

Identification de paramètres pour des systèmes quantiques

Mazyar Mirrahimi

Travail en collaboration avec P. Rouchon

Plan de la présentation

1 Systèmes quantiques et la mesure (avec P. Rouchon)

- Équation de Schrödinger bi-linéaire
- Équation de Lindblad
- Simplification de modèle : Schrödinger + mesure

2 Identifiabilité (avec C. Le Bris, G. Turinici et H. Rabitz)

- Formulation de problème
- Identifiabilité

3 Identification et observateurs (avec P. Rouchon)

- Définition d'observateur
- Analyse de convergence
- Robustesse

4 Conclusion

Propriétés particulières du concept de la **mesure** pour les systèmes quantiques



Difficultés pour :

- Contrôle par feedback des systèmes quantiques ;
- Estimation de paramètres pour des systèmes quantiques.

Modèle fondamental de la mécanique quantique

Équation de Schrödinger :

$$i \frac{d}{dt} \Psi = (H_0 + u(t)H_1) \Psi \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0.$$

$\Psi(t) \in \mathcal{H}$: fonction d'onde,

H_0 et H_1 : opérateurs auto-adjoints,

$u(t) \in \mathbb{R}$: contrôle scalaire,

$$\|\Psi_0\|_{\mathcal{H}} = 1 \implies \|\Psi(t)\|_{\mathcal{H}} = 1.$$

Équation de Schrödinger : changement de langage

Opérateur densité ρ : opérateur auto-adjoint non-négatif

$$\rho(t) = \Psi(t)\Psi^*(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_0 + u(t)H_1, \rho(t)]$$

$$\text{Tr}(\rho_0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tr}(\rho(t)) = 1$$

Mécanique quantique non-dissipative

$$\text{Tr}(\rho^2(t)) = 1.$$

Décohérence

Décohérence : intrication avec l'environnement

Système atomique + Champs quantiques (environnement) :

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C$:

$$i \frac{d}{dt} \rho = [(H_A + H_{AC} + H_C), \rho].$$

Sous-système atomique :

$$\rho_A = \text{Tr}_C(\rho),$$

où $\text{Tr}_C(Z) : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$:

$$\text{Tr}(\text{Tr}_C(Z)X) = \text{Tr}(Z(X \otimes Id)) \quad \forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A).$$

Décohérence : Lindblad

Sous les hypothèses : 1- couplage faible $A - C$; 2- grand environnement oubliant vite son passé de l'interaction avec A :

Équations de Lindblad !

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_0 + u(t)H_1, \rho(t)] + \sum_j L_j \rho(t) L_j^* - \frac{1}{2} L_j^* L_j \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_j^* L_j$$

$\{L_j\}$: opérateurs de sauts quantiques (pas forcément auto-adjoints)

L_j^* : conjuguée Hermitienne de L_j

Schrödinger : $\text{Tr}(\rho^2(t)) = 1$, **Lindblad** : $\text{Tr}(\rho^2(t)) \leq 1$.

ρ n'est plus de la forme $\Psi\Psi^*$: **effet dissipatif**.

L'appareil de mesure fait partie de l'environnement couplé au système.

Exemple : ion Ca^+

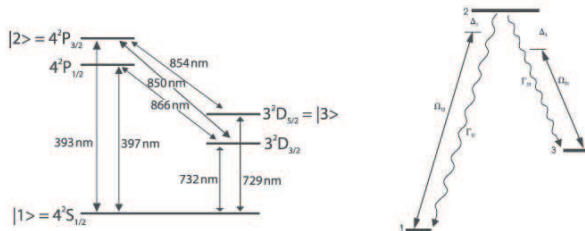


FIG.: Niveaux d'énergies de $^{40}\text{Ca}^+$ (Maurer et. al., New J. Physics, 6 (94), 2004).

Durées de vie atomique :

$D_{5/2}$: 1.16 s.

$P_{3/2}$: 7.4 ns.

Observable physique à Mesurer : Population de l'état $|2\rangle$.

Problématique

Premier résultat

Pour certains types de systèmes physiques, vérifiant des conditions particulières concernant les fréquences de transition et les durées de vie atomiques, la dissipation due à l'appareil de mesure peut être négligée.

On obtient alors des systèmes quantiques modélisés par des équations de Schrödinger simples et où l'on dispose des mesures continues en temps.

M. Mirrahimi et P. Rouchon, CDC 2006, San Diego.

Cadre de travail

Décohérence dû à la mesure :

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + u(t)H_1, \rho] + \Gamma \mathcal{D}[Q](\rho)$$
$$Y = \Gamma \text{Tr} \left(Q^\dagger Q \rho \right),$$

où

$$\mathcal{D}[Q](\rho) = \frac{1}{2}(2Q\rho Q^\dagger - Q^\dagger Q\rho - \rho Q^\dagger Q),$$

$Q = |g\rangle \langle e|$: l'opérateur de l'émission spontanée,

$Q^\dagger Q = |e\rangle \langle e|$: l'opérateur de projection sur $|e\rangle$, observable physique,

$\Gamma > 0$: Constante liée à l'inverse de la durée de vie de l'état $|e\rangle$.

Cadre de travail

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + u(t)H_1, \rho] + \Gamma\mathcal{D}[Q](\rho)$$
$$Y = \Gamma\text{Tr}\left(Q^\dagger Q\rho\right),$$

$\{\lambda_j\}_{j=1}^N$: valeurs propres de H_0 ,

$\omega_{ij} = |\lambda_i - \lambda_j|$: fréquences de transitions.

$u(t) = \sum_{i,j} u_{ij}(t) \sin(\omega_{ij}t)$: contrôle dans le régime résonnant, u_{ij} lentement variables.

Hypothèses principales :

$$u_{ij} \ll \Gamma \ll \omega_{ij}.$$

Moyennisation

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + u(t)H_1, \rho] + \Gamma(2Q\rho Q^\dagger - Q^\dagger Q\rho - \rho Q^\dagger Q),$$

Par moyennisation ($\Gamma \ll \omega_{jj}$)

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho] + \frac{\bar{\Gamma}}{2\epsilon}(2Q\rho Q^\dagger - Q^\dagger Q\rho - \rho Q^\dagger Q), \quad \epsilon \ll 1,$$

H : termes séculaires de uUH_1U^\dagger avec $U = e^{iH_0t}$.

Approximation lent/rapide

Changement de variable :

$$\rho_f = P\rho + \rho P - P\rho P \quad , \quad \rho_s = (1 - P)\rho(1 - P) + Q\rho Q^\dagger,$$

\longleftrightarrow

$$\rho = \rho_s + \rho_f - QP\rho_fPQ^\dagger,$$

où

$$P = Q^\dagger Q = |e\rangle \langle e|.$$

forme standard de Tikhonov :

$$\frac{d}{dt}\rho_f = -\frac{\bar{\Gamma}}{2\epsilon}(\rho_f + P\rho_fP) - i(P[H, \rho] + [H, \rho]P - P[H, \rho]P),$$

$$i\frac{d}{dt}\rho_s = (1 - P)[H, \rho](1 - P) + Q[H, \rho]Q^\dagger.$$

Systèmes lents/rapides

Système :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= f(x, y) \\ \frac{d}{dt}y &= -\frac{1}{\epsilon}Ay + g(x, y).\end{aligned}$$

Variété invariante attractive :

$$y = \epsilon A^{-1}g(x, 0) + O(\epsilon^2),$$

Restriction de la dynamique lente sur la variété attractive :

$$\frac{d}{dt}x = f(x, \epsilon A^{-1}g(x, 0)) + O(\epsilon^2) = f(x, 0) + \epsilon \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x,0} A^{-1}g(x, 0) + O(\epsilon^2).$$

Variété centrale

Dynamique rapide :

$$\rho_f = \frac{-2i\epsilon}{\hbar\bar{\Gamma}} (PH\rho_s - \rho_sHP) + O(\epsilon^2).$$

Dynamique lente

$$\frac{d}{dt}\rho_s = -i[H_s, \rho_s] + 4\epsilon\bar{\Gamma} \left(\bar{Q}\rho_s\bar{Q}^\dagger - \frac{1}{2}\bar{Q}^\dagger\bar{Q}\rho_s - \frac{1}{2}\rho_s\bar{Q}^\dagger\bar{Q} \right) + O(\epsilon^2),$$

$$Y(t) = 4\epsilon\bar{\Gamma}\text{Tr}(\bar{Q}^\dagger\bar{Q}\rho_s) + O(\epsilon^2).$$

où

$$H_s = (1 - P)H(1 - P),$$

et

$$\bar{Q} = \frac{1}{\hbar\bar{\Gamma}}(1 - P)QH(1 - P), \quad \bar{Q}^\dagger = \frac{1}{\hbar\bar{\Gamma}}(1 - P)HQ^\dagger(1 - P).$$

Résultat

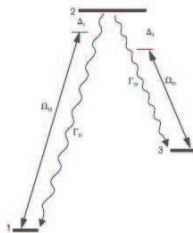
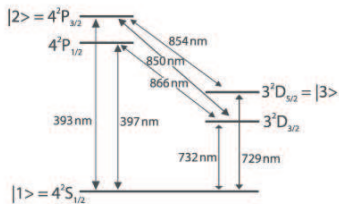
En une première approximation :

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -i[H_S, \rho_S]$$
$$Y(t) = 4\epsilon\bar{\Gamma}\text{Tr}\left(\bar{Q}^\dagger \bar{Q}\rho_S\right).$$

→

Équation de Schrödinger + mesure continue

Ion Ca^+



Système conservatif de dimension 2 (engendré par $|1\rangle$ et $|3\rangle$)

+

Mesure continue.

Plan de la présentation

1 Systèmes quantiques et la mesure (avec P. Rouchon)

- Équation de Schrödinger bi-linéaire
- Équation de Lindblad
- Simplification de modèle : Schrödinger + mesure

2 Identifiabilité (avec C. Le Bris, G. Turinici et H. Rabitz)

- Formulation de problème
- Identifiabilité

3 Identification et observateurs (avec P. Rouchon)

- Définition d'observateur
- Analyse de convergence
- Robustesse

4 Conclusion

Identification : formulation de problème

Équation de Schrödinger + mesures continues en temps
(dimension finie)

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = (H_0 + V + u(t)\mu) \Psi(t),$$
$$Y_j(t) = \langle \Psi | O_j | \Psi \rangle = \langle O_j \Psi(t), \Psi(t) \rangle$$

$\Psi(t) \in \mathbb{C}^N$: Fonction d'onde ($\|\Psi(t)\|^2 = cte = 1$),

$H_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}$: Opérateur d'énergie cinétique (connue),

$V \in \mathbb{C}^{N \times N}$: Potentiel interne (connu ou inconnu),

$\mu \in \mathbb{C}^{N \times N}$: Hamiltonien d'interaction (inconnu),

$O_j \in \mathbb{C}^{N \times N}$: Observables physiques (connus),

$u(t)$: Champ de contrôle (laser),

H_0, V, μ, O_j : Matrices auto-adjointes.

But : identifier μ et/ou V , mesurant les $Y_j(t)$ pour différents choix de $u(t)$.

Identifiabilité : cadre de travail

Supposer $H = H_0 + V$ connu et identifier μ

Observables physiques :

$$O_j = P_j = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \quad H\phi_j = \lambda_j\phi_j \quad j = 1, \dots, N.$$
$$\Rightarrow$$
$$y_j(t) = |\langle\Psi(t), \phi_j\rangle|^2$$

Problématique

Nous nous intéressons au problème d'unicité de la solution du problème inverse, étant données les mesures continue $y_j(t)$ pour différents champs $u(t)$.

Identifiabilité : résultat

Théorème

$$\begin{aligned}i\dot{\Psi}_1 &= (H + u(t) \mu_1) \Psi_1, & y_j^1(t) &= |\langle \Psi_1(t), \phi_j \rangle|^2 \\i\dot{\Psi}_2 &= (H + u(t) \mu_2) \Psi_2, & y_j^2(t) &= |\langle \Psi_2(t), \phi_j \rangle|^2, \\y_j^1(t) &= y_j^2(t) & \forall t, \forall u(t), \forall j.\end{aligned}$$

Alors sous les hypothèses **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**, il existe $\{\alpha_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i, j = 1, \dots, N, \quad (\mu_1)_{ij} = e^{i(\alpha_i - \alpha_j)} (\mu_2)_{ij}.$$

Hypothèses

- (A1)** L'un des systèmes est contrôlable.
- (A2)** $\lambda_{i_1} - \lambda_{j_1} \neq \lambda_{i_2} - \lambda_{j_2}$ pour $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$.
- (A3)** $\langle \phi_j | \mu_1 | \phi_j \rangle = \langle \phi_j | \mu_2 | \phi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N.$

Identifiabilité : schéma de preuve

On a

$$\Im(\langle \mu_1 \Psi_1(t), \phi_j \rangle \langle \phi_j, \Psi_1(t) \rangle) = \Im(\langle \mu_2 \Psi_2(t), \phi_j \rangle \langle \phi_j, \Psi_2(t) \rangle).$$

Choisissons $u(t)$ pour avoir

$$\Psi_1(T) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \phi_j, \quad \Rightarrow \quad \Psi_2(T) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\alpha_j} \phi_j.$$

En prenant $u(t) \equiv 0$ pour $t > T$

$$\Psi_1(t+T) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda_j t} \phi_j, \quad \Psi_2(t+T) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda_j t} e^{i\alpha_j} \phi_j,$$

\Rightarrow

$$\sum_{j \neq i} \sin(\omega_{ij}s + \theta_{ij}^1) |\langle \mu_1 \phi_j | \phi_i \rangle| = \sum_{j \neq i} \sin(\omega_{ij}s + \alpha_j - \alpha_i + \theta_{ij}^2) |\langle \mu_2 \phi_j | \phi_i \rangle|,$$

où

$$\theta_{ij}^1 = \arg(\langle \mu_1 \phi_j, \phi_i \rangle) \quad , \quad \theta_{ij}^2 = \arg(\langle \mu_2 \phi_j, \phi_i \rangle) \quad , \quad \omega_{ij} \equiv \lambda_j - \lambda_i.$$

Identifiabilité : extension

V et μ inconnus

Observables physiques :

$$O_j = P_j = |e_j\rangle\langle e_j|, \quad \Rightarrow \quad y_j(t) = |\langle \Psi(t), e_j \rangle|^2.$$

où $\{e_j; j = 1, \dots, N\}$ est une base quelconque.

Hypothèse supplémentaire

Les valeurs propres de $H = H_0 + V$ sont connues.

Hypothèse pertinente par les méthodes de spectroscopie.

C. Le Bris, M. Mirrahimi, H. Rabitz et G. Turinici, ESAIM :COCV, à paraître.

Plan de la présentation

1 Systèmes quantiques et la mesure (avec P. Rouchon)

- Équation de Schrödinger bi-linéaire
- Équation de Lindblad
- Simplification de modèle : Schrödinger + mesure

2 Identifiabilité (avec C. Le Bris, G. Turinici et H. Rabitz)

- Formulation de problème
- Identifiabilité

3 Identification et observateurs (avec P. Rouchon)

- Définition d'observateur
- Analyse de convergence
- Robustesse

4 Conclusion

Identification : cas test

Système à 2 niveaux :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = (H + u(t) \theta \mu) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},$$

$$y_1(t) = \langle P_1 \Psi(t), \Psi(t) \rangle \quad , \quad y_2(t) = \langle P_2 \Psi(t), \Psi(t) \rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

But : identifier θ .

Loi de contrôle : $u(t) = A \sin(t)$ résonnant avec la fréquence naturelle du système $\omega = 1 - 0 = 1$.

Identification et observateurs

Un observateur intuitif :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Psi} = -i(H + \hat{\theta}u(t)\mu) \tilde{\Psi} + \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^2 (y_j - \tilde{y}_j) P_j \tilde{\Psi}$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho} = -i[H + \hat{\theta}u(t)\mu, \tilde{\rho}] + \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^2 (y_j(t) - \tilde{y}_j(t))(P_j \tilde{\rho} + \tilde{\rho} P_j).$$

Normalisation : $\hat{\rho} = \tilde{\rho} / \text{Tr}(\tilde{\rho})$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i[H + \hat{\theta}u(t)\mu, \hat{\rho}] + \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^2 (y_j(t) - \tilde{y}_j(t))(P_j \hat{\rho} + \hat{\rho} P_j - 2\text{Tr}(P_j \hat{\rho}) \hat{\rho}).$$

Problème :

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = ?$$

Identification et observateurs

Fonction de Lyapounov : $(e_j(t) = y_j(t) - \hat{y}_j(t))$

$$\mathcal{V}(t, \hat{\rho}, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (y_j(t) - \hat{y}_j(t))^2 + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \hat{\theta})^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{V} = & \sum_{j=1}^2 \left(i\hat{\theta}(t) u(t) \text{Tr} (P_j[\mu, \hat{\rho}(t)]) - i\theta u(t) \text{Tr} (P_j[\mu, \rho(t)]) \right) e_j(t) \\ & + \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\theta}}(\hat{\theta}(t) - \theta) - \frac{2}{\Gamma} \sum_l \sum_{k < l} \text{Tr} (P_k \hat{\rho}) \text{Tr} (P_l \hat{\rho}) (e_k - e_l)^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = -i\gamma u(t) \sum_{j=1}^2 \text{Tr} (P_j[\mu, \hat{\rho}]) e_j(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V} = \sum_{j=1}^2 (i\theta u(t) \text{Tr} (P_j[\mu, \hat{\rho} - \rho])) - \frac{2}{\Gamma} \sum_l \sum_{k < l} \text{Tr} (P_k \hat{\rho}) \text{Tr} (P_l \hat{\rho}) (e_k - e_l)^2$$

Simulations

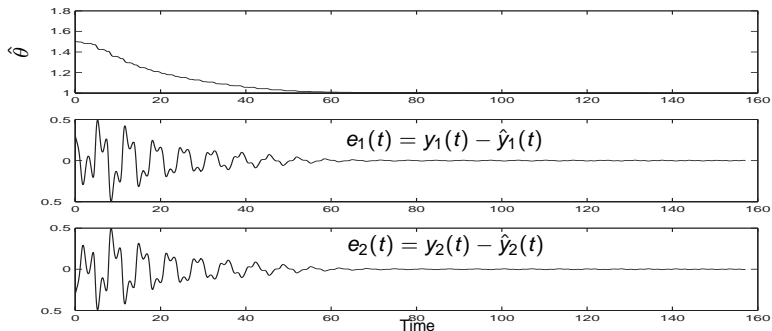
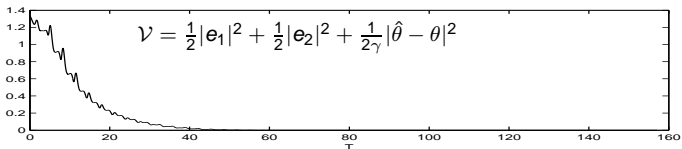


FIG.: $\rho_0 = \Psi_0 \Psi_0^\dagger$ et $\hat{\rho}_0 = \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0^\dagger$ avec $\Psi_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ et $\hat{\Psi}_0 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$; $\theta = 1$ et $\hat{\theta}(0) = 1.5$;



Analyse de convergence

Changement de variables :

$$\xi(t) = e^{itH} \rho(t) e^{-itH} \quad , \quad \hat{\xi}(t) = e^{itH} \hat{\rho}(t) e^{-itH}$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} \xi = -iA\theta \sin(t) [e^{itH} \mu e^{-itH}, \xi],$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\xi} = -iA\hat{\theta} \sin(t) [e^{itH} \mu e^{-itH}, \hat{\xi}] +$$

$$\frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^2 \left(P_j \hat{\xi} + \hat{\xi} P_j - 2 \text{Tr} \left(P_j \hat{\xi} \right) \hat{\xi} \right) \left(\text{Tr} \left(P_j \xi \right) - \text{Tr} \left(P_j \hat{\xi} \right) \right),$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = -i\gamma A \sin(t) \sum_{j=1}^2 \text{Tr} \left(P_j [e^{itH} \mu e^{-itH}, \hat{\xi}] \right) \left(\text{Tr} \left(P_j \xi \right) - \text{Tr} \left(P_j \hat{\xi} \right) \right).$$

Analyse de convergence

Moyennisation et élimination des termes haute-fréquences (A petit) :

$$\frac{d}{dt}\xi_{av} = -\frac{1}{2}A\theta[H_{eff}, \xi_{av}],$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\xi}_{av} = & -\frac{1}{2}A\hat{\theta}_{av}[H_{eff}, \hat{\xi}_{av}] + \\ & \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^2 \left(P_j \hat{\xi}_{av} + \hat{\xi}_{av} P_j - 2\text{Tr} \left(P_j \hat{\xi}_{av} \right) \hat{\xi} \right) \left(\text{Tr} \left(P_j \xi_{av} \right) - \text{Tr} \left(P_j \hat{\xi}_{av} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}_{av} = -\frac{1}{2}\gamma A \sum_{j=1}^2 \text{Tr} \left(P_j [H_{eff}, \hat{\xi}_{av}] \right) \left(\text{Tr} \left(P_j \xi_{av} \right) - \text{Tr} \left(P_j \hat{\xi}_{av} \right) \right),$$

où

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analyse de convergence

Nouvelles variables :

$$x_1 = \text{Tr}(\mu \xi_{av}), x_2 = \text{Tr}((P_2 - P_1)\xi_{av}) \quad , \quad \hat{x}_1 = \text{Tr}(\mu \hat{\xi}_{av}), \hat{x}_2 = \text{Tr}((P_2 - P_1)\hat{\xi}_{av})$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{dt}x_1 = -A\theta x_2,$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = A\theta x_1,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_1 = -A\hat{\theta} \hat{x}_2 + \frac{1}{\Gamma}\hat{x}_1 \hat{x}_2 (\hat{x}_2 - x_2),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_2 = A\hat{\theta} \hat{x}_1 - \frac{1}{\Gamma}(1 - \hat{x}_2)(1 + \hat{x}_2)(\hat{x}_2 - x_2),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -2\gamma A \hat{x}_1 (\hat{x}_2 - x_2).$$

Analyse de convergence

Changement de variables \longrightarrow Repère tournant de (x_1, x_2) ,
+
Moyennisation et élimination des haute-fréquences ($2A\theta$ et $4A\theta$)
(Γ grand et γ petit)

$$\frac{d}{dt}z_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}z_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{z}_{1,av} = -A(\hat{\theta}_{av} - \theta)\hat{z}_{2,av} - \frac{1}{2\Gamma}(\hat{z}_{1,av} - z_1)(1 - \hat{z}_{1,av}^2),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{z}_{2,av} = A(\hat{\theta}_{av} - \theta)\hat{z}_{1,av} - \frac{1}{2\Gamma}(\hat{z}_{2,av} - z_2)(1 - \hat{z}_{2,av}^2),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\gamma A(z_1\hat{z}_{2,av} - z_2\hat{z}_{1,av}).$$

Analyse de convergence

Système linéarisé :

$$\frac{d}{dt}\delta z_1 = -A\delta\theta z_2 - \frac{1}{2\Gamma}\delta z_1(1 - z_1^2),$$

$$\frac{d}{dt}\delta z_2 = A\delta\theta z_1 - \frac{1}{2\Gamma}\delta z_2(1 - z_2^2),$$

$$\frac{d}{dt}\delta\theta = -\gamma A(z_1\delta z_2 - z_2\delta z_1),$$

Fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{W}(\delta\theta, \delta z_1, \delta z_2) = \frac{1}{2\gamma}\delta\theta^2 + \frac{1}{2}\delta z_1^2 + \frac{1}{2}\delta z_2^2.$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W} = -\frac{1}{2\Gamma}\delta z_1^2(1 - z_1^2) - \frac{1}{2\Gamma}\delta z_2^2(1 - z_2^2).$$

Comme $\xi_{av} = \Psi_{av}\Psi_{av}^\dagger$ est pur :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1.$$

Analyse de convergence

LaSalle :

$$\text{ensemble } \omega\text{-limite} \subset \left\{ \delta z_1^2(1 - z_1^2) = 0 \quad \text{et} \quad \delta z_2^2(1 - z_2^2) = 0 \right\}.$$

Ok, si pour l'état initial

$$\text{Tr}(P_1\rho_0) \neq 0, \quad \text{Tr}(P_2\rho_0) \neq 0, \quad (\rho_0)_{12} + (\rho_0)_{21} \neq 1$$

Excitabilité du système.

Identification : cas général

Système à N niveaux :

$$i \frac{d}{dt} \Psi = (H + u(t) \mu) \Psi, \quad \Psi \in \mathbb{C}^N,$$

$$H = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi_j \phi_j^\dagger, \quad \mu = \sum_{k=1}^N \sum_{l < k} \mu_{lk} (\phi_l \phi_k^\dagger + \phi_k \phi_l^\dagger), \quad \mu_{lk} \in \mathbb{R}$$

Sorties : $y_j(t) = \text{Tr}(P_j \rho(t))$, $P_j = \phi_j \phi_j^\dagger$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Observateur :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i[H + u(t) \hat{\mu}, \hat{\rho}] + \frac{1}{\Gamma} \sum_{j=1}^N (P_j \hat{\rho} + \hat{\rho} P_j - 2 \text{Tr}(P_j \hat{\rho}) \hat{\rho}) (y_j(t) - \text{Tr}(P_j \hat{\rho}))$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\mu}_{lk} = -i\gamma u(t) \sum_{j=1}^N \text{Tr} \left(P_j \left[(\phi_l \phi_k^\dagger + \phi_k \phi_l^\dagger), \hat{\rho} \right] \right) \mathbf{e}_j(t), \quad l < k.$$

M. Mirrahimi et P. Rouchon, arXiv :math-ph/0703024

Robustesse

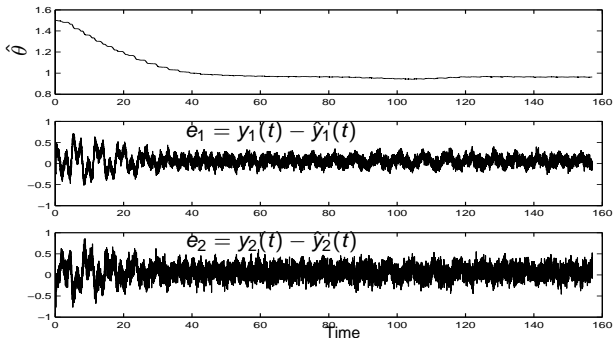
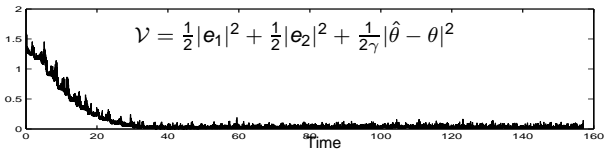


FIG.: Mesures bruitées : $y_1(t) = \text{Tr}(P_1 \rho(t - 0.3)) + 0.06 + 0.07 w_1$, et $y_2(t) = \text{Tr}(P_2 \rho(t - 0.3)) + 0.07 + 0.12 w_2$,



Robustesse

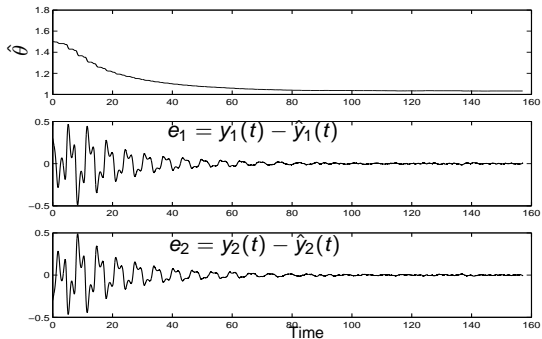
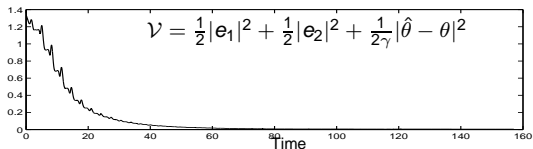


FIG.: Contrôle (laser) bruité : $u(t) = (A + 0.03) \sin(t) + 0.07 w$,



Conclusion et horizons

Chemists :

“Toutes les populations” est trop d’information à demander au niveau expérimental.

Questions :

- 1 Peut-on considérer la mesure d’autres observables physiques qui rendent le système identifiable avec moins d’information ?
- 2 Pour les populations et en utilisant des champs de contrôle plus sophistiqués, peut-on rendre le système identifiable avec un nombre plus petit de populations à mesurer ?