

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y
AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

SEMI-ANILLOS EN MATEMATICA APLICADA

Jean-Pierre QUADRAT
INRIA-Rocquencourt (Francia)

28

Rosario - República Argentina
- 1999 -

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

SEMI-ANILLOS EN MATEMATICA APLICADA

Jean-Pierre QUADRAT

INRIA-Rocquencourt (Francia)

Profesor visitante - Rosario - Noviembre 1998

Lecciones redactadas por
Lic. Ricardo KATZ

Rosario - República Argentina
- 1999 -

Este curso intensivo dictado por el Prof. Jean-Pierre Quadrat en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) en noviembre de 1998 será seguido por el que desarrollará el año próximo el Prof. Guy Cohen sobre el tema : “Discrete Event System Analysis and Control : from timed Petri Net to Algebra” .

Ambos forman parte del ciclo de cuatro cursos intensivos previstos en el marco del Programa de Capacitación e Iniciación en la Investigación sobre “Sistemas de Eventos Discretos y Redes de Comunicación” que vincula al INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) de Francia con el Instituto de Matemática “Beppo Levi” de la FCEIA-UNR.

Entendemos que la publicación de este Cuaderno facilitará a los lectores en lengua castellana un primer contacto con un material de mucho interés, reciente, en plena evolución y que abre la perspectiva de múltiples aplicaciones en sistemas de transporte, sincronización de semáforos, puesta en marcha de plantas industriales, sistemas flexibles de manufactura, redes de computadoras, etc.

Es con satisfacción que señalamos que jóvenes investigadores que han participado en varias actividades del Programa intervienen desde comienzos de 1999 en un proyecto de investigación y desarrollo que un equipo del INRIA tiene a su cargo, tarea que incluye el estudio de casos concretos en algunas de las áreas de aplicación antes mencionadas.

Deseamos finalmente agradecer a todos quienes han permitido con su dedicación y apoyo la materialización de las etapas ya cumplidas como aquéllas en curso del Programa y , en particular, al CONICET, a la Fundación Antorchas, al Ministère des Affaires Étrangères de Francia, al INRIA, y al proyecto ALAPEDES del Programa Europeo TMR.

Consejo Científico del Instituto de Matemática “Beppo Levi”.

Ce mémoire est un cours résumant une partie des travaux réalisés dans le cadre d’un groupe de travail de l’INRIA appelé Max-Plus ainsi que des collaborations de ce groupe de travail avec d’autres personnes intéressées par ce sujet. Les personnes ayant participé à un moment ou à un autre à ces travaux sont M. Akian, F. Baccelli, D. Dubois, G. Cohen, O. Fall, S. Gaubert, G.J. Olsder, P. Moller, M. Viot et l’auteur. Dans cette présentation les liens entre l’algèbre max-plus et la commande stochastique ont été expliqués. Les travaux sur la commande stochastique dont il est question ici doivent beaucoup à des collaborations avec F. Delebecque et M. Viot.

J’aimerais souligner ici la collaboration constante avec G. Cohen avec lequel ces recherches ont commencé et qui n’a jamais cessé d’avoir des idées renouvelant le sujet, avec S. Gaubert qui a joué le plus grand rôle dans les travaux récents, avec M. Akian qui a eu un apport essentiel dans les résultats exposés dans le chapitre 2 et enfin avec M. Viot qui a apporté depuis le début des contributions fondamentales. Ce sont leurs idées qui sont exposées ici.

Je voudrais remercier ici toutes les personnes ayant permis la réalisation de ce mémoire en particulier : - E. Rofman qui a été l’instigateur passionné de ce cours présent à toutes les étapes (discussion du contenu, organisation du cours, relecture du mémoire); - R. Katz qui à partir du cours oral et de notes manuscrites en français a fait un formidable travail de rédaction et de réalisation du mémoire (les utilisateurs de Tex savent le travail que cela représente de rédiger et réaliser un mémoire de 80 pages); - E. Mancinelli qui a fait une relecture du mémoire indispensable étant donnée la méconnaissance complète de la langue espagnole de l’auteur.

J.-P. Q. email: Jean-Pierre.Quadrat@inria.fr
INRIA-Rocquencourt, Domaine de Voluceau
BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France).

Indice General

Capítulo 1. Semi-anillos y semi-módulos	9
1. Introducción y motivación	9
2. Semi-anillos y semi-módulos	10
3. Ecuaciones lineales	12
4. Simetrización del álgebra max-plus .	15
5. Polinomios, funciones racionales y ecuaciones polinomiales.	17
6. Núcleo, imagen y proyección de Mairesse.	20
7. Notas	22
Capítulo 2. Dualidad entre probabilidad y optimización.	25
1. Medida de costo	25
2. Variables de decisión.	27
3. Series de variables de decisión.	29
4. Mecánica estadística y transformada de Cramer.	31
5. Decisión generalizada.	33
6. Notas	35
Capítulo 3. Ecuaciones lineales recurrentes.	37
1. Cadenas de Bellman.	37
2. Propiedades de las matrices estocásticas.	39
3. Propiedades espectrales de las matrices max-plus.	42
4. Control estocástico.	43
5. Problema de control estocástico actualizado.	46
6. Control con información incompleta.	47
7. Notas.	48
Capítulo 4. Redes.	49
1. Redes de colas de espera.	49
2. Redes de transporte.	51
3. Control óptimo de redes estocásticas.	53
4. Residuación.	54
5. Proyección.	57
6. Agregación.	59
7. Notas	61
Capítulo 5. Sistemas de entrada-salida.	63
1. Redes de Petri.	63
2. Grafos de eventos temporalizados.	66
3. Resolución de tres problemas.	70
4. Optimización de recursos y ordenamiento óptimo.	72
5. Redes de Petri fluidas y control estocástico.	75

6. Notas	77
Notación	79
Bibliografía	81
Indice de Materias	85

CAPÍTULO 1

Semi-anillos y semi-módulos

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

El objetivo del curso es mostrar la importancia de las estructuras de semi-anillos y de semi-módulos en matemática aplicada y en las ciencias de la ingeniería. Estas estructuras algebraicas tan generales permiten reunir en un cuadro único problemas de naturaleza matemática, a priori, diferentes.

Si consideramos los números reales munidos de las operaciones de máximo y de suma en lugar de los operadores tradicionales de suma y multiplicación obtenemos una estructura algebraica de semi-anillo que nos permite hablar de linealidad. Esta linealidad permite definir una nueva clase de modelos tan manejables como los sistemas lineales habituales. En los siguientes cuatro ejemplos mostramos los sistemas lineales max-plus, y las ventajas aportadas por esta observación en su análisis.

1.1. ECUACIONES DE TIPO HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (H.J.B.)

La ecuación de HJB de la mecánica :

$$\frac{\partial w^\psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^\psi}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad w_0 = \psi ,$$

admite una solución única en los espacios funcionales a determinar, que se interpreta como la solución del problema de cálculo variacional :

$$v(t, y) = \inf_{x(\cdot), x(t)=y} \left(\psi(x(0)) + \int_0^t \frac{\dot{x}^2(s)}{2} ds \right) ,$$

y por lo tanto $\psi \mapsto w^\psi$ es una aplicación min-plus lineal : $w^{(k+\psi)} = k + w^\psi$ y $w^{(\psi_1 \wedge \psi_2)} = w^{\psi_1} \wedge w^{\psi_2}$.

1.2. FÓRMULA DE CRAMER

Las fórmulas de Cramer

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc} ,$$

dan la solución del sistema lineal (en el sentido clásico) :

$$\begin{cases} ax + by = e , \\ cx + dy = f , \end{cases}$$

permitiendo resolver igualmente :

$$\begin{cases} \max(a + x, b + y) = e , \\ \max(c + x, d + y) = f , \end{cases}$$

por

$$\begin{aligned}x &= \max(e + d, \ominus(b + f)) - \max(a + d, \ominus(b + c)) , \\y &= \max(a + f, \ominus(e + c)) - \max(a + d, \ominus(b + c)) ,\end{aligned}$$

donde $\ominus \ominus a = a$ y

$$\max(b, \ominus a) = \begin{cases} b & \text{si } b > a , \\ \ominus a & \text{si } b < a , \\ a & \text{si } b = a . \end{cases}$$

EJEMPLO 1.1. Para $a = 3, b = 0, c = 0, d = 2, e = 5, f = 5$, obtenemos :

$$\begin{aligned}x &= \max(7, \ominus 5) - \max(5, \ominus 0) = 7 - 5 = 2 , \\y &= \max(8, \ominus 5) - \max(5, \ominus 0) = 8 - 5 = 3 .\end{aligned}$$

Puede verificarse que estos valores son solución del sistema lineal max-plus.

1.3. INF-CONVOLUCIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS.

La convolución de dos leyes gaussianas resulta gaussiana. De igual manera la inf-convolución de dos formas cuadráticas resulta cuadrática siguiendo los coeficientes la misma ley. Más precisamente, notando :

$$Q_{m,\sigma}(x) \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{\sigma} \right)^2 ,$$

tenemos

$$\inf_y [Q_{m,\sigma}(y) + Q_{\tilde{m},\tilde{\sigma}}(x - y)] = Q_{m+\tilde{m},\sqrt{\sigma^2+\tilde{\sigma}^2}}(x) .$$

1.4. GRAFOS DE EVENTOS TEMPORALIZADOS.

Los grafos de eventos temporalizados (capítulo 5, figura 5) son una subclase de redes de Petri que siguen el siguiente sistema entrada salida lineal max-plus :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k \oplus BU_k , \\ Y_k = CX_k , \end{cases}$$

en el cual el producto matricial debe considerarse en el sentido max-plus (sustituimos la suma por el máximo y el producto por la suma) y \oplus significa máximo.

2. SEMI-ANILLOS Y SEMI-MÓDULOS

Nos referiremos a las estructuras de semi-anillo y de semi-módulo y además a las estructuras particulares que de éstas se derivan.

DEFINICIÓN 2.1. Un *semi-anillo* (S, \oplus, \otimes) es un conjunto S junto con dos operaciones \oplus, \otimes que verifican :

1. \oplus es asociativa, conmutativa, y tiene elemento neutro ε .
2. \otimes es asociativa, tiene elemento neutro e , es distributiva respecto a \oplus y ε es absorbente, es decir $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon, \forall a \in S$.

En el caso en que el semi-anillo sea *idempotente* ($a \oplus a = a, \forall a \in S$) se dice que S es un *dioides*. Cuando $(S - \{\varepsilon\}, \otimes)$ es un grupo (todo elemento admite inverso) se dice que S es un *semi-campo*.

Una estructura de módulo sobre un semi-anillo será llamada *semi-módulo*.

EJEMPLO 2.2. Semi-anillos idempotentes :

S	\oplus	\otimes	ε	e	Aplicación	Nombre
$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$	min	+	$+\infty$	0	camino más corto	\mathbb{R}_{\min}
$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$	min	+	$+\infty$	0	camino más corto	$\overline{\mathbb{R}}_{\min}$
$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$	max	+	$-\infty$	0	camino más largo	\mathbb{R}_{\max}
$\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$	max	min	0	$+\infty$	capacidad máxima	$\mathbb{R}^+_{\max, \min}$
$[0, 1]$	max	\times	0	1		
\mathbb{R}^+	max	\times	0	1		$\mathbb{R}^+_{\max, \times}$
$\{0, 1\}$	\cup	\cap	0	1	lógica	\mathbb{B}
$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	\cup	prod. lat.	\emptyset	-	lenguajes	\mathbb{L}

Semi-anillos no idempotentes :

S	\oplus	\otimes	ε	e	Aplicación	Nombre
\mathbb{R}^+	+	\times	0	1	probabilidad	\mathbb{R}^+

A partir de estas estructuras elementales es posible construir estructuras vectoriales, las cuales tendrán una estructura análoga.

En particular el conjunto de las matrices cuadradas con entradas en estas estructuras y con el producto matricial adaptado :

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} \otimes B_{kj}) ,$$

posee la misma estructura que los escalares.

Análogamente, el conjunto de las sucesiones de escalares $(a_i)_{i \geq 0}$ posee la misma estructura que los escalares si se utiliza como producto a la convolución :

$$((a_i) \otimes (b_j))_k = \bigoplus_{i+j=k} a_i \otimes b_j .$$

EJEMPLO 2.3. 1. Producto matricial en max-plus

$$\begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & e \\ 3 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} .$$

2. Producto de polinomios formales en max-plus

$$(e \oplus 2x \oplus 3x^2) (5x \oplus 7x^3) = 5x \oplus 7x^2 \oplus 8x^3 \oplus 9x^4 \oplus 10x^5 .$$

3. Notaciones en max-plus :

$$3^{\otimes 2} = 3 \otimes 3 = 3 + 3 = 6 ,$$

$$3/4 = 3 - 4 = -1 ,$$

$$\sqrt{1} = \frac{1}{2} ,$$

$$3^{\frac{1}{5}} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} .$$

4. Algunas fórmulas en max-plus :

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n, \quad \min(a, b) = \frac{a \otimes b}{a \oplus b} .$$

3. ECUACIONES LINEALES

En esta sección estudiaremos la ecuación afín general en una incógnita en \mathbb{R}_{\max} . También presentaremos resultados sobre el problema de punto fijo $x = Ax \oplus b$ y del problema de autovalor $Ax = \lambda x$ en el caso en que la matriz A sea irreducible.

3.1. FUNCIÓN AFÍN Y ECUACIÓN AFÍN

La ecuación afín general en una incógnita en \mathbb{R}_{\max} está dada por :

$$ax \oplus b = \tilde{a}x \oplus \tilde{b} \quad (3.1)$$

cuya solución está dada por el siguiente teorema.

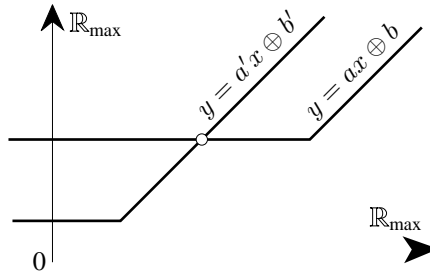


FIGURA 1. Una ecuación afín.

TEOREMA 3.1. *La solución de la ecuación (3.1) se obtiene de la siguiente manera :*

1. si

$$\left((\tilde{a} < a) \text{ y } (b < \tilde{b}) \right) \text{ ó } \left((a < \tilde{a}) \text{ y } (\tilde{b} < b) \right) \quad (3.2)$$

la solución es única y está dada por : $\frac{b \oplus \tilde{b}}{a \oplus \tilde{a}}$;

2. si $a \neq \tilde{a}$, $b \neq \tilde{b}$ y si (3.2) no se verifica, no hay soluciones en \mathbb{R}_{\max} ;

3. si $a = \tilde{a}$ y $b \neq \tilde{b}$, la solución no es única y todas las soluciones están dadas por $x \geq \frac{b \oplus \tilde{b}}{a}$;

4. si $a \neq \tilde{a}$ y $b = \tilde{b}$, la solución no es única y todas las soluciones están dadas por $x \leq \frac{b}{a \oplus \tilde{a}}$;

5. si $a = \tilde{a}$ y $b = \tilde{b}$, todo $x \in \mathbb{R}$ es solución.

En la práctica, es mejor simplificar la ecuación (3.1) antes de resolverla. Por ejemplo si $\tilde{a} < a$ y $b < \tilde{b}$, entonces $ax \oplus b = \tilde{a}x \oplus \tilde{b} \Leftrightarrow ax = \tilde{b}$. La tabla 1 presenta las diferentes ecuaciones simplificadas que pueden obtenerse de esta manera, llamadas formas canónicas de la ecuación afín.

3.2. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

La ecuación general afín en $(\mathbb{R}_{\max})^n$ es :

$$Ax \oplus b = \tilde{A}x \oplus \tilde{b},$$

Ecuacion	Solucion
$ax = b$	$x = b/a$
$ax \oplus b = \varepsilon$	no existe
$ax \oplus b = ax$	$x \geq b/a$
$ax \oplus b = b$	$x \leq b/a$
$ax \oplus b = ax \oplus b$	\mathbb{R}_{\max}

TABLA 1. Las canónicas ecuaciones afines.

la cual puede llevarse a su forma canónica de la misma manera que en el caso de una sola incógnita.

EJEMPLO 3.2. Consideremos el sistema :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e \\ 3 \end{bmatrix},$$

el cual puede simplificarse de la siguiente manera (forma canónica) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En el próximo teorema trataremos el caso particular $x = Ax \oplus b$ (punto fijo).

Notamos con $\mathcal{G}(A)$ el grafo de precedencia asociado a la matriz cuadrada A , que se obtiene asociando a cada columna de la matriz un nodo y a cada coeficiente A_{ij} distinto de ε un arco de j a i con peso A_{ij} .

TEOREMA 3.3. Si existen únicamente circuitos de peso no positivo en $\mathcal{G}(A)$, entonces existe una solución de $x = Ax \oplus b$ la cual está dada por $x = A^*b$ donde

$$A^* \triangleq \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

Además si todos los circuitos tienen peso negativo esta solución es única.

DEMOSTRACIÓN. Si A^* existe, entonces A^*b es solución pues

$$A(A^*b) \oplus b = (e \oplus AA^*)b = A^*b.$$

EXISTENCIA DE A^* . El significado de $(A^*)_{ij}$ puede pensarse como el máximo peso entre todos los caminos de cualquier longitud que van del nodo j al nodo i . Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para la existencia de $(A^*)_{ij}$ es que ninguna componente fuertemente conexa de $\mathcal{G}(A)$ posea un circuito con peso positivo. En caso contrario, existiría un camino de j a i con peso arbitrariamente grande para todos los nodos j e i pertenecientes a la componente fuertemente conexa que contiene este circuito de peso positivo.

UNICIDAD. Supongamos que x sea una solución de $x = Ax \oplus b$. Entonces x verifica :

$$x = b \oplus Ab \oplus A^2x = b \oplus Ab \oplus \dots \oplus A^{k-1}b \oplus A^kx. \quad (3.3)$$

y entonces $x \geq A^k b$. Además, si todos los circuitos del grafo $\mathcal{G}(A)$ tienen peso negativo, entonces $A^k \rightarrow \varepsilon$ cuando $k \rightarrow \infty$ pues las entradas de A^k son los pesos de caminos de longitud k los cuales necesariamente atraviesan circuitos de $\mathcal{G}(A)$ un número de veces que tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ , y estos circuitos tienen

peso negativo. Por lo tanto, utilizando esta propiedad y la ecuación (3.3) para k suficientemente grande obtenemos que $x = A^*b$ y

$$A^k < e \oplus A \cdots A^{n-1}, \quad \forall k \geq n \Rightarrow A^* = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

□

El siguiente teorema muestra la existencia de una noción max-plus análoga del valor propio λ y vector propio x soluciones de la ecuación :

$$A \otimes x = \lambda \otimes x.$$

TEOREMA 3.4. *Si A es irreducible ($\mathcal{G}(A)$ es fuertemente conexo), existe un único autovalor (pero posiblemente varios autovectores). Este autovalor es igual al máximo ciclo medio de $\mathcal{G}(A)$, es decir :*

$$\lambda = \max_{\zeta} \frac{|\zeta|_w}{|\zeta|_l},$$

donde ζ varía sobre el conjunto de circuitos de $\mathcal{G}(A)$.

DEMOSTRACIÓN.

EXISTENCIA DE x Y λ . Consideremos la matriz $B = A/\lambda$. Entonces el peso máximo de los circuitos de $\mathcal{G}(B)$ es e . Por lo tanto B^* y $B^+ = BB^*$ existen. La matriz B^+ tiene algunas columnas con la entrada de la diagonal igual a e . Para probar esto, tomemos un vértice k de un circuito ζ tal que $\zeta \in \arg \max_{\zeta} |\zeta|_w / |\zeta|_l$. Entonces el peso máximo de los caminos desde k a k es e . Por lo tanto tenemos que $e = B_{kk}^+$. Representemos con $B_{\cdot k}$ a la k -ésima columna de B . Entonces, como en general $B^+ = BB^*$ y $B^* = e \oplus B^+$, para dicho k obtenemos :

$$B_{\cdot k}^+ = B_{\cdot k}^* \Rightarrow BB_{\cdot k}^* = B_{\cdot k}^+ = B_{\cdot k}^* \Rightarrow AB_{\cdot k}^* = \lambda B_{\cdot k}^*.$$

Por lo tanto $x = B_{\cdot k}^+ = B_{\cdot k}^*$ es un autovector de A correspondiente al autovalor λ .

INTERPRETACIÓN DE UN AUTOVALOR λ . Sea λ un autovalor de A y sea x el autovector correspondiente. Entonces existe una componente no nula x_{i_1} de x . Como tenemos que $(Ax)_{i_1} = \lambda x_{i_1}$, existe otro índice i_2 tal que $A_{i_1 i_2} x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$ y entonces $x_{i_2} \neq \varepsilon$ y $A_{i_1 i_2} \neq \varepsilon$. Podemos repetir este argumento y obtener una sucesión $\{i_j\}$ tal que : $A_{i_{j-1} i_j} x_{i_j} = \lambda x_{i_{j-1}}$, $x_{i_j} \neq \varepsilon$ y $A_{i_{j-1} i_j} \neq \varepsilon$. En algún momento debemos encontrar un índice i_l que ya figuraba en dicha sucesión pues el número de vértices es finito. Por lo tanto obtenemos un circuito $\beta = (i_l, i_m, \dots, i_{l+1}, i_l)$. Multiplicando a lo largo del circuito resulta :

$$A_{i_l i_{l+1}} A_{i_{l+1} i_{l+2}} \cdots A_{i_m i_l} x_{i_{l+1}} x_{i_{l+2}} \cdots x_{i_m} x_{i_l} = \lambda^{m-l+1} x_{i_l} x_{i_{l+1}} \cdots x_{i_m}.$$

Como $x_{i_j} \neq \varepsilon$ para todo i_j , podemos simplificar en la ecuación anterior lo cual demuestra que λ^{m-l+1} es el peso de un circuito de longitud $m - l + 1$, o dicho de otra forma, λ es el peso medio del circuito β .

SI A ES IRREDUCIBLE, TODAS LAS COMPONENTES DE UN AUTOVECTOR x SON DIFERENTES DE ε . Supongamos que el soporte de x (vértices correspondientes a componentes no nulas) no es todo el grafo. Entonces existen arcos que van de vértices del soporte hacia otros vértices que no están en el soporte pues $\mathcal{G}(A)$ es fuertemente conexo. Por lo tanto, el soporte de Ax es más grande que el soporte de x lo cual contradice a la ecuación $Ax = \lambda x$.

UNICIDAD EN EL CASO IRREDUCIBLE. Consideremos cualquier circuito

$$\gamma = (i_1, \dots, i_p, i_1) .$$

Entonces tenemos que

$$A_{i_2 i_1} x_{i_1} \leq \lambda x_{i_2}, \dots, A_{i_p i_{p-1}} x_{i_{p-1}} \leq \lambda x_{i_p}, A_{i_1 i_p} x_{i_p} \leq \lambda x_{i_1} .$$

Por lo tanto, utilizando el mismo argumento que en el párrafo de la interpretación de un autovalor λ , vemos que dicho λ es mayor o igual que el peso medio de γ . Entonces λ es el máximo ciclo medio y por lo tanto es único. \square

4. SIMETRIZACIÓN DEL ÁLGEBRA MAX-PLUS .

En esta sección extenderemos el conjunto \mathbb{R}_{\max} a un conjunto más grande \mathbb{S} (del cual \mathbb{R}_{\max} puede verse como la parte positiva) mediante la simetrización de la operación de máximo con el objetivo de obtener una clase más grande de ecuaciones lineales. Pero, como veremos en el próximo teorema, si la extensión de \oplus al nuevo conjunto \mathbb{S} es idempotente no es posible que la ecuación $a \oplus x = \varepsilon$ tenga solución.

TEOREMA 4.1. *Todo grupo idempotente se reduce al elemento nulo ε .*

DEMOSTRACIÓN. Sea a un elemento arbitrario de un grupo idempotente (G, \oplus) con elemento nulo ε . Sea b el elemento simétrico de a . Entonces

$$a = a \oplus \varepsilon = a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b = \varepsilon .$$

Por lo tanto $G = \{\varepsilon\}$. \square

Consideremos el conjunto \mathbb{R}_{\max}^2 que junto con las operaciones :

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) , \\ (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1 \oplus x_2 y_2, x_1 y_2 \oplus x_2 y_1) , \end{cases}$$

es un dioide (semi-anillo idempotente) con elemento nulo $(\varepsilon, \varepsilon)$ y elemento unidad (e, ε) . Si $x = (x_1, x_2)$ se define $\ominus x = (x_2, x_1)$, $|x| = x_1 \oplus x_2$ y $\overset{\bullet}{x} = x \ominus x = x \oplus (\ominus x) = (|x|, |x|)$. En \mathbb{R}_{\max}^2 se define la siguiente relación de equivalencia :

$$(x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \oplus y_2 = x_2 \oplus y_1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ y } y_1 \neq y_2 , \\ (x_1, x_2) = (y_1, y_2) & \text{si } x_1 = x_2 \text{ ó } y_1 = y_2 . \end{cases}$$

Esta relación define tres tipos de clases de equivalencia

$$\begin{cases} \overline{(t, -\infty)} = \{(t, x) \mid x < t\} , & \text{elementos positivos que forman el conjunto } \mathbb{S}^{\oplus} , \\ \overline{(-\infty, t)} = \{(x, t) \mid x < t\} , & \text{elementos negativos que forman el conjunto } \mathbb{S}^{\ominus} , \\ \overline{(t, t)} = \{(t, t)\} , & \text{elementos balanceados que forman el conjunto } \mathbb{S}^{\bullet} . \end{cases}$$

La relación de balance o equilibrio definida por :

$$(x_1, x_2) \nabla (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \oplus y_2 = x_2 \oplus y_1 ,$$

no es una relación de equivalencia pues no es transitiva como lo demuestra el siguiente ejemplo $(\varepsilon, 1) \nabla (1, 1) \nabla (1, \varepsilon)$ pero $(\varepsilon, 1)$ no está balanceado con $(1, \varepsilon)$.

La relación de equivalencia \mathcal{R} es compatible con la suma y la multiplicación de \mathbb{R}_{\max}^2 , con la relación de balance ∇ y con los operadores \ominus , $|\cdot|$ y $\overset{\bullet}{\cdot}$. Se llama entonces con $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$ al álgebra simetrizada $\mathbb{R}_{\max}^2 / \mathcal{R}$ de \mathbb{R}_{\max} . Este conjunto \mathbb{S} es un dioide con la suma y la multiplicación heredadas de las operaciones

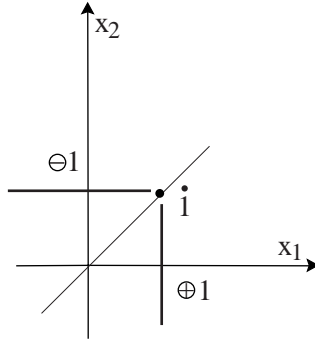


FIGURA 2. Los tres tipos de clases de equivalencia.

de \mathbb{R}_{\max}^2 . El conjunto de los elementos con signo se define como $\mathbb{S}^\vee = \mathbb{S}^\oplus \cup \mathbb{S}^\ominus$. Para la manipulación de ecuaciones la relación \mathcal{R} es menos práctica que ∇ pues :

$$a = b \Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon \quad \forall a, b \in \mathbb{S}^\vee,$$

en cambio

$$a \ominus b \mathcal{R} \varepsilon \Leftrightarrow a = b = \varepsilon.$$

Los siguientes resultados pueden demostrarse.

PROPOSICIÓN 4.2. *La relación ∇ verifica las siguientes propiedades :*

1. $a \nabla a$.
2. $a \nabla b \Leftrightarrow b \nabla a$.
3. $a \nabla x, x \nabla b$ y $x \in \mathbb{S}^\vee \Rightarrow a \nabla b$.
4. $a \nabla b$ y $a, b \in \mathbb{S}^\vee \Rightarrow a = b$.

TEOREMA 4.3. *Sea $a \in \mathbb{S}_*^\vee = \mathbb{S}^\vee - \{\varepsilon\}$ y $b \in \mathbb{S}^\vee$, entonces $x = \ominus b/a$ es la única solución del balance*

$$ax \oplus b \nabla \varepsilon$$

que pertenece a \mathbb{S}^\vee .

Se puede extender de manera directa los balances al caso vectorial. Las propiedades anteriores son también válidas cuando x, b y a son matrices de dimensiones apropiadas. Consideremos ahora una solución $x \in (\mathbb{R}_{\max})^n$ de la ecuación

$$Ax \oplus b = Cx \oplus d. \quad (4.1)$$

Entonces por la definición de balance se verifica que :

$$(A \ominus C)x \oplus (b \ominus d) \nabla \varepsilon. \quad (4.2)$$

Supongamos ahora que x es una solución positiva del balance (4.2), entonces

$$Ax \oplus b \nabla Cx \oplus d.$$

con $Ax \oplus b \in (\mathbb{S}^\oplus)^n$, $Cx \oplus d \in (\mathbb{S}^\oplus)^n$. Utilizando la proposición anterior obtenemos :

$$Ax \oplus b = Cx \oplus d.$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema (4.1) en $(\mathbb{R}_{\max})^n$ es igual al conjunto de soluciones positivas del balance 4.2 en \mathbb{S}^n , es decir que estudiar el sistema de ecuaciones (4.1) se reduce a resolver los balances lineales (4.2), para los cuales tenemos el siguiente teorema.

DEFINICIÓN 4.4. Si $A \in \mathbb{S}^{n \times n}$ entonces se define :

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \bigotimes_{i=1}^n A_{i\sigma(i)},$$

$$A_{ij}^{\#} = \operatorname{cofactor}_{ji}(A),$$

donde el signo de la permutación σ se define como :

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} e & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ \ominus e & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

TEOREMA 4.5. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{S} , entonces

1. $AA^{\#} \nabla \det(A) e$.
2. Si $p(\lambda) \triangleq \det(A \ominus \lambda e)$, entonces $p(A) \nabla e$ (versión max-plus del teorema de Cayley-Hamilton).
3. Si $\det(A) \in \mathbb{S}_*^{\vee}$ y $A^{\#}b \in (\mathbb{S}^{\vee})^n$, entonces existe una única solución de $Ax \nabla b$ en $(\mathbb{S}^{\vee})^n$ la cual está dada por : $x = A^{\#}b / \det(A)$.

EJEMPLO 4.6. 1. $3 \ominus 2 = 3$; $\ominus 3 \oplus 2 = \ominus 3$; $\overset{\bullet}{2} \oplus 3 = 3$; $\overset{\bullet}{2} \ominus 3 = \ominus 3$; $\overset{\bullet}{2} \oplus 1 = \overset{\bullet}{2}$; $\overset{\bullet}{2} \ominus 1 = \overset{\bullet}{2}$.

2. Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det(A) = 3 \ominus 7 = \ominus 7,$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = 7 \ominus 9 = \ominus 9 \Rightarrow x_1 = \ominus 9 / \ominus 7 = 2,$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 7 \ominus 9 = \ominus 9 \Rightarrow x_2 = \ominus 9 / \ominus 7 = 2.$$

Verificación :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3.

$$\det \begin{bmatrix} 1 \ominus \lambda & 3 \\ 4 & 2 \ominus \lambda \end{bmatrix} = (1 \ominus \lambda)(2 \ominus \lambda) \ominus 7 = \lambda^2 \ominus 2\lambda \ominus 7.$$

$$A^2 \ominus 2A \ominus 7e = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\bullet}{7} & \overset{\bullet}{5} \\ \overset{\bullet}{6} & \overset{\bullet}{7} \end{bmatrix}.$$

5. POLINOMIOS, FUNCIONES RACIONALES Y ECUACIONES POLINOMIALES.

En esta sección estudiaremos a las funciones polinomiales, racionales y a las ecuaciones algebraicas en \mathbb{R}_{\max} . Mostraremos también que ciertas ecuaciones de grado n tienen n soluciones.

DEFINICIÓN 5.1. Consideremos el conjunto de secuencias finitas de elementos de \mathbb{R}_{\max} de cualquier longitud :

$$p = (p_i)_{k \leq i \leq n}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad p_i \in \mathbb{R}_{\max},$$

junto con las siguientes operaciones :

1. la suma componente a componente \oplus .
2. la sup-convolución \otimes de secuencias, es decir :

$$(p \otimes q)_i = \bigoplus_{k+l=i} p_k \otimes q_l.$$

Entonces este conjunto es representado con el símbolo $\mathbb{R}_{\max}[\gamma]$ y sus elementos reciben el nombre de *polinomios formales*.

Este conjunto con las operaciones anteriores es un dioide.

Notemos que si definimos el polinomio formal γ por :

$$\gamma_k = \begin{cases} e & \text{si } k = 1, \\ \varepsilon & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

entonces cualquier polinomio formal p puede escribirse como $p = \bigoplus_{l=k}^n p_l \gamma^l$.

DEFINICIÓN 5.2. Asociada a cada polinomio formal p podemos definir una *función polinomial* por :

$$\hat{p} : x \in \mathbb{R}_{\max} \mapsto \hat{p}(x) \triangleq p_k x^k \oplus \dots \oplus p_n x^n \in \mathbb{R}_{\max}.$$

El conjunto de las funciones polinomiales se representa por $\mathcal{P}(\mathbb{R}_{\max})$.

A cada polinomio formal le corresponde una única función polinomial, pero el recíproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo :

$$x^2 \oplus 2 = (x \oplus 1)^2 = x^2 \oplus 1x \oplus 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\max},$$

es decir que los polinomios formales $(2, \varepsilon, e)$ y $(2, 1, e)$ tienen asociada la misma función polinomial.

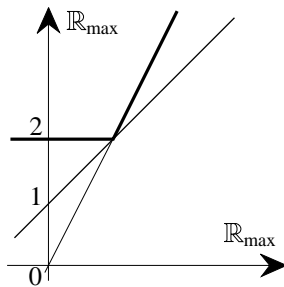


FIGURA 3. El gráfico $(x \oplus 1)^2$.

La función

$$\mathcal{E}_v : p \in \mathbb{R}_{\max}[\gamma] \mapsto \hat{p} \in \mathcal{P},$$

recibe el nombre de *homomorfismo de evaluación* y está relacionada con la transformada de Fenchel por la siguiente fórmula

$$[\mathcal{E}_v(p)](x) = \hat{p}(x) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} p_i \otimes x^i = \sup_{i \in \mathbb{N}} (ix + p_i) = [\mathcal{F}_e(-p)](x),$$

cuando se piensa a p como una función de i que va de \mathbb{N} en \mathbb{R}_{\max} . Utilizando a la función \mathcal{E}_v se define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}_{\max}[\gamma]$ dada por : $p\mathcal{E}_v q \Leftrightarrow \hat{p} = \hat{q}$. Entonces cada clase de equivalencia de $\mathbb{R}_{\max}[\gamma]/\mathcal{E}_v$ posee un representante maximal p^\sharp y se puede probar que p^\sharp es la envolvente cóncava de p . Como p^\sharp es una función cóncava verifica :

$$\frac{p_{k+1}^\sharp}{p_k^\sharp} \geq \frac{p_{k+2}^\sharp}{p_{k+1}^\sharp} \geq \dots \geq \frac{p_n^\sharp}{p_{n-1}^\sharp} . \tag{5.1}$$

TEOREMA 5.3. Si un polinomio formal $p = p_k x^k \oplus \dots \oplus p_n x^n$ verifica que $p = p^\sharp$ entonces p puede factorizarse como :

$$p = p_n \bigotimes_{i=1}^n (x \oplus x_i) ,$$

donde

$$x_i = \frac{p_{n-i}}{p_{n-i+1}} .$$

DEMOSTRACIÓN. Como $p = p^\sharp$ tenemos que por (5.1) los x_i verifican :

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n .$$

Si $q = p_n \bigotimes_{i=1}^n (x \oplus x_i)$ entonces a través de un cálculo directo resulta que $q_{n-k} = p_n \sigma_k$ donde σ_k es el k -ésimo producto simétrico de los x_i , es decir :

$$\sigma_1 = \bigoplus_{i=1}^n x_i , \quad \sigma_2 = \bigoplus_{i \neq j=1}^n x_i x_j , \dots$$

Debido al ordenamiento de los x_i resulta entonces que $\sigma_k = \bigotimes_{j=1}^k x_j$ y por lo tanto

$$q_{n-k} = p_n \sigma_k = p_n \bigotimes_{j=1}^k x_j = p_n \frac{p_{n-1}}{p_n} \dots \frac{p_{n-k}}{p_{n-k+1}} = p_{n-k} ,$$

es decir

$$p = q = p_n \bigotimes_{i=1}^n (x \oplus x_i) .$$

□

DEFINICIÓN 5.4. Dadas dos funciones polinomiales \hat{p} y \hat{q} de grado n y m respectivamente, la igualdad $\hat{p}(x) = \hat{q}(x)$ se llama *ecuación polinomial*. Las soluciones de esta ecuación se llaman *raíces*. El *grado* de la ecuación es el entero $\max(n, m)$.

Algunas ecuaciones polinomiales tienen raíces y otras no. Por ejemplo, $x^n = a$ tiene como raíz a $x = \sqrt[n]{a}$, es decir, $x = a/n$ en el álgebra convencional. Por otro lado, la ecuación $a \oplus x = \varepsilon$ no tiene raíces. El siguiente teorema caracteriza una situación en la que una ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n raíces.

TEOREMA 5.5. Sea

$$\begin{aligned} \hat{p}(x) &= p_0 \oplus p_2 x^2 \oplus \dots \oplus p_{2k} x^{2k} , \\ \hat{q}(x) &= p_1 x \oplus p_3 x^3 \oplus \dots \oplus p_{2k-1} x^{2k-1} , \end{aligned}$$

donde

$$\frac{p_{2k-1}}{p_{2k}} \geq \frac{p_{2k-2}}{p_{2k-1}} \geq \dots \geq \frac{p_0}{p_1},$$

o equivalentemente $p \oplus q = (p \oplus q)^\sharp$. Entonces la ecuación polinomial $\hat{p}(x) = \hat{q}(x)$ tiene $2k$ raíces dadas por :

$$x_i = \frac{p_{2i-1}}{p_{2i}}, \quad i = 1, \dots, 2k.$$

DEFINICIÓN 5.6. Dados $p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_m \in \mathbb{R}_{\max}$, p_n y $q_m \neq \varepsilon$, la función racional \hat{r} asociada con estos coeficientes está dada por :

$$\hat{r} : x \in \mathbb{R}_{\max} \mapsto \hat{r}(x) = \frac{p_0 \oplus \dots \oplus p_n x^n}{q_0 \oplus \dots \oplus q_m x^m} \in \mathbb{R}_{\max}.$$

Una función racional es igual al cociente (resta habitual) de dos funciones polinomiales y por lo tanto es continua, seccionalmente lineal, con pendientes enteras, pero ya no es necesariamente convexa ni creciente. Utilizando el teorema de factorización de polinomios se puede escribir a toda función racional de la siguiente manera :

$$\hat{r}(x) = a \frac{\bigotimes_{i=1}^n (x \oplus c_i)}{\bigotimes_{j=1}^m (x \oplus d_j)},$$

lo que indica que una función racional tiene una pendiente que aumenta en uno en cada raíz simple y descende en uno en cada polo simple.

6. NÚCLEO, IMAGEN Y PROYECCIÓN DE MAIRESSE.

El objetivo de esta sección es familiarizarse con las imágenes y los “núcleos” de aplicaciones max-plus lineales. Nosotros las representamos en el caso de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 utilizando la proyección de Mairesse.

DEFINICIÓN 6.1. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función lineal desde el semi-módulo X en el semi-módulo Y . Entonces la imagen de F ($\text{Im}F$) y el núcleo de F ($\ker F$) se definen como :

$$\begin{aligned} \text{Im}F &= \{F(x) \mid x \in X\}, \\ \ker F &= \{(x^1, x^2) \in X^2 \mid F(x^1) = F(x^2)\}. \end{aligned}$$

Una congruencia sobre un semi-módulo X es una relación de equivalencia $\mathcal{R} \subset X \times X$ que verifica :

1. $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (x \oplus z, y \oplus z) \in \mathcal{R}$,
2. $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (\alpha x, \alpha y) \in \mathcal{R}$.

Entonces al conjunto de las clases de equivalencias por una congruencia se las puede dotar de las operaciones “inducidas” por las operaciones de X con las cuales resulta un semi-módulo que se representa con X/\mathcal{R} . Claramente $\ker F$ define una congruencia.

TEOREMA 6.2. Si F es una función lineal desde el semi-módulo X en el semi-módulo Y , entonces existe un único isomorfismo $\tilde{F} : X/\ker F \rightarrow \text{Im}F$, tal que $\tilde{F}(\bar{y}) = F(x)$ si $x \in \bar{y}$ donde las \bar{y} son las clases de equivalencias de $X/\ker F$ definidas por $\bar{y} = \{x \mid F(x) = y\}$, $\forall y \in \text{Im}F$.

Nosotros tenemos evidentemente la partición $X = \bigcup_y \bar{y}$.

EJEMPLO 6.3. Consideremos $X = Y = \mathbb{R}_{\max}^2$ y $F(x) = Ax$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces la imagen de F está representada en la figura 4.

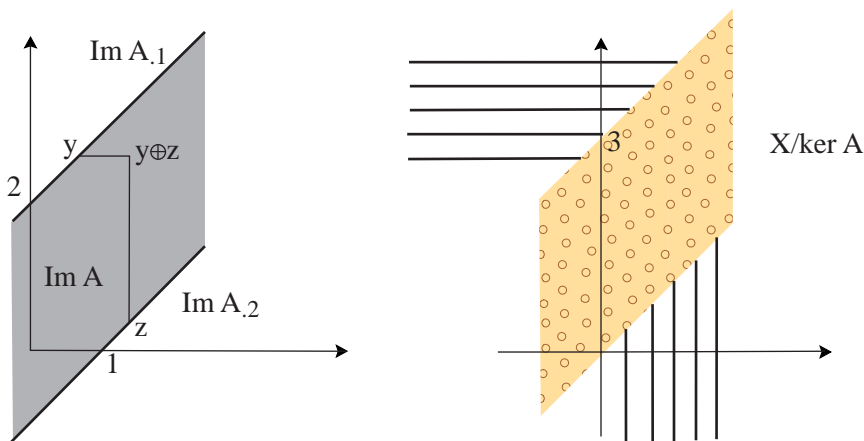


FIGURA 4. Imagen y núcleo de una función lineal.

Calculemos el núcleo de F (en realidad las clases de equivalencias de $X / \ker F$).

1. Si u pertenece al interior de $\text{Im} F$ entonces u se descompone de manera única de la siguiente forma $u = y \oplus z$ con

$$y \in \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z \in \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y entonces existe un único x tal que $u = Ax$.

2. Si $u \in \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix}$ y entonces la pre-imagen de u no es única ya que $x_1 = \lambda$ y $x_2 \leq x_1$ y $(-1)x_2 \leq 2x_1 \Rightarrow x_2 \leq x_1$.
3. Si $u \in \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} \lambda \\ (-1)\lambda \end{bmatrix}$ con lo cual la pre-imagen de u no es única pues $x_2 = \lambda$ y además $x_1 \leq x_2$ y $2x_1 \leq (-1)x_2 \Rightarrow x_1 \leq (-3)x_2$.

En figura 4 se pueden observar las clases de equivalencias de $X / \ker F$.

EJEMPLO 6.4. Proyección de Mairesse.

En el caso de $X = (\mathbb{R}_{\max})^3$ se pueden representar los subsemi-módulos de $(\mathbb{R}_{\max})^3$ utilizando la proyección de Mairesse. Nosotros representamos el conjunto de puntos de un semi-módulo $K \subset (\mathbb{R}_{\max})^3$ por un subconjunto de \mathbb{R}^2 obtenido al proyectar K ortogonalmente sobre cualquier plano ortogonal a $(1, 1, 1)$. Como K es cerrado con respecto a la multiplicación por cualquier escalar λ , es decir a la suma habitual del vector $(\lambda, \lambda, \lambda)$, el semi-módulo K está bien determinado por su proyección. En el gráfico 5 se representan (proyec. de Mairesse) semi-módulos generados por dos generadores (es decir $K = \text{Im}(F)$ donde $F(x) = Ax$ y A es de dimensión 3×2) o tres generadores.

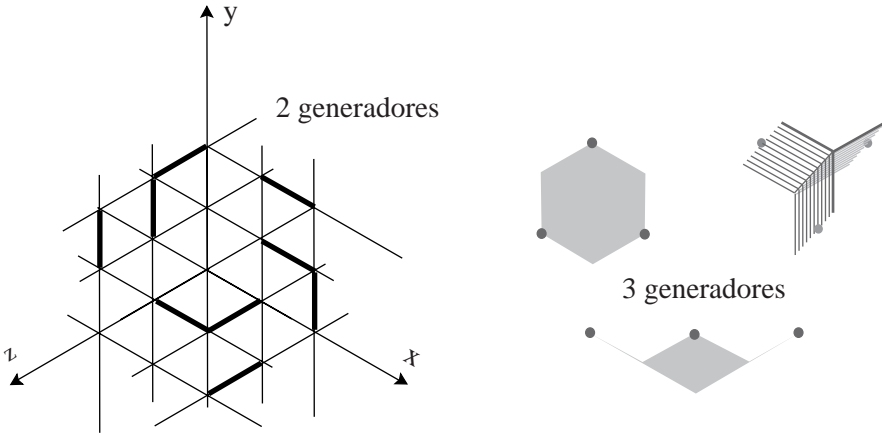


FIGURA 5. Semi-módulos de $(\mathbb{R}_{\max})^3$ generados por dos y tres generadores.

6.1. INDEPENDENCIA DE UNA FAMILIA DE VECTORES.

- DEFINICIÓN 6.5. 1. Una familia generadora de un semi-módulo X es una familia $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de X tal que para todo $x \in X$ existe una familia $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ de escalares, siendo sólo un número finito de ellos no nulo, tal que $x = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i x_i$.
2. Un semi-módulo se dice *finitamente generado* si tiene una familia generadora finita.
3. La familia generadora $\{x_i\}_{i \in I}$ es *independiente*¹ si

$$\bigoplus_{i \in I} \alpha_i x_i = \bigoplus_{i \in I} \beta_i x_i \implies \alpha_i = \beta_i, \quad \forall i \in I.$$

EJEMPLO 6.6. Los vectores :

$$p_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ e \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} e \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

no son independientes pues $p_1 \oplus p_2 = p_2 \oplus p_3$.

7. NOTAS

Este capítulo está basado en una parte del capítulo 3 de [7]. La idea de estudiar las estructuras algebraicas idempotentes se remonta a [31]. El primer libro sistemático sobre el álgebra max-plus es [24]. Otras buenas referencias son [41] (capítulo dedicado al álgebra de caminos) y [56].

¹Existen muchas definiciones de la noción de independencia. La definición que utilizamos aquí permite asegurar la existencia y la unicidad de coordenadas ya que se dispone de una base (familia generadora independiente) de un semi-módulo. Cabe remarcar que un semi-módulo no admite siempre una base. Los semi-módulos que admiten base se dicen *libres*. El semi-módulo $(\mathbb{R}_{\max})^n$ es libre teniendo como base el conjunto de generadores de la forma $(\varepsilon, \dots, e, \dots, \varepsilon)$. Es el único tipo de semi-módulo libre.

Desarrollos importantes sobre simetrización pueden encontrarse en [37]. El trabajo original sobre esta simetrización es [57]. Esta simetrización tiene raíz en [45].

En [24, 58, 37, 42, 16, 56, 71, 72, 15, 18, 19] pueden encontrarse discusiones más o menos completas sobre semi-módulos.

Los polinomios max-plus son estudiados de manera sistemática por primera vez en [25].

Dualidad entre probabilidad y optimización.

Presentaremos a continuación un “cálculo de probabilidades idempotentes” en el cual a cada evento está asociado un costo en lugar de una probabilidad. La teoría se desarrolla de manera paralela al cálculo de probabilidades mediante la sustitución del semi-anillo habitual $(\mathbb{R}, +, \times)$ por el semi-anillo idempotente $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.

1. MEDIDA DE COSTO

Representemos con \mathbb{R}_{\min} al semi-anillo idempotente $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ con la métrica definida por la distancia exponencial $d(x, y) = |\exp(-x) - \exp(-y)|$.

Llamaremos *espacio de decisión* a $(U, \mathcal{U}, \mathbb{K})$ donde U es un espacio topológico, \mathcal{U} es el conjunto de los conjuntos abiertos de U y \mathbb{K} es una función de \mathcal{U} en \mathbb{R}_{\min} tal que :

1. $\mathbb{K}(U) = 0$,
2. $\mathbb{K}(\emptyset) = +\infty$,
3. $\mathbb{K}(\bigcup_n A_n) = \bigoplus_n (\mathbb{K}(A_n)) = \inf_n (\mathbb{K}(A_n))$, $\forall A_n \in \mathcal{U}$.

U es el conjunto de decisiones posibles y \mathcal{U} es el conjunto de dominios admisibles. La función \mathbb{K} se llama medida de costo. Un conjunto de medidas de costo K se dice *apretado* si

$$\sup_{C \text{ compacto } \subset U} \inf_{\mathbb{K} \in K} \mathbb{K}(C^c) = +\infty ,$$

donde C^c designa al complementario de C . Una función $c : U \rightarrow \mathbb{R}_{\min}$ tal que $\mathbb{K}(A) = \bigoplus_{u \in A} c(u) = \inf_{u \in A} c(u)$, $\forall A \subset U$ se llama *densidad de costo* de la medida de costo \mathbb{K} .

TEOREMA 1.1. *Dada una función c semicontinua inferiormente (s.c.i.) con valores en \mathbb{R}_{\min} tal que $\inf_u c(u) = 0$, la función $A \in \mathcal{U} \mapsto \mathbb{K}(A) = \inf_{u \in A} c(u)$ define una medida de costo en (U, \mathcal{U}) . Recíprocamente, cualquier medida de costo definida sobre los conjuntos abiertos de un espacio topológico con una base numerable admite una única extensión minimal \mathbb{K}_* a $\mathcal{P}(U)$ con una densidad de costo c que es una función s.c.i. en U la cual verifica que $\inf_u c(u) = 0$.*

EJEMPLO 1.2. Utilizaremos las siguientes densidades de costo definidas en \mathbb{R} .

1. $\chi_m(x) \triangleq \begin{cases} +\infty & \text{si } x \neq m , \\ 0 & \text{si } x = m . \end{cases}$
2. $\mathcal{M}_{m,\sigma}^p(x) \triangleq \frac{1}{p} |\sigma^{-1}(x - m)|^p$, para $1 \leq p$.
3. $\mathcal{Q}_{m,\sigma} \triangleq \mathcal{M}_{m,\sigma}^2$.

DEFINICIÓN 1.3. Tomemos $U = \mathbb{R}^2$ y sea $c(x_1, x_2)$ una densidad de costo sobre U . Entonces se define la *densidad marginal* como :

$$c_{X_1}(x_1) = \bigoplus_{x_2} c(x_1, x_2).$$

La densidad condicional se define por :

$$c_{X_1|X_2}(x_1, x_2) = \frac{c(x_1, x_2)}{\bigoplus_{x_1} c(x_1, x_2)}.$$

La *inf-convolución* de densidades está dada por :

$$(c_{X_1} \boxtimes c_{X_2})(x) \triangleq \inf_{x_1+x_2=x} [c_{X_1}(x_1) + c_{X_2}(x_2)].$$

EJEMPLO 1.4. $Q_{m_1, \sigma_1} \boxtimes Q_{m_2, \sigma_2} = Q_{m, \sigma}$, donde $m = m_1 + m_2$ y $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
Sea

$$\phi(x) = \inf_{x_1+x_2=x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right).$$

Consideremos el Lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 + \lambda (x - x_1 - x_2).$$

Entonces

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1^2} - \lambda \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2^2} - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{x_1 + x_2 - m_1 - m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{x - m}{\sigma^2}.$$

Por lo tanto

$$\phi(x) = \frac{\sigma_1^2 \lambda^2}{2} + \frac{\sigma_2^2 \lambda^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{\sigma} \right)^2 = Q_{m, \sigma}(x).$$

1.1. REPASO SOBRE LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES.

DEFINICIÓN 1.5. X es una *distribución estable* si :

$$\forall A, B, \exists C, D : AX_1 + BX_2 \simeq CX + D, \quad X_1, X_2 \text{ i.i.d. y } X \text{ i.d.}$$

donde \simeq significa idénticamente distribuido y i.i.d. independiente e idénticamente distribuido.

TEOREMA 1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

1. $X_1 + X_2 + \dots + X_n \simeq d_n X + a_n$, X_1, \dots, X_n están i.i.d. y X i.d.
2. $\exists (Y_n), (d_n), (a_n) : \frac{1}{d_n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) + a_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
3. X es estable.

OBSERVACIÓN 1.7. Las variables aleatorias estables simétricas $(S_{m, \sigma}^p)$ verifican :

$$\mathbb{E} \exp(i\theta X) = e^{-\sigma^p |\theta|^{p'} + im\theta},$$

donde $1/p + 1/p' = 1$, $1 \leq p$.

Se tiene entonces el siguiente resultado :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim S_{m_1, \sigma_1}^p \\ X_2 \sim S_{m_2, \sigma_2}^p \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim S_{m_1+m_2, (\sigma_1^{p'} + \sigma_2^{p'})^{1/p'}}^p ,$$

donde \sim significa “tiene distribución” y hemos supuesto que X_1 et X_2 son independientes.

2. VARIABLES DE DECISIÓN.

Las variables de decisión son las análogas a las variables aleatorias. Para estas variables de decisión existe un análogo de todas las nociones habituales como media, varianza, función característica, etc.

DEFINICIÓN 2.1. 1. Una *variable de decisión* X sobre $(U, \mathcal{U}, \mathbb{K})$ es una función de U en E (un segundo espacio topológico). Ella induce una medida de costo \mathbb{K}_X sobre (E, \mathcal{B}) (\mathcal{B} representa el conjunto de los conjuntos abiertos de E) definida por $\mathbb{K}_X(A) = \mathbb{K}_*(X^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{B}$. La medida de costo \mathbb{K}_X tiene una densidad de costo c_X . Cuando $E = \mathbb{R}$, llamamos a X variable de *decisión real*; cuando $E = \mathbb{R}_{\min}$, la llamamos *variable costo*.

2. Dos variables de decisión se dicen *independientes* cuando :

$$c_{X,Y}(x, y) = c_X(x) + c_Y(y).$$

3. El *óptimo* de una variable de decisión está definido por

$$\mathbb{O}(X) \triangleq \arg \min_{x \in E} \text{conv}(c_X)(x)$$

cuando el mínimo existe, donde conv representa la envolvente convexa s.c.i. y $\arg \min$ el punto donde se alcanza el mínimo. Cuando una variable de decisión X con valores en un espacio lineal verifica que $\mathbb{O}(X) = 0$ decimos que está *centrada*.

4. Cuando el óptimo de una variable de decisión X con valores en \mathbb{R}^n es único y cuando cerca del óptimo tenemos :

$$\text{conv}(c_X)(x) = \frac{1}{p} \|\sigma^{-1}(x - \mathbb{O}(X))\|^p + o(\|x - \mathbb{O}(X)\|^p),$$

decimos que X es de orden p y definimos la *sensibilidad de orden p* por $\mathbb{S}^p(X) = \sigma$.

5. El *valor* de una variable costo X es $\mathbb{V}(X) \triangleq \inf_x (x + c_X(x))$.

2.1. ESPACIO DE LAS VARIABLES DE DECISIÓN.

Podemos introducir espacios de variables de decisión que son los análogos a los espacios L^p .

TEOREMA 2.2. Para $p \geq 1$, los números

$$|X|_p \triangleq \inf \left\{ \sigma : \frac{1}{p} |x - \mathbb{O}(X)| / \sigma \leq c_X(x) \right\} \text{ y } \|X\|_p \triangleq |X|_p + |\mathbb{O}(X)| ,$$

definen respectivamente una seminorma y una norma sobre el espacio \mathbb{L}^p de las variables de decisión reales que tienen un único óptimo y tales que $\|X\|_p$ es finita.

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos solamente que $|X + Y|_p \leq |X|_p + |Y|_p$. Supongamos que X e Y están centradas. Sean σ_1 y σ_2 tal que $|X|_p \leq \sigma_1$, $|Y|_p \leq \sigma_2$. Puesto que

$$|X|_p = \inf_{\sigma} \left\{ \sigma : 0 \leq \mathbb{V} \left(-\frac{1}{p} \left| \frac{X}{\sigma} \right|^p \right) \right\},$$

y además

$$\mathbb{V} \left[-\frac{1}{p} \max \left(\left| \frac{X}{\sigma_1} \right|, \left| \frac{Y}{\sigma_2} \right| \right) \right] = \min \left[\mathbb{V} \left(-\frac{1}{p} \left| \frac{X}{\sigma_1} \right|^p \right), \mathbb{V} \left(-\frac{1}{p} \left| \frac{Y}{\sigma_2} \right|^p \right) \right],$$

resulta de

$$\frac{|X + Y|}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{|X|}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{|Y|}{\sigma_2} \leq \max \left(\frac{|X|}{\sigma_1}, \frac{|Y|}{\sigma_2} \right),$$

que

$$0 \leq \mathbb{V} \left(-\frac{1}{p} \left| \frac{X + Y}{\sigma_1 + \sigma_2} \right|^p \right).$$

Por lo tanto hemos probado que $|X + Y|_p \leq |X|_p + |Y|_p$. \square

El siguiente teorema también puede demostrarse.

TEOREMA 2.3. Para dos variables de decisión reales X e Y que sean independientes y para $k \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se verifica :

1. $\mathbb{O}(X + Y) = \mathbb{O}(X) + \mathbb{O}(Y)$,
2. $\mathbb{O}(kX) = k\mathbb{O}(X)$,
3. $\mathbb{S}^p(kX) = |k|\mathbb{S}^p(X)$,
4. $[\mathbb{S}^p(X + Y)]^{p'} = [\mathbb{S}^p(X)]^{p'} + [\mathbb{S}^p(Y)]^{p'}$,
5. $(|X + Y|_p)^{p'} \leq (|X|_p)^{p'} + (|Y|_p)^{p'}$.

2.2. TRANSFORMACIÓN DE FENCHEL.

El rol de las transformadas de Laplace o Fourier en el cálculo de probabilidades es jugado en el cálculo de decisión por la transformación de Fenchel.

DEFINICIÓN 2.4. La transformada de Fenchel $\mathcal{F}_e(f)$ de una función f con valores en \mathbb{R}_{\min} está definida por :

$$[\mathcal{F}_e(f)](\theta) = \sup_x (x.\theta - f(x))$$

Las propiedades importantes de la transformación de Fenchel están dadas en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5. La transformada de Fenchel tiene las siguientes propiedades

1. $\mathcal{F}_e(\mathcal{F}_e(f)) = f$, $\forall f$ convexa, s.c.i. y propia (nunca igual a $-\infty$) o si $f = \pm\infty$.
2. $\mathcal{F}_e(f \boxtimes g) = \mathcal{F}_e(f) + \mathcal{F}_e(g)$.
3. $\mathcal{F}_e(f + g) = \mathcal{F}_e(f) \boxtimes \mathcal{F}_e(g)$ donde f, g son s.c.i., propias y existe x tal que $f(x)$ y $g(x)$ son finitas y una de las dos funciones es continua en x .

DEFINICIÓN 2.6. La función característica de una variable de decisión X está definida por :

$$\mathbb{F}(x) \triangleq \mathcal{F}_e(c_X).$$

EJEMPLO 2.7. $\mathbb{F}(\mathcal{M}_{m,\sigma}^p)(\theta) = \theta m + \frac{1}{p_2} |\sigma\theta|^{p'}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

3. SERIES DE VARIABLES DE DECISIÓN.

Puede definirse el análogo de las topologías utilizadas en cálculo de probabilidades para las variables de decisión. Los teoremas de límite clásicos del cálculo de probabilidades tendrán entonces sus análogos para las variables de decisión.

DEFINICIÓN 3.1. Para una sucesión de variables de decisión reales $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, medidas de costo \mathbb{K}_n y funciones c_n desde U (espacio topológico con una base de entornos numerable para cada punto) en \mathbb{R}_{\min} se define :

1. $X_n \in \mathbb{L}^p$ converge en p -norma hacia $X \in \mathbb{L}^p$ representado por $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$, si

$$\lim_n \|X_n - X\|_p = 0 ;$$

2. X_n converge en costo hacia X representado por $X_n \xrightarrow{\mathbb{K}} X$, si para todo $\epsilon > 0$ tenemos que $\lim_n \mathbb{K} \{u \mid |X_n(u) - X(u)| \geq \epsilon\} = +\infty$;
3. X_n converge casi seguramente hacia X representado por $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, si

$$\mathbb{K} \left\{ u \mid \lim_n X_n(u) \neq X(u) \right\} = +\infty ;$$

4. \mathbb{K}_n converge débilmente hacia \mathbb{K} representado por $\mathbb{K}_n \xrightarrow{w} \mathbb{K}$, si para toda función $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\min}$ continua y acotada inferiormente se verifica que $\lim_n \mathbb{K}_n(f) = \mathbb{K}(f)$ donde $\mathbb{K}(f) \triangleq \inf_u (f(u) + c(u))$.
5. c_n epi-converge hacia c representado por $c_n \xrightarrow{epi} c$, si

$$\forall u, \forall u_n \rightarrow u, \liminf_n c_n(u_n) \geq c(u) ,$$

$$\forall u, \exists u_n \rightarrow u : \limsup_n c_n(u_n) \leq c(u) .$$

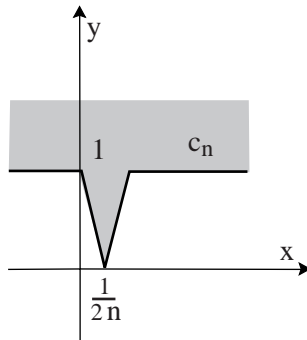


FIGURA 1. $c_n(x)$.

EJEMPLO 3.2. La sucesión de funciones c_n representada en la figura epi-converge a la función :

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 , \\ 1 & \text{si } x \neq 0 , \end{cases}$$

la cual es distinta al límite habitual de la sucesión que es la función idénticamente uno. Si definimos

$$g_n = \begin{cases} c_n & \text{si } n \text{ es par,} \\ c_n \left(\cdot + \frac{1}{2n} \right) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

entonces g_n epi-converge hacia c pero g_n no converge en el sentido habitual. Por lo tanto : epi-convergencia $\not\Rightarrow$ convergencia simple. Si definimos :

$$h_n = \begin{cases} c_n - 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2(c_n - 1) & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

entonces h_n converge de la manera habitual a la función idénticamente nula pero no epi-converge. Por lo tanto : convergencia simple $\not\Rightarrow$ epi-convergencia.

DEFINICIÓN 3.3. Una sucesión \mathbb{K}_n de medidas de costo se dice *asintóticamente apretada* si

$$\sup_{C \text{ compacto } \subset U} \liminf_n \mathbb{K}_n(C^c) = +\infty.$$

TEOREMA 3.4. Sea \mathbb{K}_n una sucesión de medidas de costo *asintóticamente apretada*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

1. $\mathbb{K}_n \xrightarrow{w} \mathbb{K}$;
- 2.

$$\begin{aligned} \liminf_n \mathbb{K}_n(F) &\geq \mathbb{K}(F), \quad \forall F \text{ conjunto cerrado,} \\ \limsup_n \mathbb{K}_n(G) &\leq \mathbb{K}(G), \quad \forall G \text{ conjunto abierto ;} \end{aligned}$$

3. $c_n \xrightarrow{epi} c$.

Las diferentes clases de convergencia están relacionadas por el siguiente teorema.

TEOREMA 3.5. *Tenemos las siguientes implicaciones.*

1. *Convergencia en p -norma implica la convergencia en costo (es falsa la inversa).*
2. *Convergencia en costo implica la convergencia casi segura (es falsa la inversa).*
3. *Para las sucesiones *asintóticamente apretadas*, la convergencia en costo implica la convergencia débil.*

DEFINICIÓN 3.6. Una sucesión de variables de decisión reales independientes y de idéntico costo c (i.i.c.) sobre $(U, \mathcal{U}, \mathbb{K})$ es una función X de U en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que induce la densidad de costo :

$$c_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c(x_i), \quad \forall x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Tenemos ahora el análogo de la ley de los grandes números.

TEOREMA 3.7. *Dada una sucesión $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variables de decisión i.i.c. pertenecientes a \mathbb{L}^p , $p \geq 1$, tenemos :*

$$Y_N \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \longrightarrow \mathbb{O}(X_0),$$

donde la convergencia puede tomarse en el sentido de casi seguramente, costo y p -norma.

También tenemos el análogo a la ley del límite central.

TEOREMA 3.8. *Dada una sucesión $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variables de decisión i.i.c. centradas de orden p y con costos s.c.i. y convexos, tenemos :*

$$Z_N \triangleq \frac{1}{N^{1/p'}} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \xrightarrow{w} \mathcal{M}_{0, \mathbb{S}^p(X_0)}^p,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Por último tenemos el análogo del teorema de las grandes desviaciones.

TEOREMA 3.9. *Dada una sucesión $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variables de decisión i.i.c. de densidad de costo apretada c , tenemos :*

$$\frac{1}{n} c_{(X_1 + \dots + X_n)/n} = \text{conv}(c).$$

4. MECÁNICA ESTADÍSTICA Y TRANSFORMADA DE CRAMER.

Mostraremos como la transformada de Cramer aparece en la mecánica estadística y veremos cuales son sus propiedades. Aquí un sistema mecánico significa un sistema con un número finito de estados y min-plus lineal. Más precisamente, consideraremos el análogo de un sistema de partículas independientes (gas perfecto) construyendo un gran sistema min-plus compuesto por subsistemas min-plus independientes. Luego calcularemos la distribución de Gibbs de los subsistemas min-plus utilizando métodos clásicos de mecánica estadística. En este cálculo aparecerá naturalmente la transformada de Cramer.

DEFINICIÓN 4.1. El *producto tensorial* de dos matrices min-plus rectangulares A y B es el tensor min-plus de orden 4 representado por $C = A \odot B$ con coeficientes

$$C_{j_1 j_2 i_1 i_2} = A_{j_1 i_1} \otimes B_{j_2 i_2} = A_{j_1 i_1} + B_{j_2 i_2}.$$

En el conjunto de dichos tensores se define el producto :

$$[C \otimes D]_{i_1 i_2 k_1 k_2} = \bigoplus_{j_1, j_2} (C_{i_1 i_2 j_1 j_2} \otimes D_{j_1 j_2 k_1 k_2}).$$

PROPOSICIÓN 4.2. *Dado un conjunto de m matrices min-plus A_i irreducibles con autovalores λ_i y autovectores X_i , tenemos :*

$$\left[\bigcirc_i A_i \right] \left[\bigcirc_i X_i \right] = \left[\bigotimes_i \lambda_i \right] \left[\bigcirc_i X_i \right]. \quad (4.1)$$

Consideremos ahora un sistema compuesto de N subsistemas independientes (partículas) de k clases diferentes definidos por matrices (min-plus) A_i , $i = 1, \dots, k$ que supondremos irreducibles y con autovalores λ_i . La partición $(N_i, i = 1, \dots, k)$ con $\sum_i N_i = N$ de los N subsistemas entre las k posibilidades define la probabilidad :

$$p = \left(p_i \triangleq N_i/N, i = 1, \dots, k \right).$$

El número de formas posibles para obtener una distribución p dada es :

$$M = \frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_k!}.$$

Luego se puede mostrar que $S \triangleq (\log(M)/N) \sim -\sum_{i=1}^k p_i \log(p_i)$ cuando $N \rightarrow +\infty$.

Supongamos que conocemos el autovalor E del sistema completo (el cual puede interpretarse como la energía total del sistema completo). Entonces por (4.1) tenemos :

$$E = \bigotimes_{i=1}^k (\lambda_i)^{N_i},$$

es decir :

$$U \triangleq \sum_i p_i \lambda_i = \frac{E}{N}. \quad (4.2)$$

La distribución de Gibbs se define como aquella que maximiza S entre las distribuciones que verifican (4.2).

TEOREMA 4.3. *La distribución de Gibbs está dada por :*

$$p_i(\theta) = \frac{e^{\theta \lambda_i}}{\sum_j e^{\theta \lambda_j}}, \quad (4.3)$$

donde θ es el punto donde se alcanza el máximo en

$$c_\mu(U) = \max_{\theta} [\theta U - \log \mathbb{E}(e^{\theta \lambda})],$$

y donde λ es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,k}$.

DEMOSTRACIÓN. La función $p \mapsto -S(p)$ es convexa. Por lo tanto debemos minimizar una función convexa sujeta a restricciones lineales. Consideremos el Lagrangiano :

$$L(\theta, \mu, p) = \sum_i [p_i \log p_i] + \mu \left[1 - \sum_i p_i \right] + \theta \left[U - \sum_i p_i \lambda_i \right].$$

El punto de ensilladura (θ, μ, p) donde se alcanza el $\max_{\theta} \max_{\mu} \min_p L(\theta, \mu, p)$ nos provee la distribución de Gibbs. Primero resolviendo $\max_{\mu} \min_p L(\theta, \mu, p)$ obtenemos (4.3). Para calcular θ como función de U debemos maximizar el Lagrangiano con respecto a θ , es decir

$$\max_{\theta} \left\{ \theta U - \log \left[\sum_i e^{\theta \lambda_i} \right] \right\},$$

lo cual puede escribirse como :

$$\max_{\theta} [\theta U - \log \mathbb{E}(e^{\theta \lambda})] - \log k,$$

si λ es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,k}$. \square

DEFINICIÓN 4.4. La *transformada de Cramer* \mathcal{C} es una función de \mathcal{M} (el conjunto de las medidas positivas sobre \mathbb{R}^n) en \mathcal{C}_X (el conjunto de las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}_{\min} convexas, s.c.i. y propias) definida por $\mathcal{C} \triangleq \mathcal{F}_e \circ \log \circ \mathcal{L}$ donde :

1. \mathcal{F}_e es la transformada de Fenchel,
2. \mathcal{L} es la transformada de Laplace, es decir $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\theta,x)} \mu(dx)$.

La transformada de Cramer tiene la propiedad cambiar las convoluciones por inf-convoluciones y entonces lleva variables aleatorias independientes en variables de decisión independientes. En la tabla siguiente se resumen los principales ejemplos y propiedades de la transformada de Cramer cuando $n = 1$.

\mathcal{M}	$\log(\mathcal{L}(\mathcal{M})) = \mathcal{F}_e(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$	$\mathcal{C}(\mathcal{M})$
μ	$\hat{c}_\mu(\theta) = \log \int e^{\theta x} d\mu(x)$	$c_\mu(x) = \sup_\theta (\theta \cdot x - \hat{c}(\theta))$
0	$-\infty$	$+\infty$
δ_a	θa	χ_a
distrib. de Gauss	$m\theta + \frac{1}{2} \sigma \cdot \theta ^2$	$\mathcal{M}_{m,\sigma}^2$
$\mu * \nu$	$\hat{c}_\mu + \hat{c}_\nu$	$c_\mu \boxtimes c_\nu$
$m_0 \triangleq \int \mu$	$\hat{c}(0) = \log(m_0)$	$\inf_x c(x) = -\log(m_0)$
$m_0 = 1$	$\hat{c}(0) = 0$	$\inf_x c(x) = 0$
$m_0 = 1, m \triangleq \int x \mu$	$\hat{c}'(0) = m$	$c(m) = 0$
$m_0 = 1, m_2 \triangleq \int x^2 \mu$	$\hat{c}''(0) = \sigma^2 \triangleq m_2 - m^2$	$c''(m) = 1/\sigma^2$
$k\mu$	$\log(k) + \hat{c}$	$c - \log(k)$

5. DECISIÓN GENERALIZADA.

La imagen de $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ por una función monótona permite construir otros semi-anillos y otros cálculos de decisión como por ejemplo ciertas clases de comandos estocásticos.

5.1. SEMI-ANILLOS INDUCIDOS POR UNA FUNCIÓN MONÓTONA.

Consideremos una función $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ monótona. Definamos las operaciones :

$$\forall u, v \in [a, b], \quad \begin{cases} u \oplus v &= g^{-1}(g(u) + g(v)) , \\ u \otimes v &= g^{-1}(g(u) \times g(v)) . \end{cases}$$

Entonces puede demostrarse el siguiente teorema .

TEOREMA 5.1. *El conjunto $([a, b], \oplus, \otimes)$ tiene una estructura de semi-anillo con $\varepsilon = g^{-1}(0)$ y $e = g^{-1}(1)$.*

EJEMPLO 5.2. 1. Si $g : x \in [0, \infty) \mapsto x^2 \in [0, \infty)$ entonces

$$u \oplus v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u \otimes v = u \times v .$$

2. Si $g : x \in [0, \infty] \mapsto x^{-1} \in [0, \infty]$ entonces

$$u \oplus v = \frac{1}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}, \quad u \otimes v = u \times v .$$

3. Si $g : x \in [-\infty, \infty) \rightarrow e^{ax} \in [0, \infty)$, $a > 0$, entonces

$$u \oplus v = \frac{1}{a} \log(e^{au} + e^{av}), \quad u \otimes v = u + v.$$

5.2. OPERADORES LINEALES INDUCIDOS.

Dado un operador lineal A se puede definir el operador A^g inducido por g como :

$$A^g = g^{-1} \circ A \circ g.$$

EJEMPLO 5.3. 1. Sea $g(x) = x^2$ y A el producto matricial. Entonces

$$(C \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k C_{ik} \otimes B_{kj} = \sqrt{\sum_k c_{ik}^2 \times b_{kj}^2}.$$

2. Sea $g(x) = e^{ax}$ y A el operador derivada. Entonces

$$\frac{d^g}{dx} f = g^{-1} \circ \frac{d}{dx} (g \circ f) = \frac{1}{a} \ln \frac{d}{dx} [e^{af(x)}] = f + \frac{1}{a} \ln \left(a \frac{df}{dx} \right).$$

Este operador tiene propiedades análogas al operador derivada habitual. Por ejemplo

$$\frac{d^g}{dx} (f_1 \otimes f_2) = \frac{d^g f_1}{dx} \otimes f_2 \oplus f_1 \otimes \frac{d^g f_2}{dx}.$$

3. Sea $g(x) = e^{ax}$ y A el operador integral. Entonces

$$\int f(x) \otimes d^g x = g^{-1} \left(\int g[f(x)] dx \right).$$

Por ejemplo :

$$\int_0^y x \otimes d^g x = \frac{1}{a} \log \int_0^y e^{ax} dx = y - \frac{\log a}{a}.$$

5.3. APLICACIÓN AL CONTROL ESTOCÁSTICO.

Consideremos la ecuación no lineal en derivadas parciales (llamada ecuación de Burgers) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ donde c es una constante positiva. Si tomamos $g(u) = e^{-u/c}$ entonces la solución de la ecuación anterior está dada por :

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \left[\log(2\pi ct) \otimes \int \left[\frac{(x-s)^2}{2t} \right] \otimes u_0(s) d^g s \right].$$

La ecuación de Burgers es lineal en el sentido (\oplus, \otimes) .

6. NOTAS

El origen de esta dualidad entre el cálculo de probabilidades y la optimización se remonta al principio de correspondencia de la mecánica cuántica que permite encontrar la ecuación de Schrodinger de un sistema a partir del Hamiltoniano del sistema clásico correspondiente. Esto ha conducido [55] y luego [52] a construir una teoría de medidas idempotentes.

Otro origen para esta dualidad, más reciente e independiente, se encuentra en el principio de grandes desviaciones [70] del cálculo de probabilidades.

La explicitación de un formalismo para la optimización análogo al formalismo probabilístico fue hecha de manera independiente por varios grupos de personas, por un lado siguiendo la línea de los trabajos [63, 7, 11, 3, 1, 2, 4] (bajo la influencia inicial de los resultados disponibles en [75]) y por otro en [30, 29]. Señalemos también el trabajo [10] que utiliza el mismo tipo de ideas en control robusto.

La relación entre las grandes desviaciones y la mecánica estadística es clásica [32]. El vínculo entre el álgebra max-plus y la mecánica estadística, indicado en este capítulo, ha sido publicada en [64].

La teoría de leyes estables se encuentra en [34, 69].

La epiconvergencia es clásica en optimización [5]. Trabajos recientes en análisis idempotente pueden verse en [43, 44, 68].

La teoría de la decisión generalizada se encuentra en [59].

CAPÍTULO 3

Ecuaciones lineales recurrentes.

1. CADENAS DE BELLMAN.

En esta sección consideraremos las cadenas de Bellman que son las análogas min-plus de las cadenas de Markov. Mostraremos que las ecuaciones de la programación dinámica de las cadenas de Bellman son análogas a las ecuaciones de Kolmogorov.

DEFINICIÓN 1.1. Una *cadena de Bellman* $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, c^0, M)$ está compuesta por :

1. $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ es el tiempo (discreto) ;
2. $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, E\}$ es el espacio de estados (finito) ;
3. c^0 es el costo inicial que verifica : $\bigoplus_{x \in \mathcal{E}} c_x^0 = e \triangleq 0$;
4. M es la matriz $E \times E$ de los costos de transición, es decir que M_{xy} representa el costo de la transición del estado x al estado y . Esta matriz debe verificar :

$$\bigoplus_y M_{xy} = e, \quad M_{xy} \geq e .$$

Sea $U = \mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ el conjunto de todas las trayectorias posibles. Si $u \in U$ entonces $X^n(u) = u_n$ es el estado en el que se encuentra el sistema en el instante n . Si a los conjuntos

$$A = \{u \in U : X^0(u) = x_0, X^1(u) = x_1, \dots, X^n(u) = x_n\} ,$$

les asociamos el costo :

$$\mathbb{K}(A) = c_{x_0}^0 + M_{x_0x_1} + \dots + M_{x_{n-1}x_n} ,$$

entonces la extensión minimal \mathbb{C} a $\mathcal{P}(U)$ de este costo \mathbb{K} está definida de manera única y admite una densidad de costo s.c.i. representada por c . La siguiente proposición nos dice que esta extensión \mathbb{C} tiene la propiedad de Markov.

PROPOSICIÓN 1.2. $\mathbb{C}(X^n = x_n \mid X^{n-1} = x_{n-1}, \dots, X^0 = x_0) = M_{x_{n-1}x_n}$.

Si definimos $c_x^n \triangleq \mathbb{C}(X^n(u) = x)$ entonces tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.3. *Ecuación de Bellman hacia adelante*

$$c^{n+1} = c^n \otimes M .$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\mathbb{C}(X^n(u) = x) = \inf_{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}} \{c_{x_0}^0 + M_{x_0x_1} + \dots + M_{x_{n-1}x_n}\} = c^0 \otimes M^{\otimes n} .$$

□

1.1. PROGRAMACIÓN DINÁMICA HACIA ATRÁS.

Consideremos la cadena de Bellman con horizonte finito $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, M, \varphi, \phi, N)$ donde :

1. \mathcal{T}, \mathcal{E} y M están definidos como antes.

2. φ_x es el costo si nos detenemos cuando el sistema está en el estado x (detención intermedia).
3. ϕ es el E -vector de los costos de detención final.
4. N es el horizonte.

Si definimos los E -vectores V^n por :

$$V_x^n \triangleq \mathbb{V} \left[\bigoplus_{k=n}^{N-1} \varphi_{x_k} \oplus \phi_{x_N} \mid X_n = x \right] = \mathbb{V} \left[\inf \left\{ \inf_{k=n}^{N-1} \varphi_{x_k}, \phi_{x_N} \right\} \mid X_n = x \right],$$

entonces los mismos se pueden obtener con la relación de recurrencia dada en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4. *Ecuación de Bellman hacia atrás.*

$$V^n = \varphi \oplus M \otimes V^{n+1}, \quad V^N = \phi. \quad (1.1)$$

EJEMPLO 1.5. Distancia mínima a una región en menos de N etapas.

Tomemos $M_{x_1 x_2}$ como la distancia desde el estado x_1 hacia el estado x_2 si existe una ruta de x_1 a x_2 . Si no existe dicha ruta tomemos $M_{x_1 x_2} = \epsilon = +\infty$. Sea $A \subset \xi$ una región. Entonces la recurrencia dada en la ecuación (1.1) nos provee de la distancia mínima hacia la región en menos de N etapas si definimos :

$$\varphi_x = e_x^A = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ \epsilon & \text{si } x \notin A, \end{cases} \quad \phi_x = \epsilon, \quad \forall x.$$

Para el sistema de la figura 1 tenemos que :

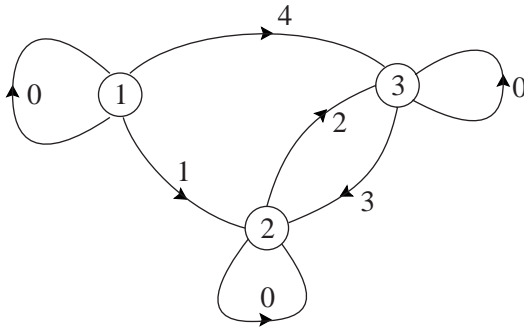


FIGURA 1. Distancias.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \epsilon & 0 & 2 \\ \epsilon & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si tomamos $A = \{3\}$ entonces resulta :

$$V^3 = \phi = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.2. PROPIEDADES COMBINATORIAS.

DEFINICIÓN 1.6. Consideremos una cadena de Bellman con matriz de transición M . Sea $G(M')$ el grafo asociado a la matriz de transición M .

1. El *sucesor* es la función :

$$\Gamma : x \in V \mapsto \{y \in V \mid M_{xy} \neq +\infty\} \in \mathcal{P}(V) .$$

Por ejemplo, en el grafo de la figura 2

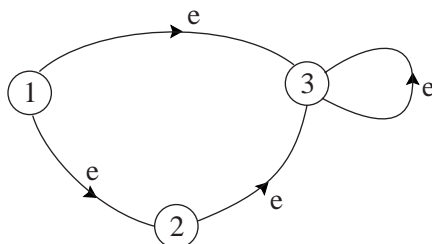


FIGURA 2. Sucesor.

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} ,$$

$$\Gamma(1) = \{2, 3\}, \Gamma(2) = \{3\}, \Gamma(3) = \{3\} .$$

2. Un *camino* de x_0 hacia x_n es una secuencia $\pi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de vértices tal que $x_k \in \Gamma(x_{k-1}) \quad k = 1, \dots, n$.
3. Un *circuito* es un camino con $x_0 = x_n$.
4. Se puede definir una relación de equivalencia \sim en V por : $x \sim y$ si existe un circuito ζ tal que $x \in \zeta$ e $y \in \zeta$. Las clases de equivalencia por esta relación reciben el nombre de componentes fuertemente conexas del grafo.
5. Se puede definir una relación de orden \succeq en V por : $x \succeq y$ si existe un camino de x hacia y . Una clase se dice *final* si ella es minimal con respecto a \succeq . Una clase que no es final se llama *transitoria*.
6. La *ciclicidad de una componente fuertemente conexa* es el máximo común divisor de las longitudes de sus circuitos.
7. La *ciclicidad de un grafo* es el mínimo común múltiplo de la ciclicidad de sus componentes fuertemente conexas.

2. PROPIEDADES DE LAS MATRICES ESTOCÁSTICAS.

En esta sección recordaremos las propiedades de las matrices estocásticas de manera de poder compararlas con las propiedades de las matrices max-plus.

2.1. RADIO ESPECTRAL.

Sea M una matriz estocástica, es decir que verifican :

$$M_{xy} \geq 0, \sum_y M_{xy} = 1, \forall x.$$

Entonces M tiene las siguientes propiedades :

1. 1 es autovalor de M ;

$$2. |M|_\infty \triangleq \frac{\sup_x \left| \sum_y M_{xy} v_y \right|}{\sup_x |v_x|} \leq \frac{\sup_x \left[\sup_y |v_y| \sum_y M_{xy} \right]}{\sup_x |v_x|} \leq 1 ;$$

3. M puede tener otros autovalores de módulo 1. Por ejemplo, la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

tiene los autovalores 1 y -1 ;

4. los autovalores de módulo 1 son simples.

2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS MATRICES ESTOCÁSTICAS.

Las matrices estocásticas pueden clasificarse de la manera dada en la tabla 1.

Tipo	Prop. combinatorias	Prop. espectrales
general	varias clases finales	varios autovalores
	diferentes ciclicidades	de módulo 1
primitiva	todas las clases finales	1 es el único autovalor
	tienen ciclicidad 1.	de módulo 1.
ergódica	Una sola clase final.	1 autovalor simple.
regular	una sola clase final	1 es un autovalor simple
	con ciclicidad 1.	y el único de módulo 1.
irreducible	una sola clase.	1 autovalor simple.

TABLA 1. Clasificación de cadenas de Markov.

Dada una cadena de Markov con matriz de transición M es posible enumerar los estados de manera tal que M tome la forma de la tabla 2 donde en las f_i están los estados de las clases finales y en t están los estados de las clases transitorias.

$$M = \begin{array}{c|cccc} & f_1 & f_2 & f_m & t \\ \hline f_1 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline f_2 & 0 & M_2 & 0 & 0 \\ \hline f_m & 0 & 0 & M_m & 0 \\ \hline t & M_{t1} & . & . & T \end{array}$$

TABLA 2. Forma canónica de una matriz estocástica.

Se puede probar que el número de clases finales es igual a la multiplicidad del autovalor 1 de M y también que existe una base del autoespacio a izquierda de este autovalor de la forma :

$$\pi_I = \left[0 \quad . \quad 0 \quad \underbrace{f_i}_{p_i} \quad 0 \quad . \quad 0 \right] \text{ donde } p_i = p_i M_{ii} .$$

Estos autovectores tienen la interpretación probabilística de ser una medida invariante para M .

PROPOSICIÓN 2.1. La matriz $T - I_d$ es inversible donde T es la matriz de transición restringida a los estados de las clases de transitorias (tabla 2).

DEMOSTRACIÓN. Existe n tal que $|T^n|_\infty < 1$ porque para cada $t \in T$ existe un camino desde t hacia alguna clase final con lo cual la línea de M^n correspondiente a t tiene un elemento no nulo y entonces la suma de los elementos de la línea t de T^n es estrictamente menor que 1. Por lo tanto $T - I_d$ tiene todos sus autovalores estrictamente negativos con lo cual es inversible. \square

La siguiente proposición también pueden demostrarse.

PROPOSICIÓN 2.2. Los vectores χ_I definidos por

$$(\chi_I)_k = \begin{cases} (x_I)_k & \text{sobre } k \in t, \text{ donde } (T - I_d)x_I + (M - I_d)1_{f_I} = 0, \\ 1 & \text{sobre } k \in f_I, \\ 0 & \text{sobre cualquier otra componente,} \end{cases}$$

forman una base del núcleo $\mathcal{N}(A)$ de la matriz $A = M - I_d$.

Finalmente tenemos el teorema siguiente.

TEOREMA 2.3. El proyector P sobre el autoespacio asociado al autovalor 1 de M verifica :

$$P = \sum_I \chi_I \otimes \pi_I,$$

donde \otimes representa el producto tensorial.

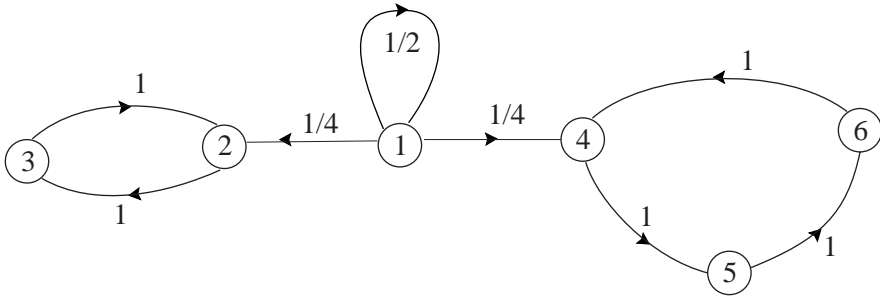


FIGURA 3. Una cadena de Markov.

EJEMPLO 2.4. Para el grafo de la figura 3 tenemos las dos clases finales $\{2, 3\}$ y $\{4, 5, 6\}$. Entonces hay dos medidas invariantes que son :

$$p_1 = [0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad p_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3].$$

Los dos autovectores a derecha son :

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto el proyector espectral asociado es :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} .$$

Las propiedades asintóticas de las matrices estocasticas se resumen en la tabla 3.

Tipo	Propriedades asintóticas
general	$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I + \dots + M^{n-1}}{n}$
primitiva	$P = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$
ergódica	$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^0 + \dots + p^{n-1}}{n}, \forall p^0$ donde $p^{n+1} = p^n M, p = p M$
regular	$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n, \forall p^0$
irreducible	$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^0 + \dots + p^{n-1}}{n}, \forall p^0$ donde $p_i > 0, \forall i$

TABLA 3. Propiedades asintóticas des cadenas de Markov.

3. PROPIEDADES ESPECTRALES DE LAS MATRICES MAX-PLUS.

Estudiaremos aquí el autoespacio de una matriz max-plus irreducible y daremos el proyector correspondiente. A lo largo de esta sección supondremos que A es una matriz max-plus $n \times n$ irreducible y con e como único autovalor (entonces todos los circuitos de $\mathcal{G}(A)$ tienen peso menor o igual que 0).

DEFINICIÓN 3.1. Se llama circuito crítico a todo circuito de peso 0.

1. El grafo crítico $\mathcal{G}^c(A)$ es el grafo formado por los vértices y los arcos que pertenecen a algún circuito crítico. Al conjunto de vértices del grafo crítico lo representamos con \mathcal{V}_c .
2. El grafo de saturación $\mathcal{S}(A, y)$ asociado al autovector y de A es el conjunto de los vértices i, j y arcos (j, i) que verifican :

$$A_{ij} y_j = y_i, \text{ con } y_i \neq \varepsilon, y_j \neq \varepsilon .$$

PROPOSICIÓN 3.2. *Todo circuito del grafo crítico es un circuito crítico. Además, todos los caminos del grafo crítico con los mismos extremos tienen el mismo peso.*

El siguiente teorema nos dice que el autoespacio asociado al autovalor e está generado por m autovectores donde m es el número de componentes fuertemente conexas de $\mathcal{G}^c(A)$.

TEOREMA 3.3. *Cualquier autovector asociado al autovalor e se obtiene como combinación lineal de N_A^c columnas de A^+ , donde N_A^c es el número de componentes fuertemente conexas de $\mathcal{G}^c(A)$. Más precisamente tenemos :*

1. las columnas A_i^+ , $i \in \mathcal{V}_c$, son autovectores ;
2. si los vértices j e i pertenecen a la misma componente fuertemente conexa de $\mathcal{G}^c(A)$, entonces A_i^+ y A_j^+ son “proporcionales”;
3. ninguna columna A_i^+ puede expresarse como una combinación lineal de las columnas A_j^+ que utilizan únicamente vértices j pertenecientes a componentes fuertemente conexas de $\mathcal{G}^c(A)$ distintas de $[i]$.

DEFINICIÓN 3.4. Una matriz Q que verifica :

$$AQ = QA = Q^2,$$

se llama *proyector espectral* de A asociado con el autovalor e .

Los siguientes teoremas pueden demostrarse.

TEOREMA 3.5. Las matrices

$$Q_i \triangleq A_i^+ A_i^+, \quad i \in \mathcal{V}_c \quad \text{y} \quad Q \triangleq \bigoplus_{i \in \mathcal{V}_c} Q_i,$$

son *proyectores espectrales*.

TEOREMA 3.6. Si la ciclicidad de $\mathcal{G}^c(A)$ es 1 entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que :

$$A^k = Q, \quad \forall k \geq K.$$

TEOREMA 3.7. Si $\mathcal{G}(A)$ es fuertemente conexo y si d es la ciclicidad de A , entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que :

$$A^{k+d} = A^k, \quad \forall k \geq K.$$

4. CONTROL ESTOCÁSTICO.

Formularemos de manera precisa los problemas de control estocástico en el caso de tiempo discreto y de espacio de control finito.

4.1. CADENAS DE MARKOV CONTROLADAS Y OBSERVADAS.

Consideraremos la cadena de Markov $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, M^{uy}, p^0, c^{uy}, \phi)$ controlada y observada donde :

1. $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ es el *tiempo* (discreto) ;
2. $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, E\}$ es el *espacio de estados* ;
3. $\mathcal{G} = \{1, 2, \dots, G\}$ es el *espacio de las observaciones* ;
4. $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, F\}$ es el *espacio de los controles* ;
5. $\{M^{uy}, u \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{G}\}$ es una familia de *matrices de transición* donde $M_{xx'}^{uy}$ se interpreta como la probabilidad de la transición del estado x al estado x' y de observar y si se toma la decisión u ;
6. p^0 es una ley de *probabilidad* sobre $\mathcal{E} \times \mathcal{G}$ (llamada *ley inicial*) y que entonces verifica :

$$\sum_{xy} p_x^{0y} = 1, \quad p_x^{0y} \geq 0;$$

7. $c^{uy} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $u \in \mathcal{F}$, $y \in \mathcal{G}$ es una familia de *costos instantáneos* ;
8. ϕ es el *costo* sobre el estado final.

Representaremos :

1. $X^n \in \mathcal{E}$ al *estado* del sistema en el instante n ;
2. $Y^n \in \mathcal{G}$ a la *observación* del sistema en el instante n ;

3. $U^n \in \mathcal{F}$ al control en el instante n .

Una política relajada $\rho = (\rho_i, i \in \mathcal{T})$ es una ley de probabilidad sobre los controles condicionada por las observaciones pasadas, es decir que ρ_i es una función que asigna a cada (y_0, \dots, y_i) una distribución de probabilidad sobre \mathcal{F} . Al conjunto de las políticas relajadas lo representaremos con \mathcal{R} . Tenemos entonces la medida de probabilidad \mathbb{P} del proceso definida por :

$$\mathbb{P}((x, y, u)_0, (x, y, u)_1, \dots) = p_{x^0}^{0y^0} \rho^{0y^0u^0} m_{x^0x^1}^{u^0y^1} \rho^{1y^0y^1u^1} m_{x^1x^2}^{u^1y^2} \dots$$

El problema de control óptimo consiste entonces en minimizar el costo de funcionamiento del sistema sobre un periodo finito, es decir resolver problemas como:

$$\min_{\rho \in \mathcal{R}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} c_{X^i}^{U^i Y^i} + \phi_{X^N} \right\},$$

donde N es el horizonte del problema.

4.2. UN IMPORTANTE CASO PARTICULAR.

Consideraremos ahora un caso particular importante llamado problema de observación completa donde la observación es igual al estado, es decir que $X^n = Y^n$. En este caso optimizaremos sobre el conjunto de "feedbacks", es decir sobre el conjunto :

$$\mathcal{S} = \left\{ s = (s^n : x \in \mathcal{E} \mapsto u \in \mathcal{F})_{n \in \mathcal{T}} \right\}.$$

El teorema siguiente nos permite calcular por recurrencia hacia atrás la estrategia óptima. La ecuación correspondiente se denomina ecuación de la programación dinámica.

TEOREMA 4.1. La solución de la ecuación de programación dinámica :

$$\begin{cases} V_x^n = \min_{u \in \mathcal{F}} \left\{ (M^u V^{n+1})_x + c_x^u \right\}, & \forall x \in \mathcal{E}, \\ V_x^N = \phi_x, \end{cases} \quad (4.1)$$

nos da el costo óptimo :

$$V_x^n = \min_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=n}^{N-1} c_{X^k}^{U^k} + \phi_{X^N} \mid X^n = x \right\},$$

y las funciones :

$$s^n : x \in \mathcal{E} \rightarrow u^* \in \arg \min_{u \in \mathcal{F}} \left\{ (M^u V^{n+1})_x + c_x^u \right\}, \quad (4.2)$$

definen una estrategia óptima en el conjunto \mathcal{S} .

DEMOSTRACIÓN. Sea V^n la solución de (4.1) y sea σ una estrategia cualquiera. Como X^n evoluciona según la ley inducida por σ tenemos :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\sigma \left\{ V_{X^{n+1}}^{n+1} - V_{X^n}^n \mid X^n = x \right\} &= \left(M^{\sigma^n} V^{n+1} - V^n \right)_x \geq -c_x^{\sigma^n} \\ \implies \mathbb{E}^{n,\sigma} \left(V_{X^{n+1}}^{n+1} - V_{X^n}^n \right) &\geq -c_{X^n}^{\sigma^n} \\ \implies \mathbb{E}^{0,\sigma} \left[V_{X^N}^N - V_{X^0}^0 \right] &= \mathbb{E}^{0,\sigma} \left[\sum_{n=0}^{N-1} V_{X^{n+1}}^{n+1} - V_{X^n}^n \right] \\ &= \mathbb{E}^{0,\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}^{n,\sigma} \left[V_{X^{n+1}}^{n+1} - V_{X^n}^n \right] \geq -\mathbb{E}^{0,\sigma} \left[\sum_{n=0}^{N-1} c_{X^n}^{\sigma^n} \right] \\ \implies V_{X^0}^0 &\leq \mathbb{E}^{0,\sigma} \left[\sum_{n=0}^{N-1} c_{X^n}^{\sigma^n} \right] + \mathbb{E}^{0,\sigma} \left[V_{X^N}^N \right] = \mathbb{E}^{0,\sigma} \left[\sum_{n=0}^{N-1} c_{X^n}^{\sigma^n} + \phi_{X^N} \right]. \end{aligned}$$

Además, con un razonamiento análogo, haciendo jugar el rol de σ a la estrategia definida por (4.2), se demuestra la igualdad para dicha estrategia. \square

EJEMPLO 4.2. Consideraremos la cadena de Markov controlada representada en la figura 4. Entonces

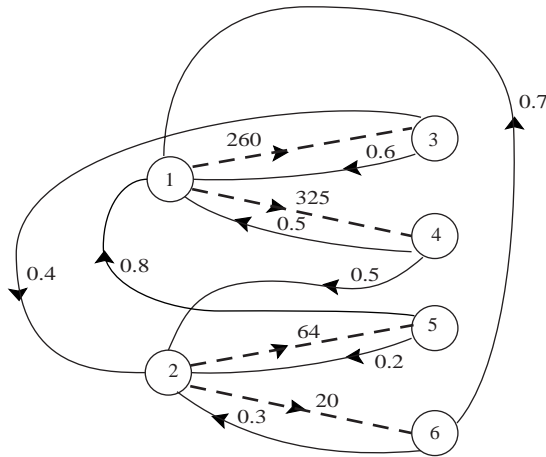


FIGURA 4. Una cadena de Markov controlada.

$$\begin{aligned} V_1^n &= \max \left\{ 0.6V_1^{n+1} + 0.4V_2^{n+1} + 260, 0.5V_1^{n+1} + 0.5V_2^{n+1} + 325 \right\}, \\ V_2^n &= \max \left\{ 0.8V_1^{n+1} + 0.2V_2^{n+1} + 64, 0.7V_1^{n+1} + 0.3V_2^{n+1} + 20 \right\}, \end{aligned}$$

la cual puede escribirse de manera compacta como :

$$V^n = D \otimes (H V^{n+1}),$$

donde :

$$D = \begin{bmatrix} 260 & 325 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 64 & 20 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

5. PROBLEMA DE CONTROL ESTOCÁSTICO ACTUALIZADO.

Consideraremos en esta sección el problema de control óptimo de una cadena de Markov con horizonte infinito, con un costo actualizado, y en el caso donde la observación es completa. Nosotros daremos el método de *iteración sobre las políticas* o (*algoritmo de Howard*) para resolver la ecuación de la programación dinámica. Tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 5.1. Si $c^u \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces definiendo $A^u = M^u - I_d$ resulta que la única solución V de :

$$\min_{u \in \mathcal{F}} \{ [(A^u - I) V]_x + c_x^u \} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

es el costo óptimo

$$V_x = \min_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \lambda)^{n+1}} c_{X^n}^{U^n} \mid X^0 = x \right\}.$$

Además

$$s : x \in \mathcal{E} \mapsto u^* \in \arg \min_{u \in \mathcal{F}} \{ (A^u V)_x + c_x^u \},$$

define una estrategia óptima en el conjunto \mathcal{S} .

DEMOSTRACIÓN. ITERACIÓN SOBRE LAS POLÍTICAS O ALGORITMO DE HOWARD. El algoritmo de Howard está compuesto por las siguientes etapas :

1. A una estrategia s^n asociamos la solución V^n de :

$$(A^{s^n} - \lambda) V^n + c^{s^n} = 0.$$

2. A un costo V^n asociamos una nueva estrategia $s^{n+1} : x \in \mathcal{E} \rightarrow u^{n+1}$ donde :

$$u^{n+1} \in \arg \min_{u \in \mathcal{F}} \{ [(A^u - \lambda) V^n]_x + c_x^u \}.$$

Construimos entonces mediante este método de iteración sobre las políticas dos sucesiones $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(s^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mostraremos que V^n es una sucesión decreciente y positiva que admite un límite que es solución de la ecuación de la programación dinámica. Para lo que resta de la demostración tomaremos $A^n = A^{s^n}$ y $c^n = c^{s^n}$.

1. LA SUCESIÓN V^n ES POSITIVA por su interpretación estocástica :

$$V_x^n = \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \lambda)^{n+1}} c_{X^n}^{s^n} \mid X^0 = x \right\}.$$

2. LA SUCESIÓN V^n ES DECRECIENTE. Tenemos que

$$A^n V^n + c^n = 0.$$

Por la diferencia entre dos ecuaciones sucesivas obtenemos :

$$A^n V^n - A^{n+1} V^{n+1} + c^n - c^{n+1} = 0,$$

$$A^{n+1} (V^n - V^{n+1}) + (A^n - A^{n+1}) V^n + c^n - c^{n+1} = 0,$$

y luego por la etapa dos del algoritmo tenemos

$$A^{n+1} (V^n - V^{n+1}) \leq 0.$$

Por ultimo utilizando el mismo argumento que aquel que nos permitió demostrar la positividad de V^n resulta

$$V^n - V^{n+1} \geq 0 \implies V^n \geq V^{n+1}.$$

Por lo tanto $V^n \downarrow V^*$ y siendo el número de políticas finito el algoritmo se detiene después de un número finito de etapas.

3. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN. Supongamos que V^1 y V^2 son dos soluciones. Entonces como

$$A^1 V^1 + c^1 = 0, \text{ y } A^2 V^2 + c^2 = 0,$$

resulta

$$A^2 (V^1 - V^2) + (A^2 - A^1) V^1 + c^1 - c^2 = 0,$$

con lo cual

$$V^1 - V^2 \leq 0,$$

por la interpretación probabilística de la solución de la ecuación: $A^2 v + d = 0$ con $d \leq 0$. Análogamente se demuestra que $V^2 - V^1 \leq 0$ y entonces $V^1 = V^2$.

□

6. CONTROL CON INFORMACIÓN INCOMPLETA.

Estudiaremos aquí el problema de control óptimo de una cadena de Markov en el caso donde no observamos directamente el estado sino solamente una función del estado con valores en un conjunto finito. Comenzamos dando la ecuación del filtro óptimo, es decir, la ecuación que nos provee la evolución de la ley condicional del estado conociendo las observaciones pasadas. Luego daremos la ecuación de la programación dinámica para el problema con información incompleta. El estado considerado para resolver este problema de optimización no es más el estado del sistema sino la ley condicional del estado conociendo las observaciones pasadas.

6.1. FILTRO.

Consideremos la cadena de Markov observada $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, M^y, p^0)$ donde :

1. $\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{G}$ tienen el mismo significado que anteriormente;
2. p^0 es la ley inicial sobre $\mathcal{E} \times \mathcal{G}$;
3. $M_{xx'}^y$ representa la probabilidad de pasar del estado x al estado x' y de observar y .

La probabilidad de una trayectoria está entonces dada por :

$$\mathbb{P}[(x^0, y^0), (x^1, y^1), \dots, (x^n, y^n)] = p_{x^0}^{0y^0} \prod_{i=0}^{n-1} M_{x^i x^{i+1}}^{y^{i+1}}.$$

Calcularemos ahora la ley condicional :

$$q_x^n = \mathbb{P}(X^n = x \mid Y^0 = y^0, \dots, Y^n = y^n),$$

para la cual tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. Si $q_x^n = \mathbb{P}(X^n = x \mid Y^0 = y^0, \dots, Y^n = y^n)$ entonces :

$$q_x^n = \frac{r^n}{r^n \cdot \mathbf{1}}, \text{ donde } r^{n+1} = r^n M^{y^{n+1}}, r^0 = p^0.$$

DEMOSTRACIÓN. La ley marginal de (y^0, \dots, y^n, x^n) es :

$$\sum_{x_i} \left[p_{x^0}^{0y^0} \prod_{i=0}^{n-1} M_{x^i x^{i+1}}^{y^{i+1}} \right] = \left[p^0 \prod_{i=1}^n M^{y^i} \right]_{x^n}.$$

La ley de q^n se obtiene normalizando la fórmula anterior de manera de obtener una ley de probabilidad en x , es decir dividiendo por :

$$p^0 \prod_{i=1}^n M^{y^i} \mathbf{1}.$$

□

6.2. CONTROL CON OBSERVACIÓN INCOMPLETA.

Consideremos ahora el caso general de una cadena de Markov controlada con observación incompleta $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, M^{uy}, p^0, c^{uy})$. Deseamos resolver el problema :

$$\min_u \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^N c_{X^n}^{U^n Y^n} \right],$$

lo cual puede escribirse como (el control sólo depende de las observaciones pasadas) :

$$\min_u \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^N \mathbb{E}^{q^n} \left(c_{X^n}^{U^n Y^n} \right) \right] = \min_u \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^N q^n c^{U^n Y^n} \right]. \quad (6.1)$$

En (6.1) no aparece más x y solo aparece q lo cual es un problema de control de filtro óptimo. Se puede demostrar que su ecuación de programación dinámica es la siguiente :

$$v^n(q) = \min_{u \in \mathcal{F}} \sum_{y \in \mathcal{G}} \left\{ v^{n+1} \left(\frac{q M^{uy}}{q M^{uy} \mathbf{1}} \right) q M^{uy} \mathbf{1} + q c^{uy} \right\}.$$

7. NOTAS.

Las cadenas de Bellman son una presentación reciente [3, 4] del “principio de la programación” dinámica de Bellman [9]. Las mismas ideas se encuentran en [63, 30, 56, 11, 29].

Una exposición bastante completa de la teoría espectral max-plus se presenta en [7] capítulo 3 sección 7, donde pueden encontrarse las pruebas que faltan en esta sección. Un trabajo de interés histórico es [66]. En [40] pueden encontrarse los últimos resultados de una teoría que generaliza el control estocástico, inspirada en el álgebra max-plus : la teoría de funciones monótonas homogéneas.

El repaso de las cadenas de Markov está inspirando en [61]. Los grandes clásicos sobre las cadenas de Markov son [50, 73]. Las matrices estocásticas están estudiadas completamente en [36]. Dos referencias antiguas sobre las cadenas de Markov son [53, 35].

La parte sobre el control estocástico con observación completa es clásica y haremos referencia, por ejemplo, a sus fundadores [9, 46] o a los clásicos [28, 67, 74]. La ecuación de la programación dinámica con observación incompleta es conocida ; pero sin muchas referencias.

CAPÍTULO 4

Redes.

1. REDES DE COLAS DE ESPERA.

El cálculo de la medida invariante de cadenas de Markov provenientes de problemas reales está fuera de alcance para las computadoras. Las redes de colas de espera de Jackson tienen una medida invariante calculable gracias a una propiedad de separación de las variables de la ecuación de Kolmogorov. Consideremos un

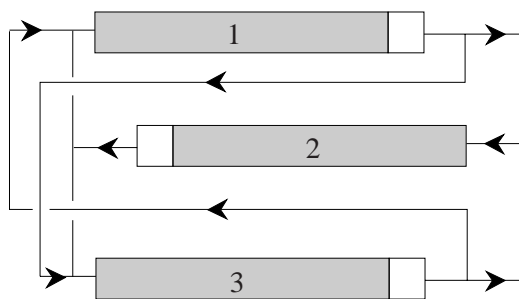


FIGURA 1. Un conjunto de 3 colas de espera.

conjunto de m colas de espera. A cada cola de espera i le corresponde el estado x_i que es el número de clientes que esperan en dicha cola. Representaremos con \mathcal{E}_i al espacio de estados correspondiente. El espacio de estados del sistema completo será entonces

$$S_m^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{E}_i : \sum_{i=1}^m x_i = n \right\},$$

donde n es el número total de clientes en el sistema el cual es constante pues supondremos que el sistema es cerrado (es decir que los clientes no abandonan el sistema). Para definir la matriz de transición de la cadena de Markov introducimos:

1. $u_i : x \in S_m^n \mapsto u_i(x_i) \in \mathbb{R}^+, i \in \{1, \dots, m\}$, donde $u_i(0) = 0, u_i(x_i) > 0$ si $x_i \neq 0$ y $\sum_{i=1}^m u_i(x_i) \leq 1$, es la probabilidad de que un cliente salga de la cola i si el estado de la red es x ;
2. r es una matriz estocástica $m \times m$; r_{ij} representa la probabilidad de que un cliente que sale de la cola i se dirija a la cola j y $u_i(x_i) r_{ij}$ es la probabilidad de que un cliente salga de la cola i y se dirija a la cola j si el estado de la red es x ;
3. $T_{ij} : x \in S_m^n \mapsto (x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_j + 1, \dots, x_m) \in S_m^n$.

La matriz de transición $M : S_m^n \times S_m^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ de la cadena de Markov está entonces definida por :

$$M_{xx'} = \begin{cases} u_i(x_i) r_{ij} & \text{si } \exists i, j : x' = T_{ij}(x) , \\ 0 & \text{si no .} \end{cases}$$

El teorema siguiente puede demostrarse.

TEOREMA 1.1. *Existe un único p tal que $p = pM$.*

Deseamos resolver los siguientes tres problemas.

1. Calcular p .
2. Calcular la ley de probabilidad del número de clientes en la cola i .
3. Calcular la tasa de utilización del servidor i .

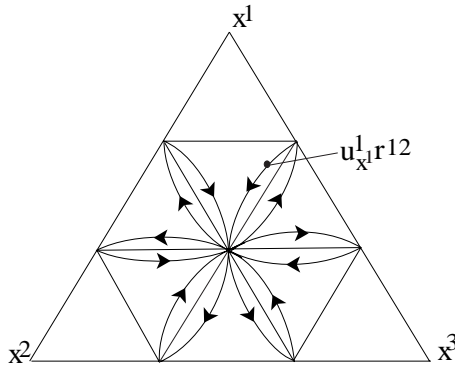


FIGURA 2. Espacio de estados.

Notemos que el número de estados S_m^n está dado por :

$$\frac{(n + 1) (n + 2) \cdots (n + m - 1)}{(m - 1)!} .$$

TEOREMA 1.2. *La medida invariante del sistema de colas de espera se factoriza como*

$$p(x) = \frac{1}{K(n, m)} q(x), \quad q(x) \triangleq \prod_{i=1}^m q_i(x_i), \quad q_i(x_i) \triangleq \prod_{l=1}^{x_i} \frac{e_i}{u_i(l)}, \quad (1.1)$$

donde :

1. $e \in \mathbb{R}^m$ es la única medida invariante de r , que entonces verifica $e = er$, $e\mathbf{1} = \mathbf{1}$;
2. $K(n, m) = \sum_{x \in S_m^n} q(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Como

$$p = pM \Leftrightarrow \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} p(T_{ij}(x)) u_j(x_j + 1) r_{ji} = p(x) \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} u_i(x_i) r_{ij}, \quad (1.2)$$

resulta que es suficiente verificar (1.2) reemplazando $p(x)$ por (1.1) :

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} e_j r_{ji} \frac{u_i(x_i)}{e_i} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} u_i(x_i) r_{ij} \Leftrightarrow \sum_i u_i(x_i) \left[\sum_{i \neq j} \frac{e_j r_{ji}}{e_i} - \sum_{i \neq j} r_{ij} \right] = 0 .$$

lo que es cierto pues $e = er$. □

Para el cálculo de $K(n, m)$ definamos $\hat{q}_i(z) \triangleq \sum_{i=0}^{+\infty} q_i(i) z^i$. Entonces $K(n, m)$ es el coeficiente de z^n en $\prod_{i=1}^m \hat{q}_i(z)$, $K(n, m)$ puede calcularse con la recurrencia siguiente :

$$\begin{cases} K(n, m) = \sum_{l=0}^n K(l, m-1) q_m(n-l) , \\ K(n, 0) = \delta(n) . \end{cases}$$

Por último se puede mostrar que la ley del número de clientes ($p_i(x_i)$) en la fila i es :

$$p_i(x_i) = q_i(x_i) \frac{K_i(n-x_i, m-1)}{K(n, m)} ,$$

donde K_i es la red sin la fila i .

2. REDES DE TRANSPORTE.

El cálculo de la función valor de una cadena de Bellman proveniente de un problema real está fuera de alcance para las computadoras. Las redes de transporte tienen una función valor que se calcula resolviendo un problema de flujo. Ellas corresponden a las redes de Jackson del cálculo de probabilidades.

2.1. MODELO DE UNA RED DE TRANSPORTE.

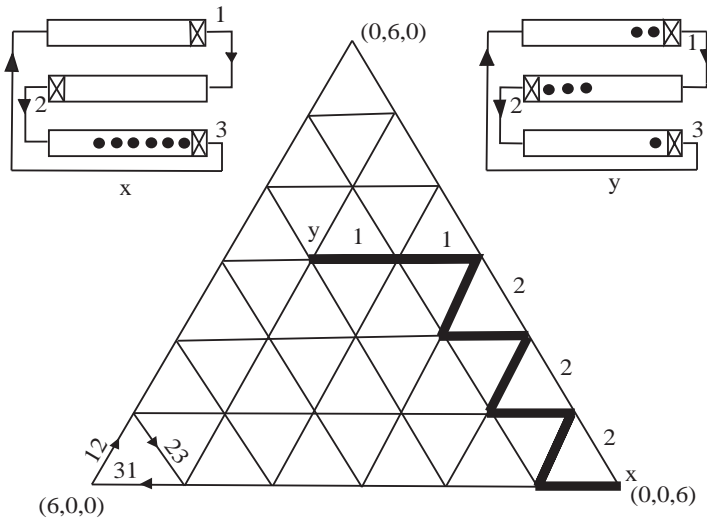


FIGURA 3. Una red de transporte.

Una red de transporte (compañía de alquiler de autos) está compuesta por :

1. m estacionamientos, n autos, el espacio de estados S_m^n , la frontera del espacio de estados $\partial S_m^n \triangleq \bigcup_{i=1}^m \partial^i S_m^n$ donde $\partial^i S_m^n \triangleq \{x \in S_m^n : x_i = 0\}$;

2. r es en este caso la matriz $m \times m$ de los costos de transporte, es decir que r_{ij} es el costo de transportar un auto del estacionamiento i al estacionamiento j ; por lo tanto se verifica $r_{ij} > 0$ si $i \neq j$ y $r_{ii} = 0$. Definiremos la matriz de costos de transición sobre el espacio de estados como

$$\forall x, x' \in S_m^n, M_{xx'} \triangleq \begin{cases} r_{ij} & \text{si } x' = T_{ij}(x), \\ \epsilon \triangleq +\infty & \text{si no;} \end{cases}$$

3. $\gamma_{ij} \triangleq T_{ij}(x) - x = (0, \dots, 0, \overset{i}{-1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$, tales que $r_{ij} \neq \epsilon$ son entonces los desplazamientos admisibles.

El problema consiste entonces en calcular el control óptimo que permite pasar del estado x al estado x' en un número cualquiera de etapas. Debemos calcular entonces M^* . No existe unicidad de costos invariantes ya que todas las líneas de M^* lo son como lo indica la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.1. $M_{x'}^* M = M_{x'}^*$, $\forall x \in S_m^n$.

DEMOSTRACIÓN. Como todos los circuitos críticos son los bucles y hay un bucle que pasa por cada estado ($r_{ij} > 0$ si $i \neq j$ y $r_{ii} = 0$) resulta que $M_{xx}^* = 0$. \square

EJEMPLO 2.2. Consideremos el caso $m = 2$ y $n = 3$. Entonces tenemos que :

$$M = \begin{bmatrix} e & b & \epsilon \\ a & e & b \\ \epsilon & a & e \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} e & b & b^2 \\ a & e & b \\ a^2 & a & e \end{bmatrix},$$

donde $r_{12} = b$ y $r_{21} = a$. Por lo tanto $M^* = E \oplus M \oplus M^2 = M^2$. Las líneas (e, b, b^2) , (a, e, b) y (a^2, a, e) son los vectores propios no redundantes de M .

Veamos ahora como el problema de las geodésicas en S_m^n se reduce a un problema de flujo. Sea $\pi_{xx'}^l$ un camino de longitud l que va de x hacia x' . Entonces

$$x' = x + \sum_{i,j} n_{ij} \gamma_{ij},$$

donde n_{ij} es el número de veces que el desplazamiento γ_{ij} es utilizado en $\pi_{xx'}^l$. Por lo tanto el costo del camino $\pi_{xx'}^l$ es $\sum_{i,j} n_{ij} r_{ij}$. Entonces

$$M_{xx'}^* = \inf_{\substack{n \geq 0 \\ \mathcal{J}n = x' - x}} n \cdot r^*,$$

donde \mathcal{J} es la matriz de incidencia del grafo completo con m nodos, es decir $\mathcal{J} = \{\gamma_{ij}^t\}$.

Como consecuencia tenemos las formas producto min-plus :

$$M_{xx'}^* = \begin{cases} \bigotimes_{l \neq k} (r_{kl}^*)^{x'_l} & \text{si } x_k = n, \\ \bigotimes_{k \neq l} (r_{kl}^*)^{x_k} & \text{si } x'_l = n. \end{cases}$$

EJEMPLO 2.3. Consideremos el sistema de transporte con 3 estacionamientos y 6 autos y con costos de transportes dados por :

$$r = \begin{bmatrix} e & 1 & e \\ \varepsilon & e & 1 \\ 1 & \varepsilon & e \end{bmatrix} .$$

Entonces tenemos :

$$r^* = \begin{bmatrix} e & 1 & 2 \\ 2 & e & 1 \\ 1 & 2 & e \end{bmatrix} .$$

Supongamos que $x = (0, 0, 6)$ y que $y = (2, 3, 1)$. Resulta entonces :

$$M_{xy}^* = (r_{31}^*)^2 (r_{32}^*)^3 = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8.$$

3. CONTROL ÓPTIMO DE REDES ESTOCÁSTICAS.

El cálculo de la función valor de un problema de control de una red está fuera del alcance de las computadoras. La forma producto puede ser utilizada para optimizar las redes de colas de espera sobre la clase de los “feedbacks” locales. Las estrategias optimales de las redes de transporte permiten controlar el soporte de la ley de probabilidad cuando tienen lugar los desplazamientos aleatorios.

3.1. REDES ABIERTAS Y CONTROLADAS DE COLAS DE ESPERA.

Esta nueva situación puede ser vista como un caso particular de la situación anterior en la cual :

1. existe una cola de espera de índice 0 que representa el exterior ;
2. el número total de clientes del sistema es $+\infty$;
3. la tasa de salida de la fila exterior es independiente del número de clientes en dicha fila.

Supongamos además que :

1. r es la matriz de los caminos internos ;
2. λ_i es la probabilidad de una entrada en la fila i durante un período de tiempo ;
3. e es la solución de : $er + \lambda = e$;
4. la cadena que representa el interior (la que es bien markoviana) es ergódica ;

entonces la ley de probabilidad del sistema puede escribirse como :

$$p(x) = \prod_{i=1}^m c_i q_i^u(x_i), \text{ donde } q_i^u(x_i) \triangleq \prod_{l=1}^{x_i} \frac{e_i}{u_i(l)}, \quad c_i \triangleq \frac{1}{\sum_{x_i=0}^{\infty} q_i^u(x_i)} .$$

Esta ecuación nos dice que nuestro sistema es equivalente a m colas de espera independientes con una tasa de entrada e_i y una tasa de salida $u_i(x_i)$.

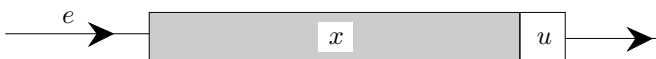


FIGURA 4. Cola de espera equivalente

3.2. OPTIMIZACIÓN SOBRE LA CLASE DE LOS “FEEDBACKS” LOCALES.

Consideremos ahora el problema :

$$\min_{\substack{i=1, \dots, m \\ u_i: x_i \mapsto u_i(x_i)}} J(u) \triangleq \sum_x \prod_{i=1}^m q_i^u(x_i) \phi \left[\sum_i c_i(x_i, u_i(x_i)) \right].$$

DEFINICIÓN 3.1. Un *punto de Nash* para $J(u)$ es un punto u^* que verifica :

$$J(u_1^*, \dots, u_m^*) \leq J(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

El siguiente sistema nos provee de una caracterización para que w sea el costo asociado a una estrategia de Nash óptima :

$$i = 1, \dots, m \quad \begin{cases} q_i^u A_i^u = 0, & \sum_{x_i} q_i^u(x_i) = 1, \\ \min_u [A_i^u v_i + \phi_i(u_i)]_y = w_i, & \forall y, \end{cases}$$

donde :

$$A_i^u v = e_i v_{x+1} + u_i(x) v_{x-1} - (e_i + u_i(x)) v_x,$$

$$\phi_i(y, u) = \sum_x \prod_{j \neq i} q_j^u(x_j) \phi \left[c_i(y, u) + \sum_{j \neq i} c_j(x_j, u_j(x_j)) \right].$$

4. RESIDUACIÓN.

La ecuación $f(x) = b$ no siempre tiene solución. Nosotros estudiaremos aquí los casos en los que el conjunto $\{x : f(x) \leq b\}$ admite un elemento maximal el cual será representado por $f^\sharp(b)$. En dicho caso f^\sharp será el residuo de f . Las aplicaciones max-plus lineales son residuables.

En un dioide \mathcal{D} la operación \oplus induce una relación de orden definida por :

$$a \geq b \iff a = a \oplus b, \quad \forall a, b \in \mathcal{D}.$$

DEFINICIÓN 4.1. Un dioide se dice *completo* si es cerrado con respecto a sumas infinitas y si la propiedad distributiva de la operación \otimes se extiende a las sumas infinitas, es decir :

$$a \otimes \left[\bigoplus_{i \in I} b_i \right] = \bigoplus_{i \in I} (a \otimes b_i).$$

EJEMPLO 4.2. \mathbb{R}_{\max} no es un dioide completo pero $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R}_{\max} \cup \{+\infty\}$ si lo es.

El siguiente teorema puede demostrarse.

TEOREMA 4.3. *Un dioide completo es un lattice completo (es decir un conjunto ordenado donde todo subconjunto admite una cota superior y una cota inferior).*

Si \mathcal{D} es un dioide completo entonces representaremos con $a \wedge b$ a la cota inferior del conjunto $\{a, b\}$ y con \top al elemento maximal de \mathcal{D} el cual verifica :

$$\varepsilon \otimes \top = \varepsilon, \quad \top \oplus a = \top, \quad \forall a \in \mathcal{D}.$$

DEFINICIÓN 4.4. Sean \mathcal{D}, \mathcal{C} dos dioides completos y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Entonces se define :

1. f es monótona si :

$$a \geq b \implies f(a) \geq f(b) ;$$

2. f es semi-continua inferior (s.c.i.) si :

$$f \left[\bigoplus_{x \in X} x \right] = \bigoplus_{x \in X} f(x) ;$$

3. f es residuable si $X = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq y\}$ admite un elemento maximal representado por $f^\sharp(y)$ para todo $y \in \mathcal{C}$. La función f^\sharp recibe el nombre de residuo de f .

De aquí en adelante también supondremos que $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Entonces tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. *Sea f una función monótona del dioide completo \mathcal{D} en el dioide completo \mathcal{C} . Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1. f es semi-continua inferior (s.c.i.).
2. f es residuable.
3. Existe $f^\sharp : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que :

$$\begin{aligned} f \circ f^\sharp &\leq I_{\mathcal{C}} , \\ f^\sharp \circ f &\geq I_{\mathcal{D}} . \end{aligned}$$

La residuación tiene las propiedades indicadas en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.6. *Sean $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ funciones residuales. Entonces :*

1. $f \circ f^\sharp \circ f = f$;
2. $f^\sharp \circ f \circ f^\sharp = f^\sharp$;
3. f es inyectiva $\iff f^\sharp \circ f = I_{\mathcal{D}} \iff f^\sharp$ es sobreyectiva ;
4. f es sobreyectiva $\iff f \circ f^\sharp = I_{\mathcal{C}} \iff f^\sharp$ es inyectiva ;
5. $(h \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ h^\sharp$;
6. $f \leq g \iff g^\sharp \leq f^\sharp$;
7. $(f \oplus g)^\sharp = f^\sharp \wedge g^\sharp$.
8. $(f \wedge g)^\sharp \geq f^\sharp \oplus g^\sharp$.

Análogamente se pueden definir las funciones dualmente residuales como aquellas para las cuales el conjunto $X = \{x : f(x) \geq y\}$ admite un elemento minimal para todo $y \in \mathcal{C}$. Una función f se dice que es semicontinua superior (s.c.s.) si verifica :

$$f \left[\bigwedge_{x \in X} x \right] = \bigwedge_{x \in X} f(x) .$$

Entonces tenemos el teorema siguiente que es el dual del caso de las funciones residuales.

TEOREMA 4.7. *Sea f una función monótona del dioide completo \mathcal{D} en el dioide completo \mathcal{C} con $f(\top) = \top$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

1. f es semi-continua superior (s.c.s.).
2. f es dualmente residuable.

3. Existe $f^b : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que :

$$\begin{aligned} f \circ f^b &\geq I_{\mathcal{C}} , \\ f^b \circ f &\leq I_{\mathcal{D}} . \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.8. 1. Consideremos la función $f : x \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^2 \mapsto x \wedge y \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Entonces f es monótona pero no es residuable porque no es semi-continua inferior ya que :

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) &= (x_1 \oplus x_2) \wedge (y_1 \oplus y_2) \\ &= (x_1 \wedge y_1) \oplus (x_1 \wedge y_2) \oplus (x_2 \wedge y_1) \oplus (x_2 \wedge y_2) \\ &\geq (x_1 \wedge y_1) \oplus (x_2 \wedge y_2) \\ &= f(x_1, y_1) \oplus f(x_2, y_2) , \end{aligned}$$

y tomando por ejemplo $(x_1, y_1) = (4, 1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 4)$ resulta :

$$f((4, 1) \oplus (1, 4)) = 4 > 1 = f(4, 1) \oplus f(1, 4) .$$

El conjunto $\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^2 : x \wedge y \leq 1\}$ se presenta en el primer gráfico de la figura 5, el cual claramente no tiene elemento maximal.

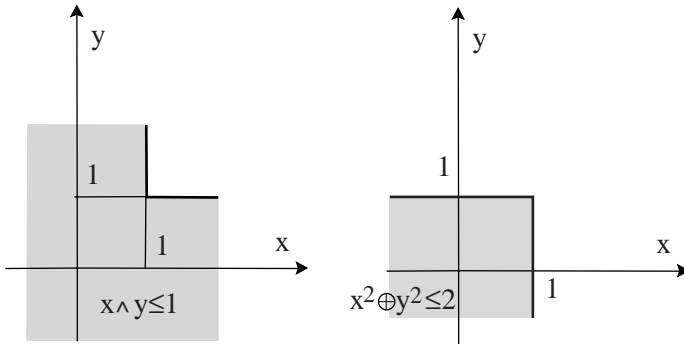


FIGURA 5. Función no residuable y residuable.

2. Sea $f : x \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^2 \mapsto x^2 \oplus y^2 \triangleq \max(2x, 2y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Entonces f es residuable puesto que :

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) &= (x_1 \oplus x_2)^2 \oplus (y_1 \oplus y_2)^2 \\ &= x_1^2 \oplus x_2^2 \oplus y_1^2 \oplus y_2^2 \\ &= f(x_1, y_1) \oplus f(x_2, y_2) . \end{aligned}$$

El conjunto $\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^2 : x^2 \oplus y^2 \leq 1\}$ que se representa en el segundo gráfico de la figura 5, el cual tiene el elemento maximal $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Consideremos ahora la función $x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}_{\max}^n$, la cual es residuable. Al elemento maximal del conjunto $\{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Ax \leq b\}$ lo representaremos con $A \setminus b$. Tenemos que :

$$\begin{aligned} Ax \leq b &\Leftrightarrow \bigoplus_j A_{ij} x_j \leq b_i, \forall j, \\ &\Leftrightarrow A_{ij} x_j \leq b_i, \forall i, j, \\ &\Leftrightarrow x_j \leq b_i / A_{ij}, \forall i, j, \\ &\Leftrightarrow x_j \leq \bigwedge_i b_i / A_{ij}, \forall j. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \setminus b = (-A^t) b$ donde el producto es en el sentido min-plus.

4. Consideremos la función $x \in \mathbb{R}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket \mapsto ax \in \mathbb{R}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$ donde $\mathbb{R}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$ es el conjunto de las series de potencias en γ con coeficientes en \mathbb{R}_{\max} . Sea $a \setminus b$ el elemento maximal del conjunto $\{x \in \mathbb{R}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket \mid ax \leq b\}$. Entonces como :

$$ax \leq b \Leftrightarrow \bigoplus_{0 \leq j < i} a_{i-j} x_j \leq b_i, \forall i \Leftrightarrow x_j \leq \bigwedge_{i \geq j} b_i / a_{i-j}, \forall j,$$

resulta que :

$$(a \setminus b)_j = \bigwedge_{i \geq j} b_i / a_{i-j}, \forall j.$$

5. PROYECCIÓN.

En el álgebra habitual la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\ker(C)$ (cuando $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es inyectiva, $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es sobreyectiva y CB es inversible) está dada por :

$$P = B(CB)^{-1}C.$$

Haremos aquí una construcción análoga sobre \mathbb{R}_{\max}^n .

TEOREMA 5.1. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ tres conjuntos. Entonces :

1. $\forall C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sobreyectiva existe C^\sharp tal que :

$$C \circ C^\sharp = I_{\mathcal{Y}}; \quad (5.1)$$

2. $\forall B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ inyectiva existe B^\sharp tal que :

$$B^\sharp \circ B = I_{\mathcal{U}}. \quad (5.2)$$

Cuando $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son espacios vectoriales y B y C son lineales entonces se pueden encontrar B^\sharp y C^\sharp que también sean lineales. Si $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son módulos esta última afirmación no siempre es verdad.

EJEMPLO 5.2. 1. Sea $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con $B(x) = 2x$. Supongamos que existe B^\sharp lineal. Entonces como $B^\sharp(2x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ resulta $B^\sharp(1) = \frac{1}{2}$, lo cual es un absurdo.

2. Sea $\mathbb{Q}_p = \left\{ x \mid \exists k, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{p^n} \right\}$ donde p es un número primo y definamos

$$C : x \in \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} \mapsto px \in \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z} \quad .$$

Si existiese C^\sharp lineal entonces se tendría que :

$$\frac{1}{p} = pC^\sharp \left(\frac{1}{p} \right) = C^\sharp (1) = C^\sharp (0) = 0 ,$$

lo cual es un absurdo.

Los módulos \mathcal{Y} para los cuales (5.1) se cumple con C^\sharp lineal se llaman *proyectivos* y, los módulos \mathcal{U} para los cuales (5.2) se cumple con B^\sharp lineal se llaman *inyectivos*.

Un módulo se dice *libre* cuando tiene una base, es decir, una familia generadora independiente. Los módulos libres son proyectivos.

Para las funciones max-plus lineales (las cuales son residuales) C^\sharp y B^\sharp en 5.1 y 5.2 respectivamente son las funciones residuo de C y B que entonces son min-plus lineales y por lo tanto no son max-plus lineales.

Si \mathcal{X} e \mathcal{Y} son semi-módulos con \mathcal{Y} libre entonces 5.1 se verifica con C^\sharp lineal.

Si \mathcal{U} y \mathcal{X} son \mathbb{R}_{\max} -semi-módulos con \mathcal{U} libre entonces 5.2 se verifica con B^\sharp lineal.

EJEMPLO 5.3. 1. Los submódulos libres de \mathbb{R}_{\max}^n son raros. Por ejemplo $\text{Im}(B)$ donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{bmatrix} ,$$

no es libre pues en su "frontera" no existe unicidad de descomposición como por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} \oplus (-1) \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix} .$$

2. Si una aplicación lineal $A : \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^m$ con $n \geq m$ es sobreyectiva entonces la matriz A contiene una submatriz que es una permutación de una matriz cuadrada diagonal inversible.

Como las condiciones de sobreyectividad y de inyectividad son muy restrictivas podemos utilizar la siguiente generalización del teorema anterior.

TEOREMA 5.4. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ cuatro conjuntos. Entonces :

1. $\forall C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \tilde{C} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{Y}$ con $\text{Im}(C) \subset \text{Im}(\tilde{C}), \exists M : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}} :$

$$\tilde{C} \circ M = C ;$$

2. $\forall B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, \tilde{B} : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ con $\ker(\tilde{B}) \subset \ker(B), \exists N : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X} :$

$$N \circ \tilde{B} = B ;$$

3. Si $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ son \mathbb{R}_{\max} -semi-módulos libres y $B, \tilde{B}, C, \tilde{C}$ son lineales entonces este resultado es verdadero con M y N lineales.

Los siguientes teoremas nos proveen de condiciones para la existencia de la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\ker(C)$.

TEOREMA 5.5. Sean $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ aplicaciones lineales. Supongamos que se verifica una de las dos afirmaciones siguientes (las cuales son equivalentes) :

1. $\text{Im}(CB) = \text{Im}(C), \ker(CB) = \ker(B) ;$

2. $\text{Card}(C^{-1}C(x) \cap \text{Im}(B)) = 1 ;$

entonces existe $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ lineal que verifica :

$$PB = B, CP = C, P^2 = P = B/CB \setminus C .$$

P es la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\text{ker}(C)$. Se dice que $\mathcal{X} = \text{Im}(B) \oplus \text{ker}(C)$.

TEOREMA 5.6. Tenemos que :

1. Dada $B, \exists C : \text{Card}(C^{-1}C(x) \cap \text{Im}(B)) = 1 \Leftrightarrow B = B(B \setminus B/B)B$;
2. Dada $C, \exists B : \text{Card}(C^{-1}C(x) \cap \text{Im}(B)) = 1 \Leftrightarrow C = C(C \setminus C/C)C$.

EJEMPLO 5.7. 1. Tomemos $\mathcal{U} = \mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}_{\max}^2$. Definamos $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ por la siguiente matriz :

$$B = C = \begin{bmatrix} e & -1 \\ -1 & e \end{bmatrix} .$$

Entonces como $B^2 = B$ tenemos :

$$P = B = C = B \setminus B^2/B = B \setminus B/B = B \setminus B .$$

En la figura 6 (Ejemplo 1) se representan $\text{Im}(B)$ y $\text{ker}(C)$.

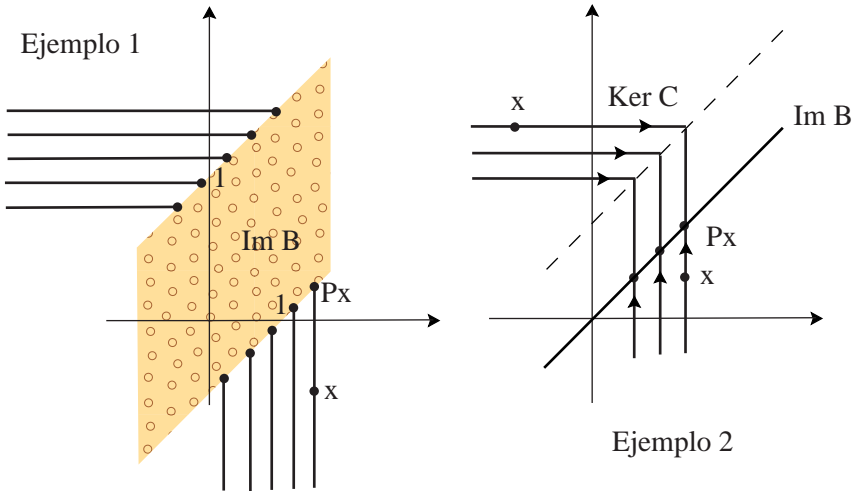


FIGURA 6. Proyección.

2. Tomemos $\mathcal{X} = \mathbb{R}_{\max}^2, \mathcal{U} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}_{\max}$. Definamos $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ por las siguientes matrices :

$$B = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix}, \quad C = [e \quad -1] .$$

Entonces $\text{Im}(B)$, $\text{ker}(C)$ y la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\text{ker}(C)$ están representadas en la figura 6 (Ejemplo 2).

6. AGREGACIÓN.

Mostraremos ahora como se puede reducir la dimensión de un sistema dinámico lineal.

Sean $\mathcal{U} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}^m, \mathcal{X} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}^n, \mathcal{Y} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}^p$, y sean $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dos funciones lineales.

DEFINICIÓN 6.1. Se dice que $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es agregable por C si existe A_C tal que :

$$CA = A_C C.$$

Supongamos que A es agregable por C y que $X_{n+1} = AX_n$. Entonces si definimos $Y_n \triangleq CX_n$ resulta que Y_n verifica :

$$Y_{n+1} = A_C Y_n .$$

PROPOSICIÓN 6.2. Si C es regular ($C = C(C \setminus C/C)C$), entonces A es agregable por C si y sólo si para toda B y P tal que P es la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\ker(C)$ se verifica :

$$PA = PAP .$$

DEMOSTRACIÓN. SUFICIENCIA.

$$CA = CPA = CPAP = CAP = CA(B/(CB))C = [CA(B/(CB))]C$$

pues

$$P = B(CB \setminus C) = (B/CB)C .$$

NECESIDAD. Como C es regular sabemos que existe B y P tal que P es la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\ker(C)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} PA &= (B/(CB))CA = (B/(CB))A_C C = (B/(CB))A_C CP \\ &= (B/(CB))CAP = PAP . \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 6.3. Se dice que B es coherente con $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ si existe A_B tal que :

$$AB = BA_B .$$

Supongamos que B es coherente con A y que $X_{n+1} = AX_n$ con $X_0 = BU_0$. Entonces tenemos que $X_n = BU_n$ donde U_n verifica :

$$U_{n+1} = A_B U_n .$$

La siguiente proposición también puede demostrarse.

PROPOSICIÓN 6.4. Si B es regular, entonces B es coherente con A si y sólo si para toda C y P tal que P es la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\ker(C)$ se verifica :

$$AP = PAP .$$

Sea ahora $\mathcal{U} = \{J_1, \dots, J_p\}$ una partición del espacio de estados $F = \{1, \dots, n\}$. Entonces se define la matriz característica U de la partición \mathcal{U} por :

$$U_{iJ} = \begin{cases} e & \text{si } i \in J, \\ \varepsilon & \text{si } i \notin J, \end{cases} \quad \forall i \in F, \forall J \in \mathcal{U} .$$

Si $w \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^n$ es un costo (es decir que $we = e$) entonces se define el costo condicional de w con respecto a \mathcal{U} por :

$$(w^{\mathcal{U}})_{iJ} = \frac{w_j}{\bigoplus_{j \in J} w_j}, \quad \forall j, J.$$

Entonces se verifica que :

$$w^{\mathcal{U}} = WUS^{-1} , \text{ donde } S \triangleq U^t WU, W = \text{diag}(w) .$$

DEFINICIÓN 6.5. Sea A (irreducible) el costo de transición ($eA = e$) de una cadena de Bellman con un único costo invariante. Entonces se dice que A es \mathcal{U} -lumpable si A es agregable con $C = U^t$.

Si A es \mathcal{U} -lumpable entonces $P = BC$, donde $B = w^{\mathcal{U}}$, es la proyección sobre $\text{Im}(B)$ paralela a $\text{ker}(C)$ ya que :

$$CB = U^t WUS^{-1} = SS^{-1} = e .$$

Por último se puede probar que A es lumpable ($A_C = \bar{A} = CAB$) si y sólo si se verifica :

$$\bigoplus_{k \in K} a_{kj} = \bar{a}_{KJ}, \forall j \in J, \forall J, K \in \mathcal{U} .$$

7. NOTAS

La forma producto es clásica en el teoría de colas de espera [49, 51, 8, 23].

El problema de transporte es una introducción a un trabajo en curso [33].

La optimización de una red de colas de espera en una clase de feedback locales fué presentada en [65].

La teoría de la residuación y sus aplicaciones al álgebra max-plus se encuentra en [7] a partir de [14].

La construcción de los proyectores en álgebra max-plus se estudia en [18, 19]. Para el repaso de de la teoría des módulos utilizamos [13].

La exposición sobre la agregación se presenta en [64]. Dicho trabajo adapta al marco max-plus la exposición de [26] válida para el álgebra ordinaria.

CAPÍTULO 5

Sistemas de entrada-salida.

1. REDES DE PETRI.

Recordaremos ahora el funcionamiento de las redes de Petri. Daremos también la modelización de los grafos de eventos mediante “daters”.

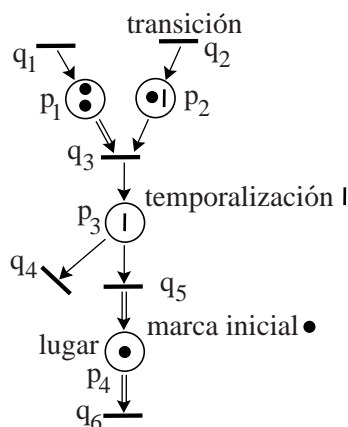


FIGURA 1. Red de Petri.

DEFINICIÓN 1.1. Una *red de Petri temporalizada* $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, M, N, m^0, \tau)$ está compuesta por :

1. \mathcal{P} es un conjunto finito cuyos elementos son llamados *lugares* ;
2. \mathcal{Q} es un conjunto finito cuyos elementos son llamados *transiciones* ;
3. M es una matriz $|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{P}|$ con coeficientes en \mathbb{N} la cual nos provee la *multiplicidad* de los arcos salientes de las transiciones, es decir que M_{qp} es la multiplicidad del arco que va de la transición q al lugar p ;
4. N es una matriz $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{Q}|$ con coeficientes en \mathbb{N} la cual nos provee la multiplicidad de los arcos entrantes a las transiciones, es decir que N_{pq} es la multiplicidad del arco que va del lugar p a la transición q ;
5. $m^0 \in \mathbb{N}^{|\mathcal{P}|}$ es la *marca inicial* (cantidad de marcas que hay en cada lugar en el instante inicial) ;
6. $\tau \in \mathbb{N}^{|\mathcal{P}|}$ es la *temporalización* (tiempo de espera de una marca en un lugar).

Las redes de Petri representan sistemas dinámicos. Una transición puede *encienderse* cuando todos los lugares anteriores a dicha transición contienen al menos tantas marcas como la multiplicidad del arco que los une y estas marcas han estado en dicho lugar más tiempo que el tiempo de espera asociado a dicho lugar. Cuando una transición se enciende se eliminan tantas marcas de los lugares anteriores a dicha transición como la multiplicidad del arco que los une y se agregan tantas

marcas a los lugares posteriores a dicha transición como la multiplicidad del arco que los une.

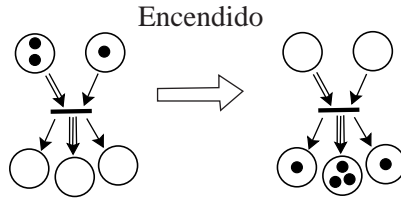


FIGURA 2. Encendido.

Cuando la temporalización es nula y la multiplicidad de todos los arcos es 1 hablaremos de red de Petri. Si la temporalización es no nula hablaremos de red de Petri temporalizada. Los *grafos de eventos* son las redes de Petri en las cuales a todo lugar ingresa y sale un solo arco. Por lo tanto casos como los indicados en la figura siguiente no pueden suceder en los grafos de eventos.

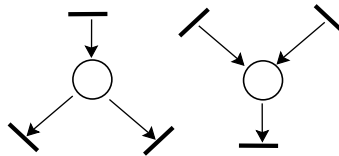


FIGURA 3. Redes de Petri que no son grafos de eventos.

- EJEMPLO 1.2.
1. **SINCRONIZACIÓN.** La tarea representada por la transición t de la siguiente figura solo podrá llevarse a cabo si la pieza p y la máquina m están disponibles.
 2. **AUTORIZACIÓN O PROHIBICIÓN DE ACCESO** en función del estado de ocupación. La tarea t_1 de la figura siguiente sólo podrá llevarse a cabo cuando se termine con la tarea t_2 .

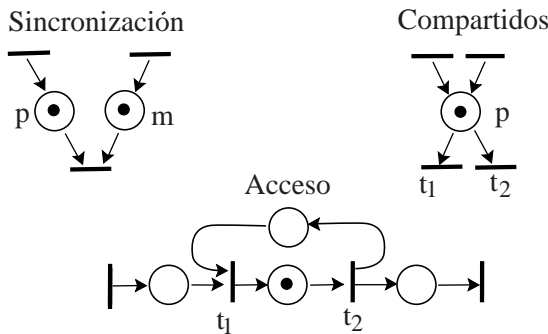


FIGURA 4. Ejemplo de modelización con las redes de Petri.

3. **RECURSOS COMPARTIDOS.** Las tareas t_1 y t_2 comparten el recurso representado por el lugar p .

Consideremos ahora una secuencia de encendidos de transiciones $\sigma : t_1, \dots, t_n$. Entonces la marca de la red de Petri evoluciona de la forma :

$$m^0 \xrightarrow{t_1} m^1 \xrightarrow{t_2} m^2 \dots m^{n-1} \xrightarrow{t_n} m^n = m^\sigma .$$

Definamos el vector $\sigma^\sharp \in \mathbb{N}^{|\mathcal{Q}|}$ por :

$$\sigma_t^\sharp = \text{número de veces que la transición } t \text{ se enciende en } \sigma.$$

Entonces tenemos que :

$$m^\sigma = m^0 + \sigma^\sharp (M - N^t) = m^0 + \sigma^\sharp \mathcal{J},$$

donde $\mathcal{J} \triangleq M - N^t$ (matriz de incidencia transición-lugar).

DEFINICIÓN 1.3. 1. Un *p-semiflujo* es un vector $y \in \mathbb{N}^{|\mathcal{P}|}$ tal que $\mathcal{J}y = 0$.

Entonces como $m^\sigma y = m^0 y$ resulta que el soporte de y nos indica la zona de la red de Petri donde hay conservación de marcas.

2. Un *t-semiflujo* es un vector x^\sharp tal que $x^\sharp \mathcal{J} = 0$. Entonces como $m^x = m^0 + x^\sharp \mathcal{J} = m^0$ resulta que x^\sharp representa una secuencia de encendidos para la cual la marca se conserva.

Consideremos el grafo de eventos temporalizado de la figura siguiente. Las barras en los lugares de dicho grafo representan los tiempos de espera en los lugares correspondientes.

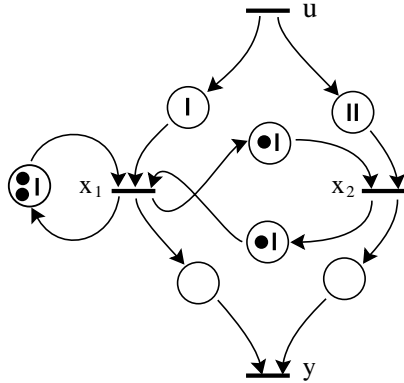


FIGURA 5. Un grafo de eventos temporalizado.

Deseamos estudiar la modelización mediante “daters” de dicho grafo de eventos. Para esto sea u_n el instante en el cual la transición u se enciende por n -ésima vez. Definamos x_n^i , $i = 1, 2$, como el instante en el que la transición x^i se enciende por n -ésima vez. Análogamente definimos y_n . Estas variables asociadas a las transiciones reciben el nombre de “daters”. Si suponemos que una transición se enciende en el instante en que queda habilitada (es decir en el primer instante en el que se dan todas las condiciones para que dicha transición pueda encenderse) entonces las variables anteriores verifican las siguientes ecuaciones de evolución :

$$\begin{cases} x_k^1 = \max(1 + x_{k-2}^1, 1 + x_{k-1}^2, 1 + u_k), \\ x_k^2 = \max(1 + x_{k-1}^1, 2 + u_k), \\ y_k = \max(x_k^1, x_k^2). \end{cases}$$

las cuales pueden escribirse en forma matricial como :

$$\begin{cases} x_k = A_1 \otimes x_{k-1} \oplus A_2 \otimes x_{k-2} \oplus B \otimes u_k, \\ y_k = C \otimes x_k, \end{cases}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [e \quad e] .$$

Extendiendo el vector de estado el sistema anterior puede llevarse a su forma normal equivalente :

$$\begin{cases} X_k = AX_{k-1} \oplus BU_k , \\ Y_k = CX_k . \end{cases}$$

2. GRAFOS DE EVENTOS TEMPORALIZADOS.

Daremos ahora la modelización mediante “counters” y la modelización 2D (2-dimensional) de los grafos de eventos temporalizados. Mostraremos la utilidad de la modelización 2D y caracterizaremos en dicha modelización a los sistemas racionales.

2.1. MODELIZACIÓN MEDIANTE “COUNTERS”.

Consideremos nuevamente el grafo de eventos temporalizado de la figura 5. Esta vez definamos x_t^i , $i = 1, 2$, como la cantidad de veces que la transición x^i se ha encendido hasta el instante t (incluido). Análogamente definimos u_t e y_t . Estas nuevas variables asociadas a las transiciones reciben el nombre de “counters”. Tenemos entonces que se verifica :

$$\begin{cases} x_t^1 = \min(x_{t-1}^1 + 2, x_{t-1}^2 + 1, u_{t-1}) , \\ x_t^2 = \min(x_{t-1}^1 + 1, u_{t-2}) , \\ y_t = \min(x_t^1, x_t^2) , \end{cases}$$

lo cual puede escribirse en forma matricial (min-plus) como :

$$\begin{cases} x_t = A \otimes x_{t-1} \oplus B_1 \otimes u_{t-1} \oplus B_2 \otimes u_{t-2} , \\ y_t = C \otimes x_t , \end{cases}$$

donde :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \quad C = [e \quad e] .$$

Extendiendo nuevamente el vector de estado el sistema anterior puede llevarse a su forma normal equivalente :

$$\begin{cases} X_k = \tilde{A}X_{k-1} \oplus \tilde{B}U_k , \\ Y_k = \tilde{C}X_k . \end{cases}$$

Podemos ver entonces que las recurrencias obtenidas mediante las dos modelizaciones son diferentes.

2.2. SHIFTS.

Desde el punto de vista matemático es conveniente pensar a los “daters” como funciones no decrecientes desde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ en $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$. Entonces el conjunto de los “daters” con la suma puntual habitual como suma y con la sup-convolución como multiplicación resulta ser un dioide. Una forma conveniente para trabajar con “daters” consiste en considerar su γ -transformada. Para un “dater” $d = (d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ su γ -transformada D se define como la siguiente serie de potencias con coeficientes en $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

$$D = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d_k \gamma^k.$$

El conjunto $\mathcal{D}[\gamma]$ de las γ -transformadas de los “daters” con las operaciones de suma y multiplicación habituales de las series de potencias es un dioide el cual es isomorfo al dioide de los “daters”.

El operador “shift” aplicado a un “dater” se define por :

$$\gamma : (d_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (d_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Notemos que si D es la γ -transformada de d entonces el operador “shift” corresponde a multiplicar D por γ .

Análogamente se puede definir el operador “shift” aplicado a un “counter” por :

$$\delta : (c_t)_{t \in \mathbb{Z}} \rightarrow (c_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}.$$

Entonces si $C = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c_t \delta^t$ es la δ -transformada de c resulta que el operador “shift” corresponde a multiplicar C por δ .

Ahora podemos escribir de la siguiente manera el sistema obtenido a partir de la modelización mediante “daters” de un grafo de eventos temporalizado :

$$\begin{cases} X = \gamma AX \oplus BU, \\ Y = CX. \end{cases}$$

Por lo tanto resulta que :

$$Y = C(\gamma A)^* BU.$$

Análogamente podemos escribir de la siguiente manera el sistema obtenido a partir de la modelización mediante “counters” de un grafo de eventos temporalizado :

$$\begin{cases} X = \delta \tilde{A} X \oplus \tilde{B} U, \\ Y = \tilde{C} X. \end{cases}$$

con lo cual resulta :

$$Y = \tilde{C}(\delta \tilde{A})^* \tilde{B} U.$$

Al álgebra de las series de potencias le corresponde el álgebra de los sistemas donde la suma de dos sistemas es su puesta en paralelo y su multiplicación es su puesta en serie.

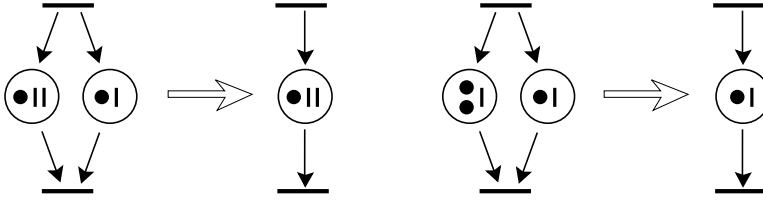


FIGURA 6. Simplificación de grafos de eventos temporalizados.

2.3. SIMPLIFICACIÓN.

Consideremos el primer grafo de eventos temporalizado de la figura 6; su modelización mediante “daters” conduce a :

$$Y = (2\gamma \oplus 1\gamma) U = 2\gamma U ,$$

en tanto que de su modelización mediante “counters” resulta :

$$Y = (1\delta^2 \oplus 1\delta) U .$$

Por lo tanto la modelización mediante “daters” nos dice que dicho sistema puede simplificarse al sistema representado en el segundo grafo de eventos de la figura 6.

Consideremos ahora el sistema representado por el tercer grafo de eventos de la figura 6. Entonces su modelización mediante “daters” conduce a :

$$Y = (1\gamma^2 \oplus 1\gamma) U ,$$

en tanto que de su modelización mediante “counters” resulta :

$$Y = (2\delta \oplus 1\delta) U = 1\delta U .$$

Entonces la modelización mediante “counters” nos dice que este sistema puede simplificarse al sistema representado en el cuarto grafo de eventos de la figura 6.

Como consecuencia de estos dos ejemplos se plantea la necesidad de tener un álgebra que nos permita una simplificación maximal para lo cual introduciremos la estructura algebraica $\mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ (min max $\gamma\delta$). Para esto comencemos por el conjunto de las series de potencia formales en dos variables (γ, δ) con coeficientes booleanos y con exponentes en \mathbb{Z} . Este conjunto con la suma y multiplicación convencionales de las series es un dioide que es representado por $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. Consideremos ahora la relación de equivalencia en $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ definida por :

$$\forall A, B \in \mathbb{B}[\gamma, \delta], A \approx B \Leftrightarrow (\delta^{-1})^* A = (\delta^{-1})^* B .$$

El conjunto cociente $(\delta^{-1})^* \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ definido por esta relación de equivalencia es un dioide con las operaciones inducidas por las operaciones de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ el cual resulta ser isomorfo a $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}[\gamma]$ (el conjunto de las series de potencias en γ con coeficientes en $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}$). Finalmente consideremos la relación de equivalencia en $(\delta^{-1})^* \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ definida por :

$$\forall A, B \in (\delta^{-1})^* \mathbb{B}[\gamma, \delta], A \equiv B \Leftrightarrow \gamma^* A = \gamma^* B .$$

El conjunto cociente definido por esta relación de equivalencia se representa por $\mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ y el mismo es un dioide.

Existe otro camino para obtener $\mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ a partir de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ que consiste en tomar primero el cociente por γ^* seguido por el cociente por $(\delta^{-1})^*$. También

es posible obtener $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ en un paso considerando el cociente por $(\gamma \oplus \delta^{-1})^*$.

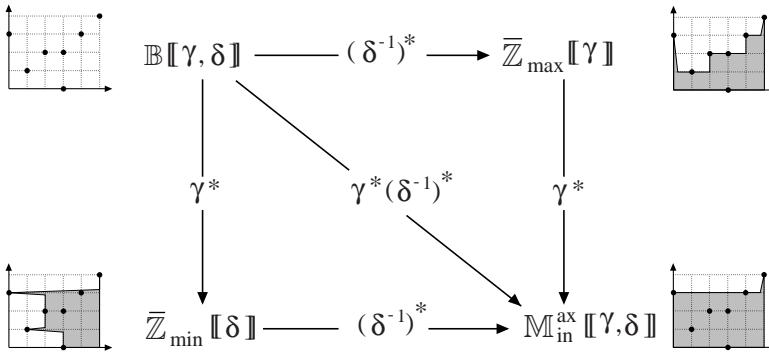


FIGURA 7. Modelizaciones

Geoméricamente en $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ un monomio $\gamma^c \delta^t$ representa a un cono sur-este con vértice (c, t) (los elementos de $B[[\gamma, \delta]]$ están en correspondencia uno a uno con los subconjuntos de \mathbb{Z}^2). Entonces la suma \oplus en $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ corresponde a la unión y la multiplicación \otimes en $M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ corresponde a la suma vectorial (estas dos operaciones son estables en el conjunto de las uniones de conos sur-este). Notemos además que :

$$\begin{cases} \varepsilon = \gamma^\infty \delta^{-\infty} , \\ e = \gamma^0 \delta^0 . \end{cases}$$

EJEMPLO 2.1. MODELO 2D. Consideremos nuevamente el grafo de eventos temporalizado de la figura 5. Entonces tenemos que :

$$\begin{cases} X = AX \oplus BU , \\ Y = CX , \end{cases} \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} \gamma^2 \delta & \gamma \delta \\ \gamma \delta & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta^2 \end{bmatrix}, \quad C = [e \quad e] .$$

Por lo tanto

$$Y = CA^*BU = \delta^2 (\gamma \delta)^* U .$$

Esta última ecuación nos dice que el sistema de la figura 5 es equivalente al sistema representado en la figura siguiente :

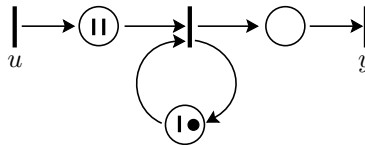


FIGURA 8. Sistema equivalente al sistema de la figura 5.

2.4. RACIONALIDAD, REALIZABILIDAD Y PERIODICIDAD.

DEFINICIÓN 2.2. 1. Una serie $S \in M_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ se dice *racional* si ella pertenece a la clausura de $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$ con respecto a un número finito de operaciones \oplus, \otimes y $*$.

2. Una serie $S \in \mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ es *realizable* si ella puede ser escrita como :

$$S = C (\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B ,$$

donde C, A_1, A_2 y B tienen coeficientes booleanos $\{\varepsilon, e\}$. En dicho caso S representa al sistema :

$$\begin{cases} X = (\gamma A_1 \oplus \delta A_2) X \oplus BU , \\ Y = CX . \end{cases}$$

3. Una serie $S \in \mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ es *periódica* si existen dos polinomios p y q y un monomio m tal que :

$$S = p \oplus qm^* .$$

El siguiente teorema puede demostrarse.

TEOREMA 2.3. Para $S \in \mathbb{M}_{\text{in}}^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ las siguientes tres afirmaciones son equivalentes.

1. S es *realizable*.
2. S es *racional*.
3. S es *periódica*.

3. RESOLUCIÓN DE TRES PROBLEMAS.

Mostraremos como un problema de valor propio generalizado permite calcular la tasa de producción de un grafo de eventos temporalizado y autónomo y de allí deduciremos un feedback sobre la salida de un sistema que no lo lentifica y que asegura la acotación del número de marcas en el sistema. Finalmente mostraremos como la residuación permite calcular el instante más tardío para lograr un objetivo.

3.1. VALOR PROPIO GENERALIZADO.

Consideremos ahora un grafo de eventos temporalizado y autónomo (sin entradas ni salidas) con una dinámica dada por la siguiente ecuación :

$$X = A (\gamma, \delta) X .$$

Entonces tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1. Si

1. $A (\gamma, \delta)$ es *irreducible*,
2. $\mathcal{G} (A (-\infty, 1))$ no tiene circuitos de peso positivo,
3. $\mathcal{G} (A (\infty, 1))$ tiene al menos un circuito de peso igual a $+\infty$,

entonces existe $X \in \mathbb{R}_{\text{max}}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}_{\text{max}}$ único tal que :

$$X = A (\lambda^{-1}, 1) \otimes X .$$

Además tenemos que

$$\lambda = \max_{m \in \mathcal{C} \in \mathcal{C}} \frac{m_\delta}{m_\gamma} ,$$

donde \mathcal{C} representa el conjunto de los circuitos y m es un monomio de pesos de un circuito con $m = \gamma^{m_\gamma} \delta^{m_\delta}$.

El *valor propio generalizado* λ se interpreta como la inversa de la tasa de producción de la red de Petri ya que

$$X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X = \gamma AX \Rightarrow \lambda X = AX ,$$

y luego si comenzamos con $X_0 = X$ resulta que $X_n = n\lambda + X_0$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos encontrar X y λ tales que :

$$X = A (\lambda^{-1}, 1) \otimes X ,$$

y entonces λ debe ser tal que e sea valor propio de $A (\lambda^{-1}, 1)$.

Como $A (\lambda^{-1}, 1)$ es irreducible admite un único valor propio dado por :

$$\Lambda (\lambda) = \max_{c \in \mathcal{C}} \frac{|c|_w (\lambda)}{|c|_l} = \max_{c \in \mathcal{C}} \left[\frac{1}{|c|_l} \sum_{(i,j) \in c} \max_{m \in A_{ij}} (m_\delta - m_\gamma \lambda) \right] .$$

Si suponemos que existe λ tal que $\Lambda (\lambda) = e$ entonces tenemos que :

$$\lambda \geq \max_{C \in \mathcal{C}, m \in C} \frac{m_\delta}{m_\gamma} ,$$

y la igualdad debe verificarse para un monomio de un circuito.

Falta mostrar que existe λ tal que $\Lambda (\lambda) = e$. Como la función $\Lambda (\lambda)$ es el supremo de funciones afines la misma resulta convexa. Por la hipótesis 3 tenemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Lambda (\lambda) = +\infty ,$$

y por la hipótesis 2 resulta que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Lambda (\lambda) < 0 .$$

Por lo tanto existe un único λ tal que $\Lambda (\lambda) = 0$. □

EJEMPLO 3.2. Consideremos el grafo de eventos temporalizado y autónomo de la figura siguiente : Entonces $\lambda = \max (4/2, 3/2, 3/2) = 2$.

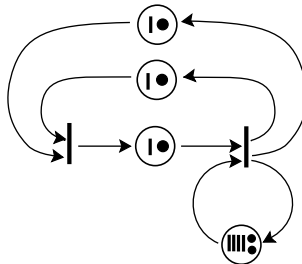


FIGURA 9. $\lambda = 2$.

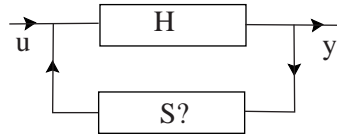


FIGURA 10. Feedback.

3.2. FEEDBACK QUE NO LENTIFICA.

Consideremos ahora un sistema H . Deseamos encontrar un “feedback” S tal que el sistema representado en la figura siguiente sea estable (es decir que el número de marcas esté acotado).

La dinámica de este sistema es :

$$Y = H (U \oplus SY) = (HS)^* HU .$$

Se puede obtener este resultado uniendo las salidas con las entradas por arcos conteniendo suficientes marcas como para no lentificar el sistema y de manera tal que el mismo resulte fuertemente conexo (esto no es siempre posible). Entonces cada lugar está en un circuito y en un circuito de un grafo de eventos el número de marcas es constante.

3.3. INSTANTE MÁS TARDÍO PARA LOGRAR UN OBJETIVO.

Sea ahora un sistema cuya dinámica está dada por :

$$\begin{cases} X = AX \oplus BU , \\ Y = CU . \end{cases}$$

Para un Y dado (el objetivo) deseamos encontrar el mayor U para el cual se verifica

$$Z = CA^*BU \leq Y .$$

Sabemos que dicho U está dado por :

$$U = CA^*B \setminus Y ,$$

y el mismo es solución del sistema siguiente :

$$\begin{cases} \xi = A \setminus \xi \wedge C \setminus Y , \\ Y = B \setminus \xi , \end{cases}$$

pues $U = CA^*B \setminus Y = A^*B \setminus (C \setminus Y) = B \setminus (A^* \setminus (C \setminus Y)) .$

4. OPTIMIZACIÓN DE RECURSOS Y ORDENAMIENTO ÓPTIMO.

Mostraremos ahora como puede ser resuelto el problema de optimización del número de marcas sujeto a una restricción sobre la tasa de salida. Mostraremos también como el apilamiento de piezas permite formular los problemas de ordenamiento.

4.1. OPTIMIZACIÓN DE RECURSOS.

Consideremos un grafo de eventos temporalizado $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, M, N, m, \tau)$. Entonces el número de marcas se conserva en los ciclos de \mathcal{G} . Algunas de las marcas cuando están en ciertos lugares $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ pueden ser interpretadas como recursos cuyo costo está dado por $c_{\overline{\mathcal{P}}}$. Deseamos resolver entonces el problema :

$$\inf_{m_{\overline{\mathcal{P}}}} \sum_{\overline{p} \in \overline{\mathcal{P}}} c_{\overline{p}} m_{\overline{p}} \text{ sujeto a : } \lambda = \min_{c \in \mathcal{C}} \frac{\sum_{p \in c} m_p}{\sum_{p \in c} \tau_p} \geq \mu ,$$

donde μ es una tasa de salida dada y \mathcal{C} representa el conjunto de los circuitos de \mathcal{G} . Ahora bien

$$\lambda = \min_{c \in \mathcal{C}} \frac{\sum_{p \in c} m_p}{\sum_{p \in c} \tau_p} \geq \mu \Leftrightarrow \sum_{p \in c} \rho_p \geq 0, \forall c \in \mathcal{C}, \text{ donde } \rho_p = m_p - \mu \tau_p$$

$$\Leftrightarrow \exists v \geq 0 : \rho \otimes v \geq v ,$$

donde ρ es la matriz cuyos coeficientes son los $\rho_p \ p = (i, j), \ i, j \in \mathcal{Q}$.

Por lo tanto el problema de optimización de recursos es equivalente a resolver el programa lineal siguiente :

$$\min_{m_{\overline{\mathcal{P}}}, v} \{ c_{\overline{\mathcal{P}}} \cdot m_{\overline{\mathcal{P}}} \mid v \otimes \rho \geq v, v \geq 0 \} .$$

EJEMPLO 4.1. Consideremos un sistema de manufactura (flow-shop) compuesto por dos máquinas y que produce tres tipos de partes. Se supone que todas las partes siguen la misma secuencia de máquinas (aunque algunas pueden no utilizarse) y toda máquina es visitada a lo sumo una vez por cada parte. Las partes son llevadas por un número finito de carros. Un sistema de este tipo puede representarse mediante un grafo de eventos temporalizado como el de la figura 11 donde las marcas verticales representan a los carros y las marcas horizontales representan a las máquinas. Podríamos entonces minimizar la cantidad total de carros manteniendo la tasa de producción dada por la máquina más lenta.

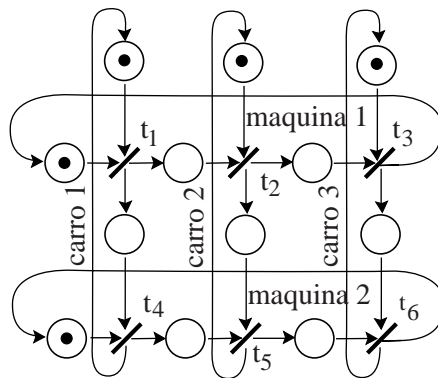


FIGURA 11. Un sistema de manufactura.

4.2. APILAMIENTO DE PIEZAS Y PROBLEMAS DE ORDENAMIENTO.

Supongamos que tenemos un conjunto de k piezas que se apilan una arriba de la otra. Deseamos conocer la altura máxima alcanzada por este apilamiento. Una pieza A^i está caracterizada por la función :

$$A_{xy}^i = \check{a}_y - \hat{a}_x ,$$

donde \hat{a}_x es la altura del borde inferior de la pieza en el punto x y \check{a}_y es la altura del borde superior de la pieza en el punto y (ver la figura siguiente).

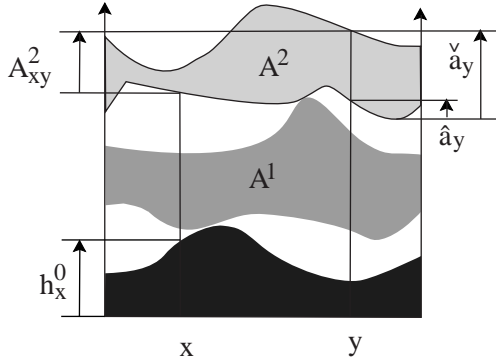


FIGURA 12. Apilamiento de piezas

Sea h^i la altura del borde superior de la pieza i en el apilamiento. Entonces se verifica que :

$$h_y^{i+1} = \sup_x \left(h_x^i + A_{xy}^{i+1} \right) = (h^i \otimes A^{i+1})_y ,$$

y por lo tanto la solución a nuestro problema está dada por :

$$h_0 \otimes A^1 \otimes \dots \otimes A^k \otimes e ,$$

donde h_0 es la altura inicial.

Un caso particular se obtiene cuando las piezas tienen espesor cero y entonces resulta :

$$\hat{a} = \check{a} \triangleq a, \quad A_{xy} = a_y - a_x.$$

Dado un conjunto de piezas el problema de ordenamiento óptimo consiste en encontrar el orden en el cual deben apilarse las mismas de manera tal de obtener una altura total mínima. Por lo tanto es necesario resolver el problema :

$$\inf_{\sigma} \left[h_0 \otimes A^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes A^{\sigma(k)} \otimes e \right] ,$$

donde σ son las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, k\}$.

4.3. APLICACIÓN A LA PRODUCCIÓN.

Supongamos ahora que la variable x es discreta y que representa los recursos de un sistema de manufactura. Una pieza corresponde a una tarea que hay que hacer y que utiliza varios recursos (el espesor de una pieza representa el tiempo necesario para llevar a cabo la tarea correspondiente). Por ejemplo para el sistema de manufactura del ejemplo anterior existen seis tareas (pues cada uno de los tres

carros debe pasar por cada una de las dos máquinas) las cuales están representadas por las piezas de la figura siguiente :

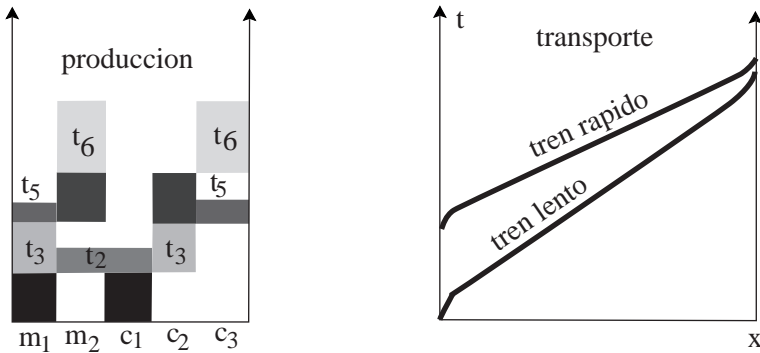


FIGURA 13. Aplicación a la producción y al transporte del apilamiento de piezas.

De esta manera obtenemos el tiempo mínimo necesario para llevar a cabo todas las tareas.

4.4. APLICACIÓN AL TRANSPORTE.

También es posible utilizar el método anterior para determinar los horarios de los trenes. En este caso las piezas son las trazas espacio-tiempo a lo largo de una vía para un tren.

5. REDES DE PETRI FLUIDAS Y CONTROL ESTOCÁSTICO.

Daremos a continuación la definición de una red de Petri temporalizada de tiempo continuo la cual es muy similar a la de las redes de Petri convencionales. La principal diferencia reside en el funcionamiento y en la interpretación del sistema pues circulan por la red “fluidos” en lugar de marcas.

DEFINICIÓN 5.1. Una red de Petri temporalizada de tiempo continuo,

$$\mathcal{N} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, M, \rho, m, \tau) ,$$

está compuesta por :

1. \mathcal{P} es un conjunto finito de elementos llamados lugares ;
2. \mathcal{Q} es un conjunto finito de elementos llamados transiciones ;
3. $M \in (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q} \times \mathcal{P}}$, multiplicadores M_{pq} (respectivamente M_{qp}) nos da el número de arcos que van desde la transición q al lugar p (respectivamente desde el lugar p a la transición q);
4. $\rho : \mathcal{Q} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la cual verifica :

$$\sum_{q \in \mathcal{P}^{out}} \rho_{qp} = 1, \forall p \in \mathcal{P} ,$$

cuando un lugar p es anterior a varias transiciones supondremos que la proporción del fluido que debe asignarse a cada transición está dada por la función ρ ;

5. $m \in (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{P}}$ representa la marca inicial, es decir que m_p es la cantidad de “fluido” disponible inicialmente en el lugar p ;

6. $\tau \in (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{P}}$ representa el tiempo de espera, es decir que τ_p es el tiempo mínimo que transcurre entre la entrada de una molécula al lugar p y el instante en el que la misma queda disponible para el encendido de una transición posterior.

Los multiplicadores indican la dinámica de la red de Petri de la siguiente manera : la transición q toma M_{qp} “moléculas de fluido” de cada uno de los lugares p anteriores a q y produce $M_{p'q}$ “moléculas de fluido” para cada uno de los lugares p' posteriores a q . El encendido (mezcla de fluidos) de la transición continúa mientras ninguno de los lugares anteriores a la misma este vacío.

Daremos ahora las ecuaciones de programación dinámica para estas redes de Petri. Con este objetivo definamos :

1. $Z_p(t)$ representa la cantidad acumulada de fluido que ha ingresado al lugar p hasta el tiempo t (incluido el fluido inicial);
2. $Z_q(t)$ representa el número acumulado de encendidos de la transición q hasta el tiempo t .

Si definimos

$$\mu_{pq} \triangleq M_{pq}, \quad \mu_{qp} \triangleq M_{qp}^{-1}, \quad \tilde{\mu}_{qp} \triangleq \mu_{qp} \rho_{qp},$$

entonces se puede mostrar que las funciones anteriores verifican las siguientes ecuaciones¹

$$\begin{cases} Z_q(t) = \min_{p \in q^{in}} \tilde{\mu}_{qp} Z_p(t - \tau_p), \\ Z_p(t) = m_p + \sum_{q \in p^{in}} \mu_{pq} Z_q(t). \end{cases}$$

De estas dos igualdades obtenemos :

$$Z_q(t) = \min_{p \in q^{in}} \left[\tilde{\mu}_{qp} \left(m_p + \sum_{q' \in p^{in}} \mu_{pq'} Z_{q'}(t - \tau_p) \right) \right]. \quad (5.1)$$

Esta ecuación puede ser interpretada en términos de un problema de control estocástico (semi-Markov) con tasa de actualización. El siguiente teorema puede demostrarse.

TEOREMA 5.2. Si existe $v \in (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{Q}}$ tal que :

$$\sum_{q \in p^{out}} v_q M_{qp} = \sum_{\tilde{q} \in p^{in}} M_{p\tilde{q}} v_{\tilde{q}}, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

entonces (5.1) se interpreta como un problema de control estocástico (semi-Markov) sin actualización con función de Bellman $W_q = \frac{Z_q}{v_q}$.

Un caso particular esta dado cuando se cumple que :

$$\sum_{q \in p^{out}} M_{qp} = \sum_{\tilde{q} \in p^{in}} M_{p\tilde{q}}, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

es decir cuando existe el mismo número de arcos entrantes y salientes de cada lugar. En dicho caso $v = \mathbf{1}$.

¹Decimos que un vértice r (lugar o transición) es anterior al vértice s si $M_{sr} \neq 0$. Equivalentemente se dice que s es posterior a r . Representaremos con r^{out} al conjunto de vértices posteriores al vértice r y con r^{in} al conjunto de vértices anteriores al vértice r .

6. NOTAS

Todo lo concerniente a los grafos de eventos es un resumen de los capítulos 2 y 5 de [7]. Complementos sobre las redes de Pétri más generales se encuentran en [20, 21]. La versión estocástica de esta modelización puede encontrarse en el capítulo 7 de [7].

La aplicación a la producción se describe en [17].

El método de optimización de recursos presentado aquí se encuentra en [37] y es una versión mejorada de un método propuesto en [62]. En [37] puede encontrarse un método basado en el cálculo formal para resolver este mismo problema.

La modelización de ciertas clases de redes de Petri por apilamiento de piezas fué introducida en [38].

Notación

\triangleq	por definición
\emptyset	conjunto vacío
$\mathbb{B}[\gamma, \delta]$	díode de series booleanas en dos variables γ y δ
\mathbb{E}	esperanza matemática
\mathbb{F}	función característica de una variable de decisión
\mathbb{K}	medida de costo
\mathbb{M}	valor de una variable de decisión
$\mathbb{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	díode de series formales en dos variables γ y δ
\mathbb{N}	números naturales
\mathbb{O}	óptimo de una variable de decisión
\mathbb{P}	medida de probabilidad
\mathbb{R}	números reales
\mathbb{R}_{max}	díode $\{\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +\}$
\mathbb{R}_{min}	díode $\{\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +\}$
\mathbb{S}	sensibilidad de una variable de decisión
\mathbb{Z}	números naturales positivos y negativos
$\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$	díode de series booleanas en variables γ con coeficientes en \mathbb{Z}_{max}
$\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\delta]$	díode de series booleanas en variables δ con coeficientes en \mathbb{Z}_{min}
\oplus	adición en un semi-anillo
\otimes	multiplicación en un semi-anillo
A^*	$e \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots$
$f^\#$	residuo de f
e	elemento identidad en un semi-anillo
$\mathbf{1}$	vector de 1
\mathcal{C}	transformada de Cramer
\mathcal{E}	conjunto de estados
\mathcal{E}_v	homomorfismo de evaluación
\mathcal{F}	conjunto de controles
\mathcal{F}_e	transformada de Fenchel
\mathcal{G}	conjunto de las observaciones
\mathcal{L}	transformada de Laplace
$\mathcal{M}_{m,\sigma}^p(x)$	costo estable $1/p[(x - m)/\sigma]^p$
$\mathcal{N}_{m,\sigma}(x)$	densidad de una ley gaussiana de media m y varianza σ
\mathcal{P}	conjunto de lugares
\mathcal{Q}	conjunto de transiciones
$\mathcal{Q}_{m,\sigma}(x)$	forma cuadrática $1/2[(x - m)/\sigma]^2$
\mathcal{S}	conjunto de “feedbacks”
\mathcal{T}	conjunto de tiempos
$\ker(A)$	núcleo de A
$\text{Im}(A)$	imagen de A

I_d	identidad
E	número de estados posibles
F	número de controles posibles
G	número de observaciones posibles
U^n	control de una cadena de Markov
X^n	estado de una cadena de Markov
Y^n	observación de una cadena de Markov
M_{pq}, M_{qp}	multiplicador de la transición q al lugar p y del lugar p a la transición q de una red de Petri
$M_{xx'}$	probabilidad condicional de ir del estado x al estado x'
A	generador de una cadena de Markov $M - I_d$
$M_{xx'}^u$	probabilidad condicional de ir del estado x al estado x' cuando el control es u
$M_{xx'}^y$	probabilidad condicionada de ir del estado x al estado x' y observar y
$M_{xx'}^{uy}$	probabilidad condicionada de la transición del estado x al estado x' y observar y cuando el control es u
p	ley de probabilidad sobre \mathcal{E}
c	densidad de costo sobre \mathcal{E}
λ	valor propio
T_{ij}	$T_{ij}(x^1, \dots, x^l) = (x^1, \dots, x^i - 1, x^{i+1}, \dots, x^j + 1, \dots, x^m)$
(A, B, C)	matrices que definen un sistema dinámico max-plus lineal
H	función de transferencia de un sistema entrada-salida max-plus lineal
P	proyección
V, Z	función de Bellman
m	marca inicial
ε	cero en un semi-anillo
γ	“shift” aplicado a un “counter”
δ	“shift” aplicado a un “dater”
ρ_{qp}	proporción asignada del lugar p al transición q
τ_p	tiempo mínimo en el lugar p

Bibliografia

- [1] M. AKIAN (1998). *Density of idempotent measures and large deviations*. Transaction of the American Mathematical Society 351, p. 4515-4543, (1999). and INRIA report n.2534 (1995).
- [2] M. Akian (1995). *Theory of cost measures: convergence of decision variables*. INRIA Report n.2611.
- [3] M. AKIAN, J.P. QUADRAT, M.VIOT (1994). *Bellman Processes*. In LN in Cont. and Inf. Sc., n.199, Springer-Verlag.
- [4] M. AKIAN, J.P. QUADRAT, M. VIOT (1998). *Duality between probability and optimization in Idempotency*, J. Gunawardena (Editor), Cambridge University Press.
- [5] H. ATTOUCH (1984) *Variational convergence for functions and operators*. Pitman.
- [6] H. ATTOUCH, R.J.B. WETS (1986). *Isometries for the Legendre-Fenchel transform*. Transactions of the American Mathematical Society n.296.
- [7] F. BACCELLI, G. COHEN, G.J. OLSDER, J.P. QUADRAT (1992). *Synchronization and Linearity*. J. Wiley & Sons.
- [8] F. BASKETT, F. CHANDY, M. MUNTZ, R. PALACIOS (1975) . *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers*. JACM 22 .
- [9] R. BELLMAN (1957). *Dynamic programming*. Princeton University Press.
- [10] P. BERNHARD (1995). *A separation theorem for expected value and feared value discrete time control*. COCV, SMAI Electronic Journal n.1.
- [11] F. BELLALOUNA (1992). *Processus de décision min-markovien*. Thèse Paris Dauphine.
- [12] G. BIRKHOFF (1967). *Lattice theory*. Am. Math. Soc. Colloq. Pub. n.25.
- [13] T.S. BLYTH (1990). *Module theory*. Oxford Science Publications.
- [14] T.S. BLYTH, M.J JANOWITZ (1972). *Residuation theory*. Pergamon Press, Oxford.
- [15] P. BUTKOVIC (1994). *Strong regularity of matrices - a survey of results*. Disc. Ap. Math. n. 48, p.45-68.
- [16] Z.Q. CAO, K.H. KIM, F.W. ROUSH (1984). *Incline algebra and applications*. Ellis Horwood.
- [17] G. COHEN, D.DUBOIS, J.P. QUADRAT, M.VIOT (1985). *A linear system-theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing*. IEEE Transaction on Automatic Control 30.
- [18] G. COHEN, S. GAUBERT, J.P. QUADRAT (1996) *Kernels, images and projections in dioids*. Proceedings of WODES'96, Edinburgh.
- [19] G. COHEN, S. GAUBERT, J.P. QUADRAT (1997). *Linear Projectors in the max-plus algebra*. 5th IEEE-Mediterranean Conf. Paphos, Chypre.
- [20] G. COHEN, S. GAUBERT, and J.P. QUADRAT (1994). *Algebraic system analysis of timed Petri nets*. In "Idempotency", Cambridge University Press.
- [21] G. COHEN, S. GAUBERT, and J.P. QUADRAT (1995). *Asymptotic throughput of continuous timed Petri nets*. Proceedings of the IEEE-CDC, New Orleans.
- [22] G. COHEN, P. MOLLER, J.P. QUADRAT, M. VIOT (1989). *Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems*. IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems n.77(1).
- [23] P.J. COURTOIS (1977) *Decomposability Queuing and Computer System Applications*. Academic Press, New York.
- [24] R.A. CUNNINGHAME-GREEN (1979). *Minimax Algebras*. L.N. in Economics and Math. Systems, Springer Verlag.

- [25] R.A. CUNNINGHAME-GREEN P.R.J. MEIJER (1980). *An algebra for piecewise min-max problems*. Discrete Math., n.2, p.267-294.
- [26] F. DELEBECQUE, P. KOKOTOVIC, J.-P. QUADRAT (1984). *Aggregation and coherency in networks and Markov chains*. Int. J. of Control n.35.
- [27] F. DELEBECQUE, J.-P. QUADRAT (1981). *Optimal control of Markov chains admitting weak and strong interactions*. Automatica April.
- [28] C. DERMAN (1970) *Finite state markovian decision processes*. Academic Press.
- [29] P. DEL MORAL, (1994). *Résolution particulière des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires*. Thèse Toulouse.
- [30] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT, (1990). *Optimal versus random processes: the non-linear case*. LAAS Report, Toulouse, France.
- [31] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT (1953). *Théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars.
- [32] R.S. ELLIS (1985). *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Springer Verlag, New York.
- [33] O. FALL, J.P. QUADRAT (1998). *About min-plus product forms*. Internal report INRIA.
- [34] W. FELLER (1957). *An introduction to probability theory and its application*. J.Wiley.
- [35] M. FRECHET (1938). *Théorie des évènements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*. Gauthier-Villars.
- [36] F. R. GANTMACHER (1966). *Théorie des matrices*. Dunod.
- [37] S. GAUBERT (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioides*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [38] S. GAUBERT, J. MAIRESSE (1998). *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*. IEEE TAC.
- [39] S. GAUBERT and M. PLUS (1997). *Methods and applications of max-plus linear algebra*. In L.N. in Comp. Sc. n.1200, Springer Verlag.
- [40] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *Existence of Eigenvectors for Monotone Homogeneous Function*. To appear.
- [41] M. GONDRAN, M. MINOUX (1986) *Graphes et Algorithms*. J. Wiley & Sons.
- [42] J.S. GOLAN (1992). *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer sciences*. Pitman.
- [43] M. GONDRAN (1996). *Analyse MAX-PLUS*. CRAS n.323, Série I, p.371-375.
- [44] M. GONDRAN (1996). *Analyse MINMAX*. CRAS n.323, Série I, p.1249-1252.
- [45] M. GONDRAN, M. MINOUX (1977). *L'indépendance linéaire dans les dioides*. Bulletin des Études et Recherches, série C, EDF, n.2, p.25-41.
- [46] R. A. HOWARD (1960). *Dynamic programming and Markov process*. J.Wiley.
- [47] J. GUNAWARDENA (editor) (1998). *Idempotency*. Cambridge University Press.
- [48] T. KAILATH (1980). *Linear systems*. Prentice Hall.
- [49] J.P. JACKSON (1957). *Networks of waiting lines*. Oper. Research n.15, p.254-265.
- [50] J. G. KEMENY, J. L. SNELL, A. W. KNAP (1976). *Finite Markov chains*. Springer-Verlag.
- [51] F.P. KELLY (1976). *Reversibility and stochastic networks*. Wiley, (1979).
- [52] V.N. KOLOKOLTSOV, V.P. MASLOV (1997). *Idempotent analysis and its applications*. Kluwer.
- [53] A. A. MARKOV (1910). Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes. *Acta Mathematica* n.38 p.87-104.
- [54] J. MAIRESSE (1995). *A graphical approach to the spectral theory in the (max, +) algebra*. IEEE TAC n.40(10), p.1783-1789.
- [55] V. MASLOV (1987). *Méthodes opératorielles*. Éditions MIR.
- [56] V.P. MASLOV, S.N. SAMBORSKI (1992). *Idempotent Analysis*. Advances in Soviet Math. 13, Amer. Math. Society.
- [57] MAX PLUS (1990). *L'algèbre (max, +) et sa symétrisation ou l'algèbre des équilibres*. CRAS n.311, p.443-448.
- [58] P. MOLLER. *Théorie Algébrique des systèmes à événements discrets*. Thèse École des Mines 1988.
- [59] E. PAP (1995). *Null-additive set functions*. Math. and Appl. n.337, Kluwer.

- [60] J. NEVEU (1972). *Martingales à temps discret*. Masson.
- [61] R. PALLU DE LA BARRIERE (1966). *Cours d'automatique théorique*. Dunod.
- [62] J.-M. PROTH, X.L. XIE (1991) *Les critères invariants dans un graphe d'événements déterministe*. CRAS, série I, n.313, p.797-800.
- [63] J.-P. QUADRAT. (1989) *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*. CRAS 311.
- [64] J.-P. QUADRAT and MAX-PLUS working group (1997). *Min-plus linearity and statistical mechanics*. Markov Processes and Related Fields n.3.
- [65] J.-P. QUADRAT, M. VIOT (1980). *Product form and optimal local feedback for a multiindex markov chain*. Allerton Conf. on Communication Control and Computing.
- [66] I.V. ROMANOVSKII (1967). *Optimization of stationary control of discrete deterministic process*. Kibernetica n.3(2), p.66-78.
- [67] S. M. ROSS (1983). *Introduction to dynamic programming*. Academic Press.
- [68] S. SAMBORSKII (1998). *The Lagrange problem from the point of view of idempotent analysis*. In Idempotency. J. Gunawardena (Editor), Cambridge University Press.
- [69] M.S. TAQQU (1994). *Stable non-gaussian random processes*. Chapman & Hall.
- [70] S.R.S. VARADHAN (1984). *Large Deviations and Applications*. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Ap. Math. n.46, SIAM.
- [71] E. WAGNEUR (1991). *Moduloids and Pseudomodules. I Dimension Theory*. Discr. Math. n.98, p.57-73.
- [72] E. WAGNEUR (1997). *The geometry of finite dimensional pseudomodules*. In Idempotency, J. Gunawardena (Editor), Cambridge University Press.
- [73] D. REVUZ (1984). *Markov chains*. North-Holland.
- [74] P. WHITTLE (1982-83). *Optimization over time v.1 and v.2*. Wiley and Sons.
- [75] P. WHITTLE (1990). *Risk-Sensitive optimal control*. J. Wiley and Sons.
- [76] U. ZIMMERMANN (1981). *Linear and combinatorial optimization inn ordered algebrai structures*. Annals of discrete math. n.10, North-Holland.

Índice de Materias

- agregable, 56
- apretada, 21, 26

- cadena de Bellman, 33
- centrada, 23
- coherente, 56
- completo, 50
- congruencia, 16
- convergencia, 25
- counter, 62

- decisión real, 23
- densidad de costo, 21
- densidad marginal, 22
- determinante, 13
- dioide, 6
- distribución estable, 22

- ecuación de la programación dinámica, 40
- ecuación polinomial, 15
- encendido, 59
- epi-convergencia, 25
- espacio de decisión, 21

- familia generadora, 18
- finitamente generado, 18
- función característica, 24
- función polinomial, 14
- función racional, 16

- grado, 15
- grafo crítico, 38
- grafo de eventos, 60
- grafo de precedencia, 9
- grafo de saturación, 38

- homomorfismo de evaluación, 14

- idempotente, 6
- imagen, 16
- independiente, 18, 23
- inf-convolución, 22
- inyectivos, 54

- libre, 54
- lugar, 59
- lumpable, 57

- marca inicial, 59

- monótona, 51
- multiplicidad, 59

- núcleo, 16

- óptimo, 23

- periódica, 66
- polinomio formal, 14
- producto tensorial, 27
- proyectivos, 54
- proyector espectral, 39
- punto de Nash, 50

- racional, 65
- realizable, 66
- red de Petri, 59
- residuable, 51

- semi-anillo, 6
- semi-campo, 6
- semi-continua inferior, 51
- semi-módulo, 6
- semiflujo (p), 61
- semiflujo (t), 61
- sensibilidad, 23
- sucesor, 35

- temporalización, 59
- transformada de Cramer, 28
- transformada de Fenchel, 24
- transición, 59

- valor, 23
- valor propio generalizado, 67
- variable costo, 23
- variable de decisión, 23

CUADERNOS del Instituto de Matemática “Beppo Levi”

NUMEROS APARECIDOS:

1. G. STAMPACCHIA, “Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales”.
2. C. PROCESI, “Teoría de Galois elemental”.
3. U. MOSCO, “Transformada de Fourier y distribuciones”.
4. P. BERNHARD, “Introducción a la teoría de Control Optimo”.
5. P. FAURRE, “Teoría de Control, Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico”.
6. “Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática”, E. Rofman (Ed.), Rosario, 2-7 de julio de 1973 :
 - U. D’AMBROSIO, “Superficies generalizadas no cálculo das variaciones”, p. 5-24.
 - L.A. MEDEIROS, “Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales”, p. 25-58.
 - E. ROFMAN, “Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica, de soluciones”, p. 59-86.
7. A. BENSOUSSAN, “Teoría moderna de Control Optimo”.
8. C. BAIOCCHI, “Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico”.
9. R. GLOWINSKI, “Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas”.
10. H. SAMARA, “Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU”.
11. “Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones”, D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1 :
 - D.A.TARZIA, “Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones”, p. 5-32.
 - D.A.TARZIA, “Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil”, p. 33-61.
 - J.E. BOUILLET, “Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico”, p.63-74.
 - J-E. BOUILLET, “Soluciones autosemejantes con cambio de fase”, p. 75-104.
 - L.T. VILLA, “El problema inverso de Stefan”, p. 105-131.
 - L.T. VILLA, “Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase, p. 133-142.
 - R.H. NOCHETTO, “Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional”, p. 143-166.
 - G.G. GARGUICHEVICH - M.C. SANZIEL, “Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional”, p. 167-177.
12. “Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones”, D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2 :
 - D.A. TARZIA, “Soluciones exactas de] problema de Stefan unidimensional”, p.5-36.
 - D.A. TARZIA, “Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase”, p. 37-85.
 - P.P. MARANGUNIC, “Algunos conceptos básicos del análisis funcional”, p. 87-118.
 - H.R. BERTORELLO, “Sobre la solidificación de aleaciones binaria”, p.119-142
 - L. CRIVELLI - S. IDELSOHN - C. BAIGORRIA, “Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales”, p.143-170.
 - E.E. ALANIS, “Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar”, p. 171-177.
 - M.B. STAMPELLA, “Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase”, p.179-193.
13. A. FASANO, “Las zonas pastosas en el problema de Stefan”, en “II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones”, D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. “II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones”, D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2:
 - H. BERTORELLO, “Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido”, p. 9-27.

- J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.
- D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p. 45-75.
- D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.
- L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.
- N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p.117-128.
- G.G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.
- P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p. 139-165.
- E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.
15. P.L. GEORGE, "Introducción a la utilización del Software Científico MODULEF".
16. J.L. MENALDI, "Programación dinámica estocástica".
17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 1:
- J.E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas", p. 7-13.
- C. CORTAZAR - M. ELGUETA, "Sobre localización de soluciones de la ecuación de medios porosos", p. 15-27.
- G-G. GARGUICHEVICH - D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", p. 29-44.
- M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas", p. 45-53.
- R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos", p. 55-71.
- D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", p. 73-86.
- C.V. TURNER, "Difusión de un solvente en un polímero no homogéneo", p. 87-104.
- K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic and stochastic approach", p. 105-119.
- L.T. VILLA, "Problemas de frontera libre y móvil en procesos de ingeniería química", P. 121-132.
- D.A. TARZIA, "El caso estacionario de] problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", p. 133-151.
18. M. PRIMICERIO - R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", en "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 2.
19. J.C. CESCO, "Economía, matemática", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
20. L. QUINTAS, "Teoría de juegos", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
21. E. GENTILE, "Forma Normal de Jordan", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
22. M. UGHI, "On the porous media equation with either source or absorption".
23. "IV seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14-18 de diciembre de 1992, Volumen 1 :
- J.C. REGINATO - D.A. TARZIA, "Free boundary models for root growth of crops", p. 1-26.
- E. PARDO, "Modelado térmico de soldaduras GMA", P. 27-33.
- M.K. KORTEN, "Fronteras libres en soluciones de la ecuación $u_t = \Delta(u - 1)_+$ ", p. 35-37.
- M.C. SANZIEL - D.A. TARZIA, "Problemas con multifases", p. 39-51.
- L.T. VILLA, "Modelos de Frontera Libre-Móvil en sistemas de difusión reacción química gas-sólido", p. 53-71.
- L.R. BERRONE - G.G. GARGUICHEVICH, "Sobre un problema estacionario de Stefan con fuente de energía", p. 73-80.
- J.I. ETCHEVERRY, "Análisis de Modelos de Ablación de Polímeros", p. 81-92.
- V.A. KUZ, "Dynamic study of evaporation of droplets", p. 93-102,

- D.F. DELMASTRO - A. CLAUSSE, "Oscilaciones de frontera de entalpía en flujos de dos fases", p. 103-119.
24. "IV Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones" D.A. Tarzia (Ed.), Rosario, 14-18 de diciembre de 1992. Volumen 2:
- L.R BERRONE, "Rango temporal de validez de modelos que involucran a la ecuación del calor-difusión", p. 1-36.
- C.V. TURNER, "El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado", p. 37-49.
- R.B. MASCHERONI, "Transferencia de calor con cambio de fase en sistemas multidimensionales: uso de factores de forma en métodos aproximados", p- 51-66.
- M. STORTI, "Numerical modeling of ablation phenomena as two-phase Stefan problem", p. 67-88.
- C.B. LEDERMAN, "Un problema de frontera libre en elasticidad", p. 89-96.
- J.E. BOUILLET, "Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos", p. 97-102.
- D.A. TARZIA, "Numérical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem with solution of non-constant sign", p. 103-120.
25. J-C. REGINATO - D.A. TARZIA, "Toma de agua y crecimiento de raíces de cultivos", p. 1-13.
- R-H. MASCHERONI, "Dos problemas de frontera libre acoplados: solidificación con simultánea sublimación", p. 15-26.
- J.I. ETCHEVERRY, "On a numerical method for solving a boundary value problem for $u_t = \alpha(u)_{xx}$ ", p. 27-34.
- D.A. TARZIA - C.V. TURNER, "El problema de Stefan a una fase para el líquido sobreenfriado con una condición de contorno convectiva", p. 35-45.
- L.T. VILLA - O.D. QUIROGA, "Modelos de frontera libre en transformaciones fluido-sólido reactivo", p. 47-62.
- V-A. KUZ, "One-dimension model for dynamic condensation of a vapor", p. 63-73.
- A. BOUCIGUEZ - L. SARAVIA, "Análisis térmico y solución numérica al problema de transferencia de calor en dos fases", p. 75-84.
- D.A. TARZIA - C.V. TURNER, "El comportamiento asintótico para un problema de Stefan a una fase con una condición de contorno convectivo", p. 85-92.
26. C. LEDERMAN - N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión I", p. 1-13.
- C. LEDERMAN - N. WOLANSKI, "Un problema de frontera libre de la teoría de combustión II", p. 15-25.
- A.R. GONZALEZ - D.A. TARZIA, "Determination of thermal coefficients in semi-infinite materials with mushy zone in phase-change process", p. 27-48.
- J.I. ETCHEVERRY, "Modelado numérico de la fusión y evaporación de materiales mediante haces de electrones", p. 49-58.
- A.C. BRIOZZO - D.A. TARZIA, "Solución exacta de un problema de frontera libre de flujos en un medio saturado-no saturado con difusividad variable", p. 59-72.
- P.R. MARANGUNIC, "El problema de Stefan simétrico a dos fases con sobre-enfriamiento", p. 73-88.
- D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan-Signorini con condiciones de contorno mixtas", p. 89-102.
27. A. JEAN-MARIE, "Introducción a la teoría matemática de colas de espera" (en preparación).

Se terminó de imprimir en noviembre de 1999 en la imprenta del INRIA (edición limitada a 50 ejemplares).

Nota : Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

**CUADERNOS del Instituto de Matemática “Beppo Levi”,
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.**

Note : To exchange this serie with similar publications, please write to:

**CUADERNOS del Instituto de Matemática “Beppo Levi”,
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.**