nh} \right)^2 + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^{nh} M_k^{nh} \\
&= M_k^{nh} S_j^{nh} \left( p e^{2\sigma\sqrt{h}} + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} \right)
\end{aligned}$$

En faisant un d.l a l ordre 2 en  $\sqrt{h}$ , on obtient :

$$\boxed{E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} + \left[ \frac{\sigma}{2} M_k^{nh} \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{r}{2} M_k^{nh} \right] h + o(h)} \quad (19)$$

$$\boxed{E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( M_k^{nh} \right)^2 + \left[ \sigma \left( M_k^{nh} \right)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left( M_k^{nh} \right)^2 \right] h + o(h)} \quad (20)$$

$$\boxed{E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} S_j^{nh} + \left[ \frac{\sigma}{2} M_k^{nh} S_j^{nh} \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3r+\sigma^2}{2} M_k^{nh} S_j^{nh} \right] h + o(h)} \quad (21)$$

En comparant les équations (17), (18) et (19) d'une part et (21), (22) et (23) d'autre part, on voit que les conditions de consistance locale ne sont pas vérifiées. Ce ci est dû au problème d'échantionnage du maximum continu par le maximum discret. Ce dernier ne peut pas tenir compte du maximum réellement atteint par le processus continu. Pour remédier partiellement à celà, nous proposons une chaîne de markov telque dans la transistion up un "père" donne deux "fils". La probabilité de transition "up-up" va être fixée par la suite par identification des premier, second moments et du moment croisé calculés pour les processus continus et discrets.

Ainsi, dans le cas  $M_k^n = S_j^n$ , on propose de se ramener à l'arbre suivant :

(III)

up	$(M_k^{nh} = S_j^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(M_k^{(n+1)h} = S_{j+2}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	probabilité	$p\alpha$
		$\rightarrow$	$(M_k^{(n+1)h} = S_{j+1}^{(n+1)h}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	probabilité	$p(1 - \alpha)$
down	$(M_k^{nh} = S_j^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(M_k^{(n+1)h} = S_j^{nh}, S_{j-1}^{(n+1)h})$	probabilité	$(1 - p)$

où

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{\pi} - 1}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( M^{(n+1)h} \right) &= p \left( (1 - \alpha) e^{\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{2\sigma\sqrt{h}} \right) S_j^{nh} + (1 - p) M_k^{nh} \\ &= M_k^{nh} \left( 1 + p \left[ (1 - \alpha) e^{\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{2\sigma\sqrt{h}} - 1 \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= p \left( (1 - \alpha) e^{2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{4\sigma\sqrt{h}} \right) \left( S_j^{nh} \right)^2 + (1 - p) \left( M_k^{nh} \right)^2 \\ &= \left( M_k^{nh} \right)^2 \left( 1 + p \left[ (1 - \alpha) e^{2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{4\sigma\sqrt{h}} - 1 \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= p \left( (1 - \alpha) e^{2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{3\sigma\sqrt{h}} \right) \left( S_j^{nh} \right)^2 + (1 - p) e^{-\sigma\sqrt{h}} M_k^{nh} S_j^{nh} \\ &= M_k^{nh} S_j^{nh} \left( p \left( (1 - \alpha) e^{2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{3\sigma\sqrt{h}} \right) + (1 - p) e^{-\sigma\sqrt{h}} \right) \end{aligned}$$

En faisant un d.l a l ordre 1 on obtient

$$E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} + M_k^{nh} \left[ \sigma \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right) \right] \sqrt{h} + M_k^{nh} \left[ \alpha \frac{\sigma^2}{2} + r \frac{(\alpha + 1)}{2} \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( M_k^{nh} \right)^2 + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ \sigma (\alpha + 1) \right] \sqrt{h} + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ \sigma^2 \frac{1 + 5\alpha}{2} + r (\alpha + 1) \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} S_j^{nh} + M_k^{nh} S_j^{nh} \left[ \frac{1+\alpha}{2} \right] \sqrt{h} + \left[ M_k^{nh} S_j^{nh} \frac{1+\alpha}{2} (2\sigma^2 + r) \right] h + o(h)$$

Soit

$$E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} + M_k^{nh} \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + M_k^{nh} \left[ \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \right] h + o(h)$$

$$\begin{aligned} E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= \left( M_k^{nh} \right)^2 + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} \\ &\quad + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ \sigma^2 \left( 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 2 \right) + 2r \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h) \end{aligned}$$

$$E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} S_j^{nh} + M_k^{nh} S_j^{nh} \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + \left[ M_k^{nh} S_j^{nh} (2\sigma^2 + r) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h)$$

Deuxième cas :  $M_k^n > S_j^n$

Dans ce cas on a nécessairement  $k \geq j+1$ . Par suite,  $\max \left( M_k^n, e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right) = M_k^n$ .

Ainsi,

$$E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^n$$

$$E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( M_k^n \right)^2$$

$$\begin{aligned} E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= M_k^n S_j^n \left( p e^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} \right) \\ &= M_k^n S_j^n e^{r\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Soit

$$E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^n S_j^n + \left[ r M_k^n S_j^n \right] h + o(h)$$

### 5.4.2 Récapitulatif des résultats et conclusion

On a obtenu les résultats suivants :

Si  $M_t = S_t$

$$E_t^P (M_{t+h}) = M_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t \right] \sqrt{h} + \left[ \left( \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2} \right) M_t \right] h + o(h)$$

$$E_t^P \left( (M_{t+h})^2 \right) = (M_t)^2 + \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (M_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \left( \frac{r + \frac{3\sigma^2}{2}}{2} \right) (M_t)^2 \right] h + o(h)$$

$$E_t^P (M_{t+h} S_{t+h}) = M_t S_t + \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} M_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) M_t S_t \right] h + o(h)$$

Si  $M_t > S_t$

$$E_t^P (M_{t+h}) = M_t + o(h)$$

$$E_t^P \left( (M_{t+h})^2 \right) = (M_t)^2 + o(h)$$

$$E_t^P (M_{t+h} S_{t+h}) = M_t S_t + [r M_t S_t] h + o(h)$$

Si  $M_k^{nh} = S_j^{nh}$

Cas où la chaîne de markov est (II)

$$E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} + \left[ \frac{\sigma}{2} M_k^{nh} \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{r}{2} M_k^{nh} \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( M_k^{nh} \right)^2 + \left[ \sigma \left( M_k^{nh} \right)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left( M_k^{nh} \right)^2 \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} S_j^{nh} + \left[ \frac{\sigma}{2} M_k^{nh} S_j^{nh} \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3r + \sigma^2}{2} M_k^{nh} S_j^{nh} \right] h + o(h)$$

Cas où la chaîne de markov est (III)

$$E_n \left( M^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} + M_k^{nh} \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + M_k^{nh} \left[ \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( M_k^{nh} \right)^2 + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + \left( M_k^{nh} \right)^2 \left[ \sigma^2 \left( 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 2 \right) + 2r\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = M_k^{nh} S_j^{nh} + M_k^{nh} S_j^{nh} \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + \left[ M_k^{nh} S_j^{nh} \left( 2\sigma^2 + r \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h)$$

Si  $M_k^n > S_j^n$

$$\begin{aligned} E_n \left( M^{(n+1)h} \right) &= M_k^n \\ E_n \left( \left( M^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= (M_k^n)^2 \\ E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= M_k^n S_j^n + \left[ r M_k^n S_j^n \right] h + o(h) \end{aligned}$$

On peut conclure que dans le cas  $M_t > S_t$  qui correspond à  $M_k^n > S_j^n$  en temps discret, les conditions de consistance locales sont satisfaites. Par contre dans le cas  $M_t = S_t$  qui correspond à  $M_k^n = S_j^n$  en temps discret, les conditions de consistance locale ne sont pas satisfaites. Ce ci est dû au problème d'échantionnage du maximum continu par le maximum discret, qui par définition ne peut tenir compte du maximum réellement atteint par le processus continu. On a essayé de rapprocher le comportement du processus discret de celui du processus continu en proposant une chaîne de markov telque dans la transistion up un "père" donne deux "fils". Ce choix a ajouté un degré de liberté qui nous a permis de coïncider les coefficient des termes en  $\sqrt{h}$ . Le fait d'autoriser au maximum discret de prendre la valeur  $M_k^{(n+1)h} = e^{2\sigma\sqrt{h}} S_j^n$  alors que  $S_{j+1}^{(n+1)h} = e^{\sigma\sqrt{h}} S_j^n$  tient compte de manière partielle du problème d'échantionnage mentionné ci-dessus.

Pour montrer la convergence du prix de l'option de vente lookback, donné par l'algorithme de la FSG, vers le prix exact de cette option, nous devons chercher une autre preuve théorique et nous pensons à utiliser les outils de la théorie des semi-groupes.

## 5.5 Consistance locale: cas de l'option d'achat look-back

Les remarques que nous avons faites pour l'option de vente lookback sont les mêmes à mentionner dans le cas de l'option d'achat lookback. Nous vérifions les conditions de consistance locale.

### 5.5.1 Calculs

Calcul des premiers et seconds moments du processus continu  $(m_t)$   
et du moment croisé de  $(m_t, S_t)$

$$\begin{aligned}
m_{t+h} &= \min_{0 \leq u \leq t+h} S_u = \min(m_t, \min_{t \leq u \leq t+h} S_u) \\
&= \min \left( m_t, \min_{t \leq u \leq t+h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t) + \sigma(W_u - W_t)} \right) \\
&= \min \left( M_t, \min_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v + \sigma W_v} \right)
\end{aligned}$$

On considère la probabilité  $Q$  équivalente à la probabilité risque-neutre qui a été définie dans le cas de l'option lookback sur maximum et le mouvement brownien  $(B_t)$  sous  $Q$

$$B_t = W_t + \lambda t$$

$$\begin{aligned}
E_t^P(\psi(S_{t+h}, m_{t+h})) &= E_t^Q \left( \frac{1}{L_h} \psi(S_{t+h}, m_{t+h}) \right) \\
&= E_t^Q \left\{ e^{\lambda W_h + \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma W_h}, \min \left( m_t, \min_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v + \sigma W_v} \right) \right) \right\} \\
&= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \min \left( m_t, \min_{0 \leq v \leq h} S_t e^{\sigma B_v} \right) \right) \right\} \\
&= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \min \left( m_t, S_t e^{\sigma \min_{0 \leq v \leq h} B_v} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

Or,

$$\min_{0 \leq v \leq h} B_v = - \max_{0 \leq v \leq h} (-B_v)$$

Soit  $\bar{N}_h = \max_{0 \leq v \leq h} (-B_v)$ . On sait que  $\bar{N}_h$  et  $|B_v|$  ont même lois sous  $Q$ .

$$E_t^P(\psi(S_{t+h}, m_{t+h})) = E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \min \left( m_t, S_t e^{-\sigma \bar{N}_h} \right) \right) \right\}$$

Premier cas :  $m_t = S_t$

$$E_t^P(\psi(S_{t+h}, m_{t+h})) = E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{-\sigma \bar{N}_h} \right) \right\}$$

Calcul de  $E_t^P(m_{t+h})$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y$

Soit

$$\begin{aligned} E_t^P(m_{t+h}) &= m_t E_t^Q \left\{ e_t^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \bar{N}_h} \right\} \\ &= m_t E_t^Q \left\{ e^{\lambda \sqrt{h} B_1 - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \sqrt{h} \bar{N}_1} \right\} \end{aligned}$$

A  $\omega$  fixé, on a :

$$\begin{aligned} e^{\lambda \sqrt{h} B_1(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} h} &= 1 + \lambda \sqrt{h} B_1(\omega) + \frac{\lambda^2}{2} (B_1(\omega)^2 - 1) h + o(h) \\ e^{\sigma \sqrt{h} \bar{N}_1} &= 1 - \sigma \sqrt{h} \bar{N}_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} \bar{N}_1(\omega)^2 h + o(h) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} e^{\lambda \sqrt{h} B_1(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \sqrt{h} \bar{N}_1} &= 1 + (\lambda B_1(\omega) - \sigma \bar{N}_1(\omega)) \sqrt{h} \\ &\quad + \left( \frac{\lambda^2}{2} B_1(\omega)^2 - \lambda \sigma B_1(\omega) \bar{N}_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} \bar{N}_1(\omega)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h) \end{aligned}$$

Après justification, on obtient

$$\begin{aligned} E_t^P(m_{t+h}) &= m_t \left\{ 1 + (\lambda E_t^Q(B_1) - \sigma E_t^Q(\bar{N}_1)) \sqrt{h} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\lambda^2}{2} E_t^Q(B_1^2) - \lambda \sigma E_t^Q(B_1 \bar{N}_1) + \frac{\sigma^2}{2} E_t^Q((\bar{N}_1)^2) - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h) \right\} \end{aligned}$$

Mais

$$\boxed{E_t^Q(B_1 \bar{N}_1) = -E_t^Q((-B_1) \bar{N}_1) = -\frac{1}{2}}$$

soit

$$E_t^P(m_{t+h}) = m_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t \right] \sqrt{h} + \left[ \sigma \left( \frac{\lambda + \sigma}{2} \right) m_t \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P(m_{t+h}) = m_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{1}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) m_t \right] h + o(h)} \quad (22)$$

Calcul de  $E_t^P((m_{t+h})^2)$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y^2$

$$E_t^P((m_{t+h})^2) = (M_t)^2 E_t^Q \left( e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-2\sigma \bar{N}_h} \right)$$

On obtient :

$$E_t^P \left( (m_{t+h})^2 \right) = (m_t)^2 - \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (m_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ 2\sigma \left( \frac{\lambda + 2\sigma}{2} \right) (m_t)^2 \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P \left( (m_{t+h})^2 \right) = (m_t)^2 - \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (m_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{1}{2} (r + 3\sigma^2) (m_t)^2 \right] h + o(h)}$$
(23)

Calcul de  $E_t^P (m_{t+h} S_{t+h})$ :

Il suffit de considérer la fonction  $\Psi : (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = xy$

$$E_t^P (m_{t+h} S_{t+h}) = m_t S_t E_t^Q \left( e^{(\lambda + \sigma) B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \bar{N}_h} \right)$$

$$\begin{aligned} & e^{(\lambda + \sigma) B_h(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \bar{N}_h(\omega)} \\ = & e^{(\lambda + \sigma) \sqrt{h} B_1(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} h} e^{-\sigma \sqrt{h} \bar{N}_1(\omega)} \\ = & 1 + \left( (\lambda + \sigma) B_1(\omega) - \sigma \bar{N}_1(\omega) \right) \sqrt{h} \\ & + \left( \frac{(\lambda + \sigma)^2}{2} B_1(\omega)^2 - \sigma (\sigma + \lambda) B_1(\omega) \bar{N}_1(\omega) + \frac{\sigma^2}{2} \bar{N}_1(\omega)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \right) h + o(h) \end{aligned}$$

On obtient :

$$E_t^P (m_{t+h} S_{t+h}) = m_t S_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \sigma (\lambda + \sigma) m_t S_t \right] h + o(h)$$

$$\boxed{E_t^P (m_{t+h} S_{t+h}) = m_t S_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) m_t S_t \right] h + o(h)}$$
(24)

Deuxième cas :  $m_t < S_t$

$$\begin{aligned} E_t^P (\psi(S_{t+h}, m_{t+h})) &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, \min(m_t, S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}) \right) \right\} \\ &= E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, m_t \right) I_{\{m_t < S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right. \\ &\quad \left. + e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{-\sigma \bar{N}_h} \right) I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\ &= E_t^Q \left( e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, m_t \right) \right) \\ &\quad + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \left[ \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, S_t e^{-\sigma \bar{N}_h} \right) - \psi \left( S_t e^{\sigma B_h}, m_t \right) \right] I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \end{aligned}$$



Calcul de  $E_t^P(m_{t+h})$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P(m_{t+h}) &= E_t^Q \left\{ m_t e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \right\} + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} (S_t e^{-\sigma \bar{N}_h} - m_t) I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&= m_t + \left( S_t e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \sigma \bar{N}_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( m_t e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Calcul de  $E_t^P((m_{t+h})^2)$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P((m_{t+h})^2) &= E_t^Q \left\{ (m_t)^2 e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \right\} + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} ((S_t)^2 e^{-2\sigma \bar{N}_h} - (m_t)^2) I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&= (m_t)^2 + \left( (S_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - 2\sigma \bar{N}_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( (m_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

Calcul de  $E_t^P(m_{t+h} S_{t+h})$ :

$$\begin{aligned}
E_t^P(m_{t+h} S_{t+h}) &= E_t^Q \left\{ m_t S_t e^{(\lambda + \sigma) B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} \right\} \\
&\quad + E_t^Q \left\{ e^{\lambda B_h - \frac{\lambda^2}{2} h} ((S_t)^2 e^{\sigma B_h} e^{-\sigma \bar{N}_h} - m_t S_t e^{\sigma B_h}) I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&= m_t S_t e^{\frac{\sigma}{2}(\sigma + 2\lambda)h} + \left( (S_t)^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{(\lambda + \sigma) B_h - \sigma \bar{N}_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \\
&\quad - \left( m_t S_t e^{-\frac{\lambda^2}{2} h} \right) E_t^Q \left\{ e^{(\lambda + \sigma) B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\}
\end{aligned}$$

$$I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} = I_{\{\bar{N}_1 \geq \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{h}}\}} \quad \text{où } \bar{\tau} = \frac{\ln \frac{S_t}{m_t}}{\sigma}$$

On a :

$$\sigma \bar{N}_h \geq \sigma (-B_h)$$

$$0 \leq E_t^Q \left\{ e^{-\sigma \bar{N}_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \leq E_t^Q \left\{ e^{\sigma B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} \right\}$$

Si on montre que

$$E_t^Q \left\{ e^{a B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} = o(h) \quad \text{pour tout } a > 0 \quad (25)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \boxed{E_t^P(m_{t+h}) &= m_t + o(h)} \\ \boxed{E_t^P((m_{t+h})^2) &= (m_t)^2 + o(h)} \\ \boxed{E_t^P(m_{t+h} S_{t+h}) &= m_t S_t + [r m_t S_t] h + o(h)} \end{aligned}$$

Preuve de (25)

$$\begin{aligned} E_t^Q \left\{ e^{a B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} &= E_t^Q \left\{ e^{a \sqrt{h} B_1} I_{\{|B_1| \geq \frac{\tau}{\sqrt{h}}\}} \right\} \\ &= \int_{|x| > \frac{\tau}{\sqrt{h}}} e^{a \sqrt{h} x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= J(\bar{\tau}, a) + J(\bar{\tau}, -a) \end{aligned}$$

On a montré dans (5.3.1) que :

$$J(\tau, a) = o(h)$$

Ce résultat est vrai pour tout  $\tau > 0$  et pour tout réel  $a$ . Ainsi,

$$E_t^Q \left\{ e^{a B_h} I_{\{m_t \geq S_t e^{-\sigma \bar{N}_h}\}} \right\} = J(\bar{\tau}, a) + J(\bar{\tau}, -a) = o(h)$$

Calcul des premiers et seconds moments du processus continu  $(m^{nh})$   
et du moment croisé de  $(m^{nh}, S^{nh})$

Les variables d'état (S) et (m) sont approximés par la chaîne de Markov  $(S^{nh}, m^{nh})$  explicitée par (I) dans la section (3.2.1).

$$\begin{aligned}
E_n \left( m^{(n+1)h} \right) &= pm_k^n + (1-p) \min \left( m_k^n, e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right) \\
E_n \left( \left( m^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= p \left( m_k^n \right)^2 + (1-p) \left( \min \left( m_k^n, e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right) \right)^2 \\
E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= pe^{\sigma\sqrt{h}} S_j^n m_k^n + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \min \left( m_k^n, e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right)
\end{aligned}$$

Premier cas :  $m_k^n = S_j^n$

Dans ce cas  $k = j$  et  $\min \left( m_k^n, e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right) = e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n$ .

$$\begin{aligned}
E_n \left( m^{(n+1)h} \right) &= pm_k^n + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \\
&= m_k^n \left( 1 + (1-p) \left( e^{-\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{E_n \left( m^{(n+1)h} \right) = m_k^n - m_k^n \left[ \frac{\sigma}{2} \right] \sqrt{h} + m_k^n \left[ \frac{r}{2} \right] h + o(h)} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
E_n \left( \left( m^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= p \left[ \left( m_k^n \right)^2 \right] + (1-p) e^{-2\sigma\sqrt{h}} \left( S_j^n \right)^2 \\
&= \left( m_k^n \right)^2 \left( 1 + (1-p) \left( e^{-2\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{E_n \left( \left( m^{(n+1)h} \right)^2 \right) = \left( m_k^n \right)^2 - \left[ \sigma \left( m_k^n \right)^2 \right] \sqrt{h} + \left( m_k^n \right)^2 \left[ r + \frac{\sigma^2}{2} \right] h + o(h)} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= pe^{\sigma\sqrt{h}} S_j^n m_k^n + (1-p) e^{-2\sigma\sqrt{h}} \left( S_j^n \right)^2 \\
&= m_k^n S_j^n \left( e^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p) \left( e^{-2\sigma\sqrt{h}} - e^{\sigma\sqrt{h}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = m_k^n S_j^n - \left[ \frac{\sigma}{2} m_k^n S_j^n \right] \sqrt{h} + m_k^n S_j^n \left[ \frac{3r+\sigma^2}{2} \right] h + o(h)} \quad (28)$$

En comparant les équations (24), (25) et (26) d'une part et (28), (29) et (30) d'autre part on voit que les conditions de consistance locale ne sont pas vérifiées. Ainsi, dans le cas  $m_k^n = S_j^n$ . Comme dans le cas d'option de vente lookback ceci est dû problème d'échantionnage. Pour se rapprocher

du comportement locale du processus continu, on propose un nouveau arbre. Dans ce dernier on autorise au minimum discret de prendre la valeur  $m_k^{(n+1)h} = e^{-2\sigma\sqrt{h}} S_j^n$  alors que  $S_{j-1}^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n$  ce qui tient compte partiellement du problème d'échantionnage. Dans le cas  $m_k^n = S_j^n$ , on propose la chaîne suivante :

( IV )

up	$(m_k^{nh} = S_j^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(m_k^{(n+1)h} = S_j^{nh}, S_{j+1}^{(n+1)h})$	proba	$p$
down	$(m_k^{nh} = S_j^{nh}, S_j^{nh})$	$\rightarrow$	$(m_k^{(n+1)h} = S_{j-1}^{(n+1)h}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1-p)(1-\alpha)$
		$\rightarrow$	$(m_k^{(n+1)h} = S_{j-2}^{nh}, S_{j-1}^{(n+1)h})$		$(1-p)\alpha$

où

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1$$

$$\begin{aligned} E_n(m^{(n+1)h}) &= pm_k^{nh} + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-2\sigma\sqrt{h}} \right) S_j^{nh} \\ &= m_k^{nh} \left( 1 + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-2\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( (m^{(n+1)h})^2 \right) &= p (m_k^{nh})^2 + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-4\sigma\sqrt{h}} \right) (S_j^{nh})^2 \\ &= (m_k^{nh})^2 \left( 1 + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-4\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( M^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= pm_k^{nh} S_j^{nh} + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-3\sigma\sqrt{h}} \right) (S_j^{nh})^2 \\ &= m_k^{nh} S_j^{nh} \left( 1 + (1-p) \left( (1-\alpha) e^{-2\sigma\sqrt{h}} + \alpha e^{-3\sigma\sqrt{h}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

En faisant un d.l a l ordre 2 en  $\sqrt{h}$  on obtient

$$E_n(m^{(n+1)h}) = m_k^{nh} - m_k^{nh} \left[ \sigma \left( \frac{\alpha+1}{2} \right) \right] \sqrt{h} + m_k^{nh} \left[ \alpha \frac{\sigma^2}{2} + r \frac{(\alpha+1)}{2} \right] h + o(h)$$

$$E_n \left( (m^{(n+1)h})^2 \right) = (m_k^n)^2 - (m_k^n)^2 [\sigma(\alpha+1)] \sqrt{h} + (m_k^n)^2 \left[ \sigma^2 \frac{1+5\alpha}{2} + r(\alpha+1) \right] h + o(h)$$

$$E_n(m^{(n+1)h} S^{(n+1)h}) = m_k^n S_j^n - m_k^n S_j^n [\sqrt{h} + m_k^n S_j^n \left[ \frac{1+\alpha}{2} (2\sigma^2 + r) \right] h + o(h)$$

Soit

$$\begin{aligned} E_n \left( m^{(n+1)h} \right) &= m_k^n - m_k^n \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + m_k^n \left[ \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \right] h + o(h) \\ E_n \left( \left( m^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= (m_k^n)^2 - (m_k^n)^2 \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + (m_k^n)^2 \left[ \sigma^2 \left( 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 2 \right) + 2r \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h \\ &\quad + o(h) \\ E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= m_k^n S_j^n - m_k^n S_j^n \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + m_k^n S_j^n \left[ (2\sigma^2 + r) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h) \end{aligned}$$

Deuxième cas :  $m_k^n < S_j^n$

Dans ce cas on a nécessairement  $k \leq j - 1$ . Parsuite,

$$\min \left( m_k^n, e^{-\sigma\sqrt{h}} S_j^n \right) = m_k^n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_n \left( m^{(n+1)h} \right) &= m_k^n \\ E_n \left( \left( m^{(n+1)h} \right)^2 \right) &= (m_k^n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) &= m_k^n S_j^n \left( p e^{\sigma\sqrt{h}} + (1-p) e^{-\sigma\sqrt{h}} \right) \\ &= m_k^n S_j^n e^{r\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Soit

$$E_n \left( m^{(n+1)h} S^{(n+1)h} \right) = m_k^n S_j^n + \left[ r m_k^n S_j^n \right] h + o(h)$$

### 5.5.2 Récapitulatif des résultats et conclusion

On a obtenu les résultats suivants :

Si  $m_t = S_t$

$$\begin{aligned} E_t^P \left( m_{t+h} \right) &= m_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{1}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) m_t \right] h + o(h) \\ E_t^P \left( \left( m_{t+h} \right)^2 \right) &= (m_t)^2 - \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} (m_t)^2 \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{1}{2} \left( r + 3\sigma^2 \right) (m_t)^2 \right] h + o(h) \\ E_t^P \left( m_{t+h} S_{t+h} \right) &= m_t S_t - \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_t S_t \right] \sqrt{h} + \left[ \frac{3}{2} \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) m_t S_t \right] h + o(h) \end{aligned}$$

Si  $m_t < S_t$

$$\begin{aligned} E_t^P(m_{t+h}) &= m_t + o(h) \\ E_t^P((m_{t+h})^2) &= (m_t)^2 + o(h) \\ E_t^P(m_{t+h}S_{t+h}) &= m_t S_t + [rm_t S_t] h + o(h) \end{aligned}$$

Si  $m_k^{nh} = S_j^{nh}$

Si la chaîne de markov est (I) (section 3.2.1)

$$\begin{aligned} E_n(m^{(n+1)h}) &= m_k^n - m_k^n \left[ \frac{\sigma}{2} \right] \sqrt{h} + m_k^n \left[ \frac{r - \sigma^2}{2} \right] h + o(h) \\ E_n((m^{(n+1)h})^2) &= (m_k^n)^2 - [\sigma (m_k^n)^2] \sqrt{h} + (m_k^n)^2 \left[ r - \frac{\sigma^2}{2} \right] h + o(h) \\ E_n(m^{(n+1)h} S^{(n+1)h}) &= m_k^n S_j^n - \left[ \frac{\sigma}{2} m_k^n S_j^n \right] \sqrt{h} + m_k^n S_j^n \left[ \frac{3}{2} r - \sigma^2 \right] h + o(h) \end{aligned}$$

Si la chaîne de Markov est (IV) (section 5.4.1)

$$\begin{aligned} E_n(m^{(n+1)h}) &= m_k^n - m_k^n \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + m_k^n \left[ \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} r \right] h + o(h) \\ E_n((m^{(n+1)h})^2) &= (m_k^n)^2 - (m_k^n)^2 \left[ 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + (m_k^n)^2 \left[ \sigma^2 \left( 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 2 \right) + 2r \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h) \\ E_n(m^{(n+1)h} S^{(n+1)h}) &= m_k^n S_j^n - m_k^n S_j^n \left[ \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \sqrt{h} + m_k^n S_j^n \left[ (2\sigma^2 + r) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] h + o(h) \end{aligned}$$

Si  $m_k^n > S_j^n$

$$\begin{aligned} E_n(m^{(n+1)h}) &= m_k^n \\ E_n((m^{(n+1)h})^2) &= (m_k^n)^2 \\ E_n(m^{(n+1)h} S^{(n+1)h}) &= m_k^n S_j^n + [rm_k^n S_j^n] h + o(h) \end{aligned}$$

On peut conclure que dans le cas  $m_t < S_t$  qui correspond à  $M_k^n < S_j^n$  en temps discret, les conditions de consistance locales sont satisfaites. Par

contre, dans le cas  $m_t = S_t$  qui correspond à  $m_k^n = S_j^n$  en temps discret, les conditions de consistance locale ne sont pas satisfaites. Comme on l'a mentionné dans le cas de l'option de vente lookback, ce ci est dû au problème d'échantillonnage du minimum continu par le minimum discret. En autorisant le minimum discret de prendre la valeur  $m_k^{(n+1)h} = e^{-2\sigma\sqrt{h}}S_j^n$  alors que  $S_{j-1}^{(n+1)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}S_j^n$  tient compte de manière partielle du problème d'échantillonnage.

Pour montrer la convergence du prix de l'option d'achat lookback, donné par l'algorithme de la FSG, vers le prix exact de cette option, nous devons, de même, chercher une autre preuve théorique.

## 6 Conclusion

L'apport principal de cette étude c'est qu'elle fournit une preuve théorique de la convergence du prix approché d'une option asiatique, donné par l'algorithme de la FSG, vers le prix exact. A notre connaissance, c'est la première preuve de la convergence d'un algorithme pour les options asiatiques américaines.

En effet, en se basant sur le théorème de Kushner, on a étudié le prix de l'option sur moyenne et celui de l'option sur moyenne capée, fournis par l'algorithme de la FSG. Nous avons montré que pour obtenir la convergence vers le prix exact de chacune des options ( lorsque le nombre d'itérations de l'algorithme tend vers l'infini ), il suffisait de choisir un pas de discrétisation dans la direction de la moyenne qui soit égale à  $o(\sqrt{h})$  par exemple  $h$ . Ce qui signifie que, par rapport à la discrétisation de Barraquand et Pudet, il fallait raffiner la discrétisation dans la direction de la path-dependance.

Nous avons montré que le choix du pas de discrétisation dans la direction de la moyenne égale à  $h$  permet d'obtenir une complexité numérique satisfaisante de l'algorithme.

Quoi que cette étude ne nous a pas permis de conclure quand à la convergence théorique des prix approchés des options lookback vers les prix exact, on a essayé de construire des chaînes de Markov approximant le processus continu et ayant un comportement local qui se rapproche de celui du processus continu. Au niveau de la consistance locale ( coïncidence des comportements locaux du processus continu et discret au niveau de la moyenne et la variance ), les chaînes de markov ainsi construites sont meilleurs que les chaînes de markov construites à partir de l'arbre binomial classique.

Pour étudier la convergence des prix approchés des options lookback, fournis par l'algorithme de la FSG, vers les prix exacts, nous envisageons d'utiliser d'autres outils théoriques basés sur la théorie des semigroupes.

Par ailleurs, nous sommes conscients de l'importance de réaliser des tests numériques pour confirmer la pertinence des résultats théoriques que nous avons obtenu.

## 7 Bibliographie

- [1] J. Cox et M. Rubinstein. Options Markets. Prentice-hall, INC, 1985.
- [2] J. Barraquand et T. Pudet. Pricing of american path-dependent contingent claims. *Journal of mathematical finance*, 6: 17-51, 1996.
- [3] P.A. Forsyth, K.R. Vetzal et R. Zvan. Convergence of lattice and PDE methods for pricing asian options. <http://www.uwaterloo.ca/> , 1998.
- [4] J. Hull et A. White. Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options. *Journal of derivatives*, 1: 21-31, 1993.
- [5] H. Kushner et P.G. Dupuis. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. Springer-Verlag, 1992.
- [6] H. Kushner. Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations. Academic Press, New york, 1977.
- [7] D. Lamberton et G. Pages. Sur l'approximation des réduites. *Annuaire de l'institut Henri Poincaré*, vol-26, n 2, p 331-355.
- [8] M. Musiela et M. Rutkowski. Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, 1998.