

Bornes de la programmation linéaire pour $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$

J. Creignou H. Diet

IMB, Université de Bordeaux I

C2 2008

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Les codes MIMO

Les codes unitaires interviennent dans différents contextes pour les codes MIMO (multi-antennes).

On prendra ici l'exemple du codage différentiel.

Les codes MIMO

Plaçons nous dans le cadre de n antennes émettrices et n réceptrices, et un message transmis sur t temps de symboles (...)
Le comportement du canal est alors donné par l'équation :

$$\underbrace{Y}_{\text{reçu} \in \mathcal{M}_{nt}} = \underbrace{H}_{\text{evan.} \in \mathcal{M}_{nn}} \times \underbrace{X}_{\text{envoyé} \in \mathcal{M}_{nt}} + \underbrace{W}_{\text{bruit} \in \mathcal{M}_{nt}}$$

Prenons le cas particulier où $n = t$

Les codes MIMO

Plaçons nous dans le cadre de n antennes émettrices et n réceptrices, et un message transmis sur t temps de symboles (...)
Le comportement du canal est alors donné par l'équation :

$$\underbrace{Y}_{\text{reçu} \in \mathcal{M}_{nt}} = \underbrace{H}_{\text{evan.} \in \mathcal{M}_{nn}} \times \underbrace{X}_{\text{envoyé} \in \mathcal{M}_{nt}} + \underbrace{W}_{\text{bruit} \in \mathcal{M}_{nt}}$$

Prenons le cas particulier où $n = t$

Les codes MIMO

$$\underbrace{Y}_{\text{reçu} \in \mathcal{M}_n} = \underbrace{H}_{\text{evan.} \in \mathcal{M}_n} \times \underbrace{X}_{\text{envoyé} \in \mathcal{M}_n} + \underbrace{W}_{\text{bruit} \in \mathcal{M}_n}$$

Le principe du codage différentiel est le suivant : si H ne peut pas être déterminée (...), on code le message à l'aide de matrices unitaires M_1, M_2, M_3, \dots et l'on envoie successivement

$$X_0 = I_d, \quad X_1 = X_0 M_1, \quad X_2 = X_1 M_2, \quad X_3 = X_2 M_3 \dots$$

Le décodage s'effectue en calculant

$$Y_0^{-1} Y_1 = M_1 + W'_1, \quad Y_1^{-1} Y_2 = M_2 + W'_2.$$

Les codes MIMO

$$\underbrace{Y}_{\text{reçu} \in \mathcal{M}_n} = \underbrace{H}_{\text{evan.} \in \mathcal{M}_n} \times \underbrace{X}_{\text{envoyé} \in \mathcal{M}_n} + \underbrace{W}_{\text{bruit} \in \mathcal{M}_n}$$

Le principe du codage différentiel est le suivant : si H ne peut pas être déterminée (...), on code le message à l'aide de matrices unitaires M_1, M_2, M_3, \dots et l'on envoie successivement

$$X_0 = I_d, \quad X_1 = X_0 M_1, \quad X_2 = X_1 M_2, \quad X_3 = X_2 M_3 \dots$$

Le décodage s'effectue en calculant

$$Y_0^{-1} Y_1 = M_1 + W'_1, \quad Y_1^{-1} Y_2 = M_2 + W'_2.$$

Les codes MIMO

Les performances du code (probabilités d'erreur) sont alors déterminées par les deux fonctions suivantes :

- A faible SNR (puissance du signal par rapport au bruit) :

$$\text{“Diversity sum”} : d_{\Sigma}(A, B) := \frac{1}{2\sqrt{n}} \|A - B\|,$$

$$\Sigma\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Sigma}(A, B)$$

- A fort SNR :

$$\text{“Diversity product”} : d_{\Pi}(A, B) := \frac{1}{2} |\det(A - B)|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\Pi\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Pi}(A, B)$$

Les codes MIMO

Les performances du code (probabilités d'erreur) sont alors déterminées par les deux fonctions suivantes :

- A faible SNR (puissance du signal par rapport au bruit) :

$$\text{“Diversity sum”} : d_{\Sigma}(A, B) := \frac{1}{2\sqrt{n}} \|A - B\|,$$

$$\Sigma\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Sigma}(A, B)$$

- A fort SNR :

$$\text{“Diversity product”} : d_{\Pi}(A, B) := \frac{1}{2} |\det(A - B)|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\Pi\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Pi}(A, B)$$

Les codes MIMO

Les performances du code (probabilités d'erreur) sont alors déterminées par les deux fonctions suivantes :

- A faible SNR (puissance du signal par rapport au bruit) :

$$\text{“Diversity sum”} : d_{\Sigma}(A, B) := \frac{1}{2\sqrt{n}} \|A - B\|,$$

$$\Sigma\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Sigma}(A, B)$$

- A fort SNR :

$$\text{“Diversity product”} : d_{\Pi}(A, B) := \frac{1}{2} |\det(A - B)|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\Pi\mathcal{V} = \min_{A \neq B} d_{\Pi}(A, B)$$

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Action de groupe

On considère l'action suivante de $G = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ sur $X = \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$:

- $g = (U, V)$ agit sur $x = M$ par $gx = UMV^{-1}$.
- L'orbite d'une paire (x, y) sous G est alors caractérisée par les valeurs propres (complexes) de xy^{-1} .

Action de groupe

On considère l'action suivante de $G = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ sur $X = \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$:

- $g = (U, V)$ agit sur $x = M$ par $gx = UMV^{-1}$.
- L'orbite d'une paire (x, y) sous G est alors caractérisée par les valeurs propres (complexes) de xy^{-1} .

Théorème de Peter-Weyl

Représentation de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightsquigarrow$ morphisme $\rho : \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$

Théorème

L'espace $L^2(X)$ se décompose en :

$$L^2(X) = \bigoplus V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$$

où ρ est une représentation irréductible de \mathbb{U}_n , et les $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$ sont des sous espaces G -stables, orthogonaux et non-isomorphes.

$$X = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}), \quad G = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$$

Théorème de Peter-Weyl

Représentation de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightsquigarrow$ morphisme $\rho : \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$

Théorème

L'espace $L^2(X)$ se décompose en :

$$L^2(X) = \bigoplus V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$$

où ρ est une représentation irréductible de \mathbb{U}_n , et les $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$ sont des sous espaces G -stables, orthogonaux et non-isomorphes.

$$X = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}), \quad G = \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$$

Fonctions zonales

$$\rho : \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$$

Les coefficients matriciels de ρ forment
une base orthonormale de $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$.

Définition

La fonction zonale associée à $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$ est :

$$J_\rho(x, y) := \frac{1}{d_\rho} \sum_{i,j} \rho_{i,j}(x) \overline{\rho_{i,j}(y)}$$

$$\text{où } d_\rho = \dim V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$$

Fonctions zonales

$$\rho : \mathbb{U}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$$

Les coefficients matriciels de ρ forment
une base orthonormale de $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$.

Définition

La fonction zonale associée à $V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$ est :

$$J_\rho(x, y) := \frac{1}{d_\rho} \sum_{i,j} \rho_{i,j}(x) \overline{\rho_{i,j}(y)}$$

$$\text{où } d_\rho = \dim V_{\rho \otimes \bar{\rho}}$$

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Propriété de positivité

Les fonctions zonales J_ρ ont plusieurs propriétés :

- J_ρ ne dépend pas de la base choisie pour exprimer ρ ,
- J_ρ est G -invariante $\rightsquigarrow \forall g \in G \ J_\rho(x, y) = J_\rho(gx, gy)$,
- J_ρ vérifie la **propriété de positivité** :

Proposition

Pour tout ensemble $\mathcal{C} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$,
et toute fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sum_{x, y \in \mathcal{C}} \alpha(x) \overline{\alpha(y)} J_\rho(x, y) \in \mathbb{R}^+.$$

Propriété de positivité

Les fonctions zonales J_ρ ont plusieurs propriétés :

- J_ρ ne dépend pas de la base choisie pour exprimer ρ ,
- J_ρ est G -invariante $\rightsquigarrow \forall g \in G \ J_\rho(x, y) = J_\rho(gx, gy)$,
- J_ρ vérifie la **propriété de positivité** :

Proposition

Pour tout ensemble $\mathcal{C} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$,
et toute fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sum_{x, y \in \mathcal{C}} \alpha(x) \overline{\alpha(y)} J_\rho(x, y) \in \mathbb{R}^+.$$

Propriété de positivité

Les fonctions zonales J_ρ ont plusieurs propriétés :

- J_ρ ne dépend pas de la base choisie pour exprimer ρ ,
- J_ρ est G-invariante $\rightsquigarrow \forall g \in G \ J_\rho(x, y) = J_\rho(gx, gy)$,
- J_ρ vérifie la **propriété de positivité** :

Proposition

Pour tout ensemble $\mathcal{C} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$,
et toute fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sum_{x, y \in \mathcal{C}} \alpha(x) \overline{\alpha(y)} J_\rho(x, y) \in \mathbb{R}^+.$$

Propriété de positivité

Les fonctions zonales J_ρ ont plusieurs propriétés :

- J_ρ ne dépend pas de la base choisie pour exprimer ρ ,
- J_ρ est G-invariante $\rightsquigarrow \forall g \in G \ J_\rho(x, y) = J_\rho(gx, gy)$,
- J_ρ vérifie la **propriété de positivité** :

Proposition

Pour tout ensemble $\mathcal{C} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$,
et toute fonction $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sum_{x, y \in \mathcal{C}} \alpha(x) \overline{\alpha(y)} J_\rho(x, y) \in \mathbb{R}^+.$$

Représentation de \mathbb{U}_n

Si χ est le caractère associé à ρ , la fonction zonale J_ρ vérifie,

$$J_\rho(x, y) = \frac{1}{d_\rho} \chi(xy^{-1}).$$

Les fonctions zonales ont donc une expression agréable en termes de caractères irréductibles de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.

Représentation de \mathbb{U}_n

Si χ est le caractère associé à ρ , la fonction zonale J_ρ vérifie,

$$J_\rho(x, y) = \frac{1}{d_\rho} \chi(xy^{-1}).$$

Les fonctions zonales ont donc une expression agréable en termes de caractères irréductibles de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.

Polynômes de Schur

Soit :

- * S_ρ le polynôme de Schur associé à ρ ,
- * $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ les valeurs propres de $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$,
- Les caractères polynômiaux de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ donnent

$$J_\rho(x, y) = \frac{1}{d_\rho} \chi(xy^{-1}) = \frac{1}{d_\rho} S_\rho(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

- On peut obtenir des fonctions zonales rationnelles en multipliant les précédentes par une puissance relative du déterminant de xy^{-1} :

$$\det(xy^{-1}) = e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_n}.$$

Polynômes de Schur

Soit :

- * S_ρ le polynôme de Schur associé à ρ ,
- * $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ les valeurs propres de $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$,
- Les caractères polynômiaux de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ donnent

$$J_\rho(x, y) = \frac{1}{d_\rho} \chi(xy^{-1}) = \frac{1}{d_\rho} S_\rho(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

- On peut obtenir des fonctions zonales rationnelles en multipliant les précédentes par une puissance relative du déterminant de xy^{-1} :

$$\det(xy^{-1}) = e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_n}.$$

Polynômes de Schur

Soit :

- * S_ρ le polynôme de Schur associé à ρ ,
- * $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ les valeurs propres de $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$,
- Les caractères polynômiaux de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ donnent

$$J_\rho(x, y) = \frac{1}{d_\rho} \chi(xy^{-1}) = \frac{1}{d_\rho} S_\rho(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

- On peut obtenir des fonctions zonales rationnelles en multipliant les précédentes par une puissance relative du déterminant de xy^{-1} :

$$\det(xy^{-1}) = e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_n}.$$

Bref historique lacunaire

La méthode de la programmation linéaire est due à **Delsarte**. Elle fut adaptée avec succès aux espaces compacts 2-points homogènes par **Kabatiansky** et **Levenshtein** et plus récemment à des situations plus générales comme les codes Grassmanniens [**Bachoc**], les codes de permutations [**Tarnanen**], ou les “ordered codes” [**Barg**].

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Codes et valeurs propres

Soit \mathcal{C} un code dans $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ et τ la fonction définie par :

$$\tau(x, y) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

où les $e^{i\theta_j}$ sont les valeurs propres de xy^{-1} .

\mathcal{C} est appelé un S -code si $x \neq y \in \mathcal{C}$ implique $\tau(x, y) \in S$.

Théorème crucial

Théorème

Soit $P = \sum_i c_i P_i$ combinaison linéaire de fonctions zonales avec, $c_i \geq 0$, $c_0 > 0$ ($P_0 = 1$), vérifiant $\Re(P)$ est négatif ou nul sur S , alors tout S -code vérifie :

$$|C| \leq \frac{P(\tau(x, x))}{c_0}.$$

Théorème crucial (Preuve)

Preuve

Soit $P = \sum_i c_i P_i$, $P_0 = 1$ et P_i fonctions zonales,

$$\sum_{x,y \in \mathcal{C}} P(\tau(x,y)) = \sum_{x=y \in \mathcal{C}} P(\tau(x,y)) + \sum_{x \neq y \in \mathcal{C}} P(\tau(x,y)) \leq |\mathcal{C}| P(\tau_0)$$

$$\sum_{x,y \in \mathcal{C}} P(\tau(x,y)) = \sum_{x,y \in \mathcal{C}} c_0 P_0(\tau(x,y)) + \text{termes positifs} \geq |\mathcal{C}|^2 c_0.$$

$$\frac{P(\tau_0)}{c_0} \geq |\mathcal{C}|.$$

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Codes et valeurs propres

Soit \mathcal{C} un code dans $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ et τ la fonction définie par :

$$\tau(x, y) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

où les $e^{i\theta_j}$ sont les valeurs propres de xy^{-1} .

Définition

La repartition des valeurs propres de \mathcal{C} est

$$\alpha_t := \frac{1}{|\mathcal{C}|} |\{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid \tau(x, y) = t\}|$$

Codes et valeurs propres

Soit \mathcal{C} un code dans $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ et τ la fonction définie par :

$$\tau(x, y) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

où les $e^{i\theta_j}$ sont les valeurs propres de xy^{-1} .

Définition

La repartition des valeurs propres de \mathcal{C} est

$$\alpha_t := \frac{1}{|\mathcal{C}|} |\{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid \tau(x, y) = t\}|$$

Repartition des valeurs propres

$$\alpha_t := \frac{1}{|\mathcal{C}|} |\{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid \tau(x, y) = t\}|$$

Proposition

- $\forall t \quad \alpha_t \geq 0$
- A l'exception d'un nombre fini de t , $\alpha_t = 0$
- $\sum_t \alpha_t = |\mathcal{C}|$
- $\alpha_{(1, \dots, 1)} = 1$
- Pour tout polynôme zonal P , $\sum_t \alpha_t P(t) \in \mathbb{R}^+$.

Problème linéaire

\mathcal{C} est appelé un S -code si $x \neq y \in \mathcal{C}$ implique $\tau(x, y) \in S$.

Soit $A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$.

Le programme linéaire suivant majore $A(X, S)$:

Programme Linéaire

$$\max(1 + \sum_{t \neq (1, \dots, 1)} \alpha_t)$$

$$\begin{cases} \forall t, \alpha_t \geq 0 \\ \forall t \notin S \cup \tau_0, \alpha_t = 0 \\ \forall \lambda, \sum_t \alpha_t P_\lambda(t) \geq 0 \end{cases}$$

Problème linéaire

\mathcal{C} est appelé un S -code si $x \neq y \in \mathcal{C}$ implique $\tau(x, y) \in S$.

Soit $A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$.

Le programme linéaire suivant majore $A(X, S)$:

Programme Linéaire

$$\max(1 + \sum_{t \neq (1, \dots, 1)} \alpha_t)$$

$$\begin{cases} \forall t, \alpha_t \geq 0 \\ \forall t \notin S \cup \tau_0, \alpha_t = 0 \\ \forall \lambda, \sum_t \alpha_t P_\lambda(t) \geq 0 \end{cases}$$

Problème linéaire

\mathcal{C} est appelé un S -code si $x \neq y \in \mathcal{C}$ implique $\tau(x, y) \in S$.

Soit $A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$.

Le programme linéaire suivant majore $A(X, S)$:

Programme Linéaire

$$\max(1 + \sum_{t \neq (1, \dots, 1)} \alpha_t)$$

$$\begin{cases} \forall t, \alpha_t \geq 0 \\ \forall t \notin S \cup \tau_0, \alpha_t = 0 \\ \forall \lambda, \sum_t \alpha_t P_\lambda(t) \geq 0 \end{cases}$$

Problème linéaire (Dual)

Le programme linéaire dual est

Programme Dual

$$\min(1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda})$$

$$\begin{cases} \forall \lambda, f_{\lambda} \geq 0 \\ \forall t \in S, \sum_{\lambda} f_{\lambda} P_{\lambda}(t) \leq 0 \quad (P_{\lambda} \text{ fonction zonale } \neq 1) \end{cases}$$

Toute valeur de $1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda}$ vérifiant les contraintes est une borne supérieure de $A(X, S)$.

$$A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$$

Problème linéaire (Dual)

Le programme linéaire dual est

Programme Dual

$$\min(1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda})$$

$$\begin{cases} \forall \lambda, f_{\lambda} \geq 0 \\ \forall t \in S, \sum_{\lambda} f_{\lambda} P_{\lambda}(t) \leq 0 \quad (P_{\lambda} \text{ fonction zonale } \neq 1) \end{cases}$$

Toute valeur de $1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda}$ vérifiant les contraintes est une borne supérieure de $A(X, S)$.

$$A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$$

Problème linéaire (Dual)

Le programme linéaire dual est

Programme Dual

$$\min(1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda})$$

$$\begin{cases} \forall \lambda, f_{\lambda} \geq 0 \\ \forall t \in S, \sum_{\lambda} f_{\lambda} P_{\lambda}(t) \leq 0 \quad (P_{\lambda} \text{ fonction zonale } \neq 1) \end{cases}$$

Toute valeur de $1 + \sum_{\lambda} f_{\lambda}$ vérifiant les contraintes est une borne supérieure de $A(X, S)$.

$$A(X, S) := \sup\{|\mathcal{C}|, \text{ pour tout } S\text{-code } \mathcal{C}\}$$

Plan

- 1 Codes unitaires
 - Introduction
 - Théorie des fonctions zonales
 - Propriétés des fonctions zonales
- 2 Bornes de la programmation linéaire
 - Théorème simple
 - Programme linéaire
 - Bornes

Ensembles S considérés

Les fonctions “diversity sum” et “diversity product” amènent à considérer les ensembles suivants :

- $S_{\Sigma}(s) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \leq ns \right\}$
- $S_{\Pi}(p) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \prod_{j=1}^n (1 - \cos \theta_j) \geq p^n \right\}$

$$d_{\Sigma}^2(A, B) := \frac{1}{4n} \|A - B\|^2 = \frac{\sum_j (1 - \cos \theta_j)}{2n},$$

$$d_{\Pi}^2(A, B) := \frac{1}{4} |\det(A - B)|^{\frac{2}{n}} = \frac{\prod_j (1 - \cos \theta_j)^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

Ensembles S considérés

Les fonctions “diversity sum” et “diversity product” amènent à considérer les ensembles suivants :

- $S_{\Sigma}(s) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \leq ns \right\}$
- $S_{\Pi}(p) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \prod_{j=1}^n (1 - \cos \theta_j) \geq p^n \right\}$

$$d_{\Sigma}^2(A, B) := \frac{1}{4n} \|A - B\|^2 = \frac{\sum_j (1 - \cos \theta_j)}{2n},$$

$$d_{\Pi}^2(A, B) := \frac{1}{4} |\det(A - B)|^{\frac{2}{n}} = \frac{\prod_j (1 - \cos \theta_j)^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

Ensembles S considérés

Les fonctions “diversity sum” et “diversity product” amènent à considérer les ensembles suivants :

- $S_{\Sigma}(s) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \leq ns \right\}$
- $S_{\Pi}(p) = \left\{ (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) : \prod_{j=1}^n (1 - \cos \theta_j) \geq p^n \right\}$

$$d_{\Sigma}^2(A, B) := \frac{1}{4n} \|A - B\|^2 = \frac{\sum_j (1 - \cos \theta_j)}{2n},$$

$$d_{\Pi}^2(A, B) := \frac{1}{4} |\det(A - B)|^{\frac{2}{n}} = \frac{\prod_j (1 - \cos \theta_j)^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

Bornes théoriques “diversity sum”

- $|C| \leq \frac{2(\sum \mathcal{V})^2}{2(\sum \mathcal{V})^2 - 1}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n^2(\sum \mathcal{V})^2}{4n^2(\sum \mathcal{V})^2 - (2n^2 - 1)}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 > \frac{2n^2 - 1}{4n^2}$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{16n^2(\sum \mathcal{V})^2}{2n(2n-1)(\sum \mathcal{V})^2 - (2n^2 - n - 2)}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 \geq \frac{2n^2 - n - 2}{2n(2n-1)}$, (deg. 3).

Bornes théoriques “diversity sum”

- $|C| \leq \frac{2(\sum \mathcal{V})^2}{2(\sum \mathcal{V})^2 - 1}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n^2(\sum \mathcal{V})^2}{4n^2(\sum \mathcal{V})^2 - (2n^2 - 1)}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 > \frac{2n^2 - 1}{4n^2}$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{16n^2(\sum \mathcal{V})^2}{2n(2n-1)(\sum \mathcal{V})^2 - (2n^2 - n - 2)}$, si $(\sum \mathcal{V})^2 \geq \frac{2n^2 - n - 2}{2n(2n-1)}$, (deg. 3).

Bornes théoriques “diversity sum”

- $|C| \leq \frac{2(\Sigma \mathcal{V})^2}{2(\Sigma \mathcal{V})^2 - 1}$, si $(\Sigma \mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n^2(\Sigma \mathcal{V})^2}{4n^2(\Sigma \mathcal{V})^2 - (2n^2 - 1)}$, si $(\Sigma \mathcal{V})^2 > \frac{2n^2 - 1}{4n^2}$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{16n^2(\Sigma \mathcal{V})^2}{2n(2n-1)(\Sigma \mathcal{V})^2 - (2n^2 - n - 2)}$, si $(\Sigma \mathcal{V})^2 \geq \frac{2n^2 - n - 2}{2n(2n-1)}$, (deg. 3).

Bornes théoriques “diversity product”

- $|C| \leq \frac{2(\Pi\mathcal{V})^2}{2(\Pi\mathcal{V})^2-1}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n(\Pi\mathcal{V})^2}{4n(\Pi\mathcal{V})^2-(2n-1)}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{2n-1}{4n}$, $n \geq 3$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{8(\Pi\mathcal{V})^6+4(\Pi\mathcal{V})^4+8(\Pi\mathcal{V})^2}{8(\Pi\mathcal{V})^6-\frac{1}{4}}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 \geq \frac{1}{2}$, $n = 2$, (deg. 2).

Bornes théoriques “diversity product”

- $|C| \leq \frac{2(\Pi\mathcal{V})^2}{2(\Pi\mathcal{V})^2-1}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n(\Pi\mathcal{V})^2}{4n(\Pi\mathcal{V})^2-(2n-1)}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{2n-1}{4n}$, $n \geq 3$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{8(\Pi\mathcal{V})^6+4(\Pi\mathcal{V})^4+8(\Pi\mathcal{V})^2}{8(\Pi\mathcal{V})^6-\frac{1}{4}}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 \geq \frac{1}{2}$, $n = 2$, (deg. 2).

Bornes théoriques “diversity product”

- $|C| \leq \frac{2(\Pi\mathcal{V})^2}{2(\Pi\mathcal{V})^2-1}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{1}{2}$, (deg. 1),
- $|C| \leq \frac{8n(\Pi\mathcal{V})^2}{4n(\Pi\mathcal{V})^2-(2n-1)}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 > \frac{2n-1}{4n}$, $n \geq 3$, (deg. 2),
- $|C| \leq \frac{8(\Pi\mathcal{V})^6+4(\Pi\mathcal{V})^4+8(\Pi\mathcal{V})^2}{8(\Pi\mathcal{V})^6-\frac{1}{4}}$, si $(\Pi\mathcal{V})^2 \geq \frac{1}{2}$, $n = 2$, (deg. 2).

Bornes numériques

Nous comparons les résultats numériques avec les articles précédents :

- G.Han and J.Rosenthal : bornes obtenues par calcul de volumes de sphères (B1 and B2).
- X.B.Liang and X.G.Xia : bornes obtenues par la borne supérieure de Coxeter (LX).

Bornes numériques ($n=2$)Bornes pour $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ pour $n = 2$

N	24	48	64	80
LX	0.6746	0.6193	0.5969	0.5799
B1	0.7598	0.6603	0.6131	0.5932
B2	0.7794	0.6734	0.6235	0.6026
LP d_Σ	0.6547	0.5797	0.5488	0.5254
LP d_Π	0.5730	0.4989	0.4711	0.4504

N	100	120	128	1000
LX	0.5632	0.5499	0.5452	
B1	0.5578	0.5425	0.5347	0.3270
B2	0.5654	0.5496	0.5415	0.3285
LP d_Σ	0.4999	0.4816	0.4753	0.2964
LP d_Π	0.4301	0.4144	0.4089	0.2574

Bornes numériques ($n=2$)Bornes pour $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ pour $n = 2$

N	24	48	64	80
LX	0.6746	0.6193	0.5969	0.5799
B1	0.7598	0.6603	0.6131	0.5932
B2	0.7794	0.6734	0.6235	0.6026
LP d_Σ	0.6547	0.5797	0.5488	0.5254
LP d_Π	0.5730	0.4989	0.4711	0.4504

N	100	120	128	1000
LX	0.5632	0.5499	0.5452	
B1	0.5578	0.5425	0.5347	0.3270
B2	0.5654	0.5496	0.5415	0.3285
LP d_Σ	0.4999	0.4816	0.4753	0.2964
LP d_Π	0.4301	0.4144	0.4089	0.2574

Bornes numériques ($n=3$)Bornes pour $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ pour $n = 3$

N	24	48	64	80
LP d_Σ	0.7178	0.6939	0.6797	0.6692
LP d_Π	0.6431	0.5942	0.5752	0.5628

N	100	120	128	1000
LP d_Σ	0.6598	0.6532	0.6511	0.5586
LP d_Π	0.5482	0.5369	0.5332	0.4330

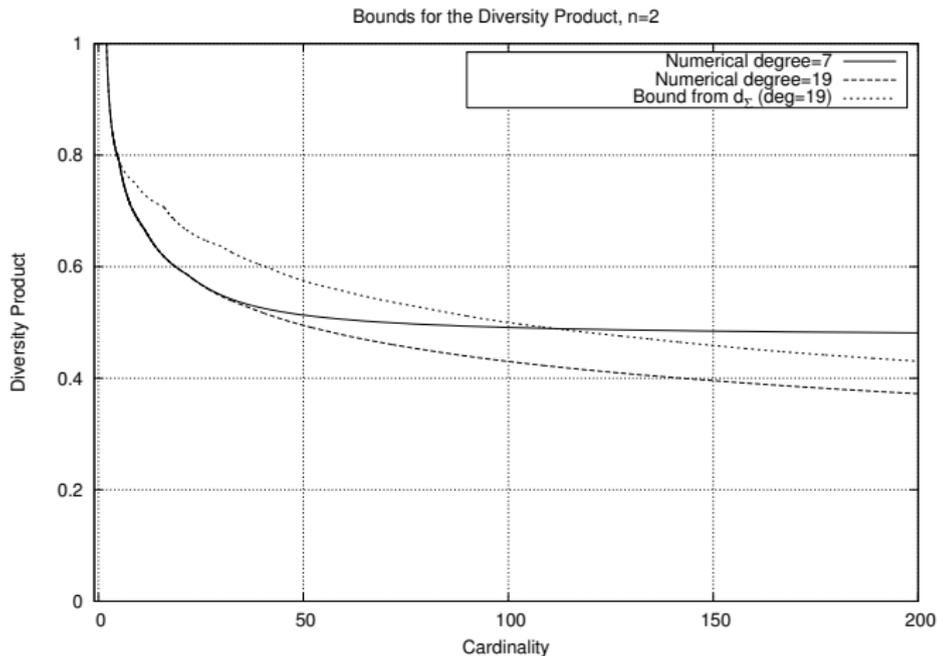
Borne pour $d_\Sigma \geq$ Borne pour d_Π

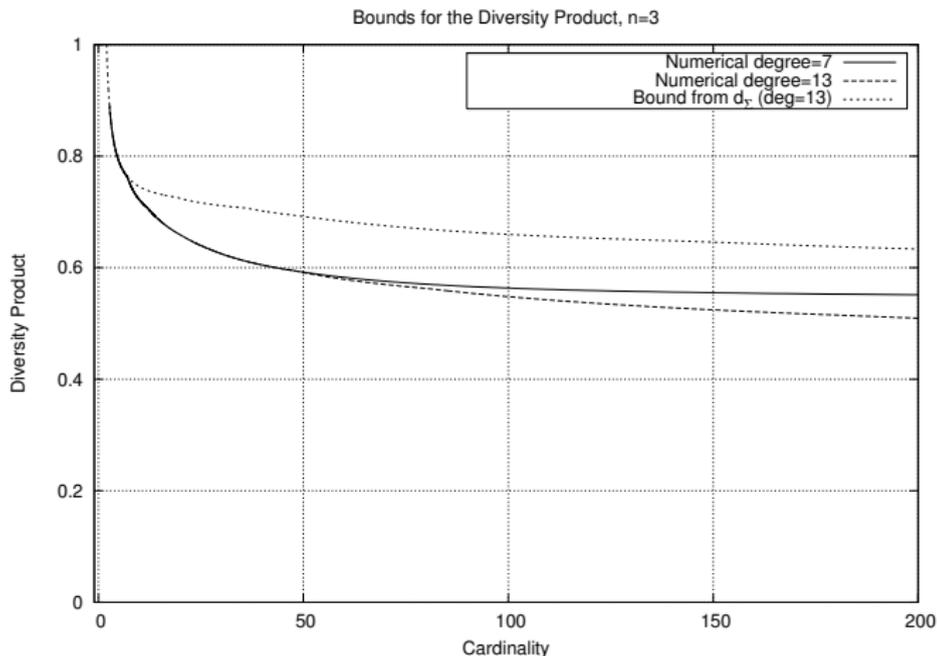
Bornes numériques ($n=3$)Bornes pour $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ pour $n = 3$

N	24	48	64	80
LP d_Σ	0.7178	0.6939	0.6797	0.6692
LP d_Π	0.6431	0.5942	0.5752	0.5628

N	100	120	128	1000
LP d_Σ	0.6598	0.6532	0.6511	0.5586
LP d_Π	0.5482	0.5369	0.5332	0.4330

Borne pour $d_\Sigma \geq$ Borne pour d_Π

Bornes numériques ($n=2$)

Bornes numériques ($n=3$)

Résumé

- Nous avons trouvé les fonctions zonales de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ (...)
- Nous avons déduit des bornes théoriques (obstacles...),
- Nous avons implémenté des programmes numériques,
- Les bornes obtenues améliorent les bornes précédemment existantes (...)
- La méthode de la programmation linéaire permet de traiter directement le “diversity product”.

- Travaux en cours
 - Bornes asymptotiques
 - Codes optimaux (...)

Résumé

- Nous avons trouvé les fonctions zonales de $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ (...)
- Nous avons déduit des bornes théoriques (obstacles...),
- Nous avons implémenté des programmes numériques,
- Les bornes obtenues améliorent les bornes précédemment existantes (...)
- La méthode de la programmation linéaire permet de traiter directement le “diversity product”.

- Travaux en cours
 - Bornes asymptotiques
 - Codes optimaux (...)