

# Structure fractale d'un dendrogramme

Casanova-del-Angel, Francisco

Section d'Études de Troisième Cycle et de la Recherche de l'École Supérieure d'Ingénierie et d'Architecture,  
Unité « Adolfo López Mateos » de l'Institut Polytechnique National, Mexico, Mexique.

[fcasanova@ipn.mx](mailto:fcasanova@ipn.mx) et [fcasanova49@prodigy.net.mx](mailto:fcasanova49@prodigy.net.mx)

**Résumé** La structure fractale présentée par la polygonale formée par les unions des points moyens des sommets, des nœuds ou des crêtes des classes terminales est présentée. Son fractal générateur, les particularités de sa construction et la façon de mesurer ses segments sont définis. La propriété d'échelle inverse qu'il possède, le type de maillage, sa propriété de symétrie axiale et un théorème sur la transformation d'affinité linéaire sont posés. Enfin, deux applications avec des données réelles servent d'exemple.

**Mots clés:** dendrogramme, fractale, propagation d'une fractale, symétrie axiale et courbe génératrice.

**Abstract** The fractal structure shown by the polygonal created by unions of middle points of vertices, nodes or peaks of dendrograms a terminal class is presented. Its generating fractal, the details of its construction, and the way to measure its segments are defined; its property of inverted scale, the type of meshing, its property of axial symmetry and a theorem on transformation of linear affinity are considered. This is exemplified by means of two applications with real data.

**Key words:** dendrogram, fractal, fractal propagation, axial symmetry and generating curve.

## Introduction

La classification est une technique mathématique utilisée pour la taxonomisation et la description factorielle des données étudiées. La classification, hiérarchique ou pas, a au sein de l'analyse des données une présence importante et elle est très utilisée en Psychologie, Sociologie, Linguistique et Archéologie, c'est à dire, dans les sciences humaines. Les méthodes de classification sont également très utilisées en Biologie, Médecine, Botanique, Zoologie et Écologie. Celles-ci ne sont pas les seules branches de la science ayant recours à la classification, car la Physique, l'Économie et l'Histoire s'en servent également. Il est bien connu que le principal apport de ces techniques est leur utilité comme méthodologie complémentaire aux autres méthodes statistiques vu qu'elle aide de façon plus ou moins efficace à l'interprétation de groupes d'objets homogènes qu'une analyse factorielle ne peut définir. Comme vous le savez, les techniques de classification construisent une relation dendrogrammatique dénommée arbre, lequel est coupé à un niveau où son indice d'agrégation n'est pas trop élevé, fournissant des partitions réelles et définissant des classes.

Ci-dessous est présentée une technique d'aide pour la lecture et l'interprétation d'un dendrogramme hiérarchique, consistant à caractériser de forme fractale la polygonale formée par les unions des points moyens des sommets, nœuds et crêtes des classes terminales d'un arbre hiérarchique, ce qui permet de s'assurer que la hiérarchie construite soit, si ce n'est la meilleure, tout du moins une bonne taxonomisation.

## La caractérisation de la fractale dendrogrammatique

*Définition de la courbe génératrice 1.1.* Soit  $I_0$  un segment de ligne à la longueur unitaire contenu dans un intervalle fermé, c'est à dire,  $I_0 \subset [a, b]$ . Soit  $I_1$  un ensemble au comportement sectionné, consistant en trois segments de droites formant, en prenant comme base le point initial  $a$  de  $I_0$ , deux triangles scalènes qui se reflètent au niveau du point moyen  $c$  de  $I_0$ , obtenus de la manière suivante : la première moitié du segment  $I_1$  est remplacée ou déplacée par les côtés du triangle formant un

angle avec  $I_0$ , et ce processus se répète dans la seconde moitié, mais avec les côtés reflétés à partir du point moyen  $c$ .

Ce processus est connu comme *le générateur*, et se nomme état 1. La construction de l'ensemble  $I_2$  se fait en appliquant *le générateur* à chacun des segments de  $I_1$ , et se nomme état 2. Il en découle que l'ensemble  $I_k$  est formé en appliquant le générateur  $I_1$  à chacun des segments de  $I_{k-1}$ , et se nomme état  $k$ , Figure 1.a.

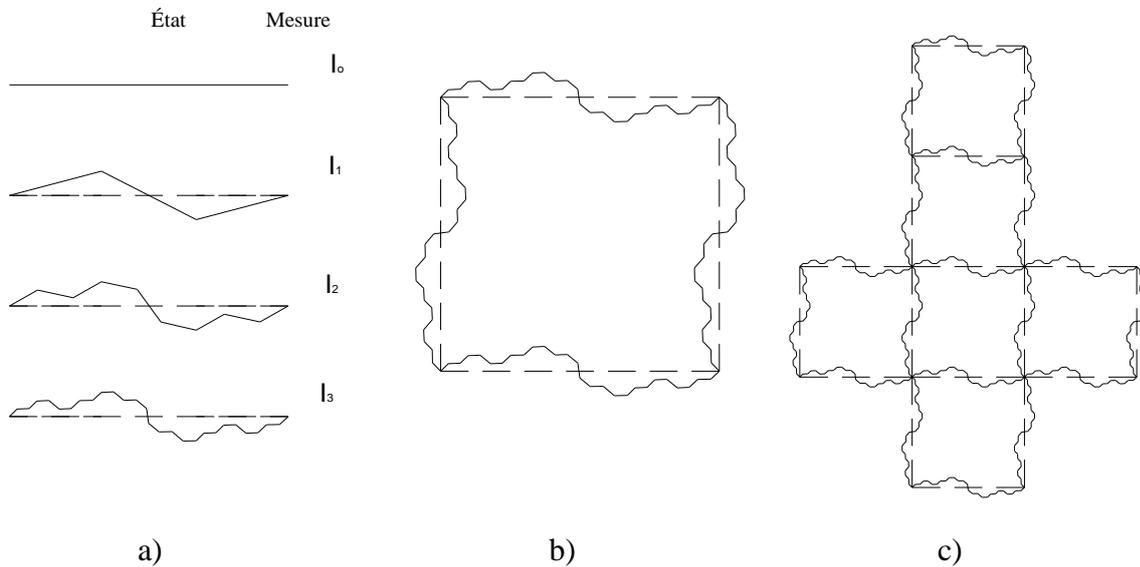


Figure 1. a) Construction de la courbe fractale  $I$ . Le générateur  $I_1$  est appliqué pour chaque état  $I_k$  à chaque segment de la courbe. b) Courbe fractale  $I$  dans le plan, et c) forme cubique de la fractale.

Il est nécessaire de signaler certaines particularités présentes dans la construction de ce type de fractales lorsque *le générateur* est formé par combinaison ou arrangements triangulaires en taille et en forme :

- Les états  $I_{k-1}$  et  $I_k$  diffèrent l'un de l'autre dans la séquence présentée par les courbes polygonales  $\forall k \rightarrow \infty$ ,
- L'ensemble  $I$  a une structure fine, c'est à dire qu'il contient tous les détails à n'importe quelle échelle arbitrairement petite,
- Bien que *le générateur* soit composé de deux figures triangulaires obéissant à la logique euclidienne, la géométrie de  $I_k \forall k \rightarrow \infty$  est trop irrégulière pour être décrite en des termes géométriques classiques.

La Figure 1.b présente la courbe construite sur le plan par le biais de la réflexion de  $I_k$  sur chacun des côtés.

La courbe  $I$  a la caractéristique d'être d'échelle similaire car à partir d'une transformation  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  avec  $\lambda_i > 0 \forall i \exists_n a, b \in \mathfrak{R}^n$  de telle manière que  $|F_i(a) - F_i(b)| = \lambda_i |a - b|$ . La similarité d'échelle est respectée dans le cas des triangles formés avec  $I_0$  par le générateur  $I_1$ . De même, elle a la caractéristique d'être affine car à partir de la transformation  $F$  déjà définie,  $F(a) = T(a) + \alpha$  avec  $T$  une transformation linéaire non singulière et  $\alpha \in \mathfrak{R}^n$ . Il est nécessaire de rappeler que l'affinité se conçoit comme une transformation cisailante ou résistante à la coupe et est un effet qui contracte ou dilate, et ce, non forcément dans la même direction.

Une courbe de type  $l_k$  respecte le *principe d'échelle* si toutes ses quantités relatives sont liées l'une à l'autre par le biais de la loi d'échelle.

Soit  $I$  un ensemble de Borel tel que  $I = \{I^1, I^2, I^3\}$ , où  $I^j$  est une succession finie de segments de ligne composant le *générateur*  $\forall j = 1, 2, 3$ , de sorte que  $I_i = \cup_{j=1}^3 I_i^j \quad \forall i = 1, 2, \dots$  est une séquence nombrable d'ensembles, alors la mesure  $\mu$  des segments de  $I_i$  se définit comme :

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\cup_{j=1}^3 I_i^j) = \mu(I_i) = 3\mu(I_{i-1}) \quad \forall i = 1, \dots \quad (1)$$

Lorsqu'une discontinuité géométrique est de type fractal, générée par un processus naturel, un treillis uniforme doit être construit. Soit  $(\chi, P(\chi), \mu)$  un espace de mesure tel que l'espace échantillon est  $\chi = [0, 1]$  y  $P(\chi)$ , une collection de sous-ensembles de  $\chi$  où sa mesure est  $\mu$ . Comme le système est dynamique, alors  $\chi \subseteq \mathfrak{R}^p$  est l'espace des phases. Considérons un treillis de  $\chi$  couvert par des boîtes  $p$ -dimensionnelles de rayon  $\delta_n$ , où  $B_{\delta_n}(t)$  est la boîte voisinage contenant le segment de droite ou le point  $t$ . La succession de boîtes-voisinage a un rayon  $\delta_n \rightarrow 0$  comme  $n \rightarrow \infty$ .

Supposons maintenant qu'il existe un sous-ensemble  $I \neq \emptyset$  de l'espace euclidien  $n$ -dimensionnel  $\mathfrak{R}^n$ , et que  $|I| = \sup\{|a - b| \mid a, b \in I\}$ . Si  $\{I_i\}$  est une collection nombrable de voisinages de rayon  $\delta$  couvrant  $I$ , alors il existe un sous-ensemble  $II$  de  $\mathfrak{R}^n$  tel que  $II \subset (\cup_{i=1}^{\infty} I_i)$  avec  $|I_i| \in [0, \delta] \quad \forall i$ , raison pour laquelle  $\{I_i\}$  est un voisinage  $\delta$  de  $I$ . Si un  $k > 0$  existe, alors pour tout voisinage  $\delta > 0$  une fonction minimisant la couverture totale de  $II$  peut être définie de la manière suivante :

$$H_{\delta}^k(II) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^k \mid \{I_i\} \text{ un voisinage } \delta \text{ de } II \right\} \quad (2)$$

Si nous prenons la limite en (2), alors  $\lim H_{\delta}^k(II) = H^k(II)$ . Il faut se souvenir que  $H^k(II)$  est connu sous le nom de la mesure  $k$ -dimensionnelle de Hausdorff.

*Théorème (de la propriété de l'échelle inverse).* Soit  $F^{-1}$  une transformation similaire inverse du facteur d'échelle  $k > 0$ , tel que  $F^{-1}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . Si  $\exists II \subset \mathfrak{R}^n$  alors :  $\lambda^k H^k(F^{-1}(II)) = H^k(II) \quad \forall \lambda > 0$ .

*Dem:* comme  $\{I_i\}$  est une collection nombrable de voisinages  $\delta$  couvrant  $I$ , alors, en appliquant la transformation similaire inverse :  $F^{-1}\{I_i\} = \{F^{-1}(I_i)\}$  qui est un  $\delta/\lambda = \lambda^{-1}\delta$  voisinage de  $F^{-1}(II)$ , c'est à dire :  $\lambda^k H_{\delta/\lambda}^k(F^{-1}(II)) \leq H^k(II) \quad \forall \lambda > 0$ . Dans la limite lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , l'inégalité précédente se transforme en :

$$H^k(F^{-1}(II)) = \lambda^{-k} H^k(II) \quad \text{CQFD}$$

Le théorème ici démontré permet de réduire la longueur d'un objet fractal.

### Le maillage et la délimitation du contour de la fractale

Soit  $N(t^*, \Delta t^*)$  le nombre de carrés contenus dans le treillis et  $N(t, \Delta t)$  le nombre de carrés intersectés par la courbe fractale.  $D_{0^{\circ}}(I)$  sera la dimension fractale,  $L$  la longueur totale de l'objet et  $l$  la longueur de chaque segment, raison pour laquelle le quotient de  $L/l$  définit le nombre de sous-divisions contenues par chaque côté du treillis intersecté. Ces propriétés d'échelle sont propres à une fractale fragmentée, raison pour laquelle le concept de *multifractal* s'applique (voir [1] pp. 45). Il en ressort que

$$N(t^*, \Delta t^*) \cong \Delta t^* P(t^*) t^{f(t^*)} \quad (3)$$

où  $N(t^*, \Delta t^*)$  est le nombre de carrés du treillis tel que  $t \in [t^*, t^* + \Delta t^*]$ .  $P(t^*)$  est la distribution de probabilité des points en intersection  $t \in [t^*, t^* + \Delta t^*]$  et  $f(t^*)$  la dimension fractale de ses points.

Considérant que la génération de  $f(t)$  est aléatoire, la courbe originale subit une rotation d'angles différents, de préférence constants, pour calculer pour chaque cas la dimension  $D_{\theta^\circ}$ .

$$D_{\theta^\circ}(I) = \frac{\sum_i \{D_{\theta^\circ}^i(I) \quad \forall \quad i = 1, \dots, n\}}{n} \quad (4)$$

Pour pouvoir pivoter la courbe originale un certain nombre de fois, il faut considérer le mappage  $M_n: \chi \rightarrow \mathfrak{R}$ , où  $M_n(t) = -\log \mu[B_{\delta_n}(t)]$ , si  $\mu[B_{\delta_n}(t)] > 0$  alors  $C_n(t)$  est une version remise à l'échelle de  $M_n(t)$ , c'est à dire :

$$C_n(t) = M_n(t) / (-\log \delta_n)$$

où  $C_n$  décrit le comportement local de la mesure  $\mu$ .

### Patron de comportement

Le comportement fractal d'une discontinuité géométrique nous mène au concept d'auto-affinité diagonale. Pour définir le patron du *générateur* de la fractale, nous partons de sa base, et nous traçons des droites jusqu'aux points où celle-ci se courbe tout au long de son trajet, obtenant de la sorte une courbe fractionnée. Au moment d'identifier un changement dans le comportement lors de son trajet, il est opportun de tracer des lignes horizontales afin d'identifier l'affinité dans sa trajectoire.

Les lignes horizontales identifiant le nouveau début du générateur doivent montrer la caractéristique de proportionnalité  $d$  de sorte que :

$$d = L \sin \beta \quad \text{où} \quad \sin \beta = L/d \quad \text{et} \quad \cos \beta = k/L \quad (5)$$

$L$  est la longueur du générateur,  $l$  la longueur de chaque segment et  $L/l$  est le nombre de sous-divisions que contient *le générateur*. Afin de voir le comportement idéal de la trajectoire, la relation d'échelle est définie comme la moyenne des longueurs de générateurs contigus, c'est à dire,  $(L_1 + L_2)/2$  : Figure 2.a.

Le facteur d'échelle de toutes les rotations que souffre le générateur ou la courbe fractale se définit comme :

$$s = \log_{10}(N) \quad \forall \quad N \rightarrow \infty \quad (6)$$

où la valeur de  $N$  est la moyenne du nombre maximal de chacune des rotations, c'est à dire que :

$$N = \sum_i \{R_i \quad \forall \quad i = 1, \dots, n\} \quad (7)$$

À partir d'ici, le facteur d'échelle du générateur peut être défini comme l'inverse de  $s$ , lequel nous donne la structure géométrique au moment où celle-ci est appliquée.

### Paramètres de la géométrie fractale

Vu qu'un point important de la géométrie d'une ligne fractale est que sa longueur réelle dépend de l'exactitude avec laquelle celle-ci est mesurée, la longueur totale réelle est augmentée conformément à l'équation 8 :

$$L_{j+1} = L_j * N * n \quad (8)$$

avec  $j$  nombre d'itérations,  $N$  nombre d'éléments dans le générateur base ( $j = 1$ ) et  $n$  facteur de réduction appliqué, raison pour laquelle la longueur réelle de la ligne fractale ( $L_j$ ) après  $j$  itérations est fournie par l'équation 9 :

$$L_j = L_p * \varepsilon_j^{-(d-D^*)} \quad (9)$$

où  $\varepsilon_j = n^j$  représente l'unité minimale de mesure pour mesurer la longueur relative d'un segment de la ligne fractale. Le paramètre  $d$  représente la dimension euclidienne de l'objet,  $D^*$  est la partie fractionnaire de la dimension fractale  $D_{\theta^\circ}$  et  $L_p$  est la longueur complète de la fractale, sans prendre en compte sa rugosité. Afin d'appliquer ceci à des fractales générées à partir d'un processus naturel,  $\varepsilon_j$  est dégagé de l'équation 9 pour obtenir :

$$\varepsilon_j = {}^{(d-D^*)} \sqrt{\left( \frac{L_j}{L_p} \right)} \quad (10)$$

*Propriété de symétrie axiale du générateur.* Les triangles formés par les segments  $I_1$ , en ayant  $I_0$  comme base, peuvent varier en taille et en forme.

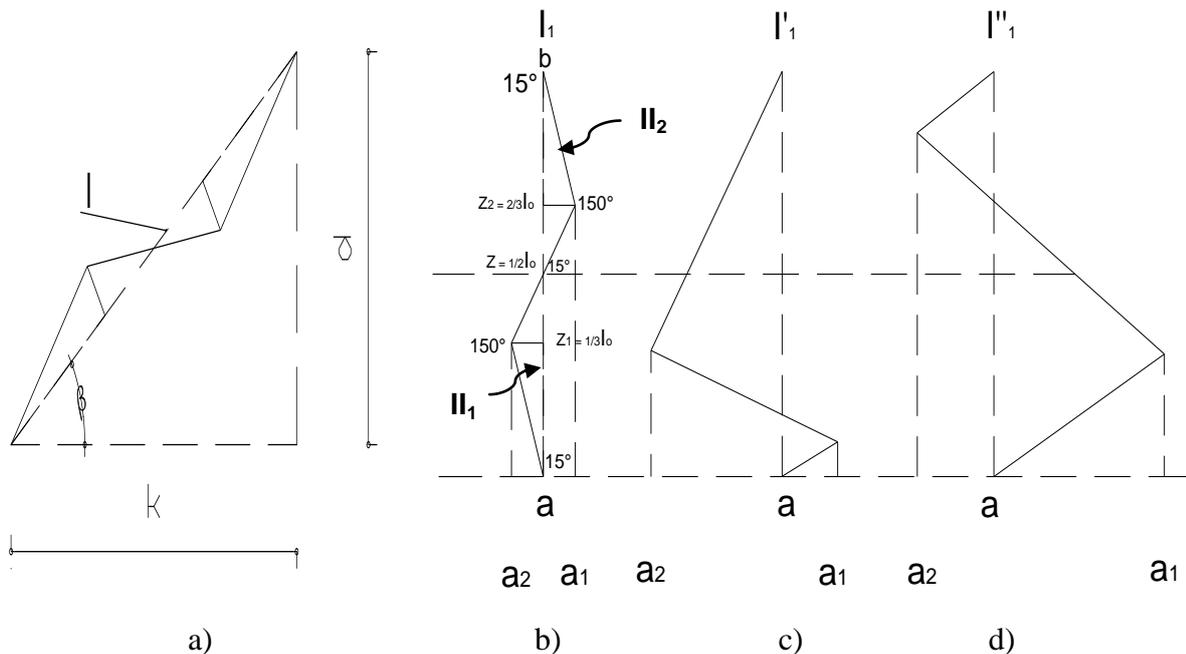


Figure 2. a) Générateur idéal. b), c) et d). Affinité de triangles dans le générateur.

Le générateur  $I_1$  peut être vu comme l'union de deux triangles scalènes  $II_1$  (triangle inférieur à  $I_0$ ) et  $II_2$  (triangle supérieur à  $I_0$ ) formés en prenant  $I_0$  comme base et se reflétant en  $1/2 I_0$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(a, 0), (z_1, a_1), (z_2, 0), (z_3, a_2), (b, 0)\} \\ &= \{(a, 0), (z_1, a_1), (z_2, 0)\} \cup \{(z_2, 0), (z_3, a_2), (b, 0)\} \\ &= II_1 \cup II_2 \end{aligned}$$

Lorsque  $z_1 = 1/3 I_0$  ;  $z_2 = 1/2 I_0$  y  $z_3 = 2/3 I_0$  , nous parlons du générateur  $I_1$ , Figure 2.b. Lorsque  $z_1 < 1/3 I_0$  ;  $z_2 < 1/2 I_0$  y  $z_3 < 2/3 I_0$ , nous parlons de  $I_1'$ , Figure 2.c. Lorsque  $z_1 > 1/3 I_0$  ;  $z_2 > 1/2 I_0$  et  $z_3 > 2/3 I_0$ , nous

parlons de  $I_1''$ , Figure 2.d Dans ces deux derniers cas, les angles homologues formés par les segments du générateur sont congrus et ses côtés homologues sont proportionnels, remplissant ainsi la propriété de similitude des triangles, c'est à dire que  $I_1'$  et  $I_1''$  sont des générateurs similaires à  $I_0$ .

*Théorème de la transformation de l'affinité linéaire.* Si  $G$  est une transformation géométrique des facteurs de l'échelle  $r, s \in \mathfrak{R}$ , tel que  $G: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , il existe alors des facteurs de translation  $h, k \in \mathfrak{R}$ , qui transforment  $I_{m+1}$  en un générateur affine de  $I_m$ .

*Dem:* Soient  $r$  et  $s$  facteurs d'échelle dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, du générateur  $I_1$ , lequel peut être décrit par l'équation (1), c'est à dire,  $I_1 = 3\mu(I_{i-1})$  avec  $i = 1$ . Comme  $r$  et  $s$  sont facteurs d'échelle de  $I_1$ , alors  $I_1 \times (r, s)$  augmente ( $\forall r, s > 1$ ), diminue ( $\forall r, s < 1$ ) ou est invariant ( $\forall r, s = 1$ ) et le générateur  $I_1$  est similaire. Le générateur  $I_1$  peut se redimensionner et subir une translation si  $\forall h, k \in \mathfrak{R}: I_1 = I_1 \times (r, s) + (h, k)$ , par conséquent,  $\forall m > 1: I_m = I_m \times (r, s) + (h, k) = I_m$

Par induction, nous considérons que pour l'équation (1), pour  $m = 1$ :

$$I_1 = I_1 \times (r, s) + (h, k) = 3\mu(I_0) \times (r, s) + (h, k) = \mu(I_1) \times (r, s) + (h, k) = I_1$$

Si nous le supposons valide pour  $m > 1$ , alors  $\forall r, s \neq 1, h \text{ y } k \neq 0$ :

$$I_m = I_m \times (r, s) + (h, k) = I_m$$

Nous le démontrerons pour  $m = m+1$ .

$$I_{m+1} = I_{m+1} \times (r, s) + (h, k) = 3\mu(I_m) \times (r, s) + (h, k) = \mu(I_{m+1}) \times (r, s) + (h, k) = I_{m+1}$$

**CQFD**

Selon la Section Le maillage et la délimitation du contour de la fractale, pour obtenir la dimension fractale de la polygonale du dendrogramme de l'étude, il faut prendre la structure étudiée et la placer dans une boîte de côté  $L$ , sur laquelle un maillage régulier est construit dans lequel chaque segment a une longueur  $l$ , Figure 3.a. Le nombre de boîtes contenant une partie de la structure sont comptées, ce qui nous donne un nombre  $N$ . Ce processus est par la suite répété avec un maillage chaque fois plus fin et en registrant chaque fois le  $N$  correspondant, Figure 3.b. Par la suite, le logarithme des deux quantités sert à créer un graphique  $\log(N)$  contre  $\log(L/l)$ , Figure 3.c, où il est possible d'ajuster une ligne droite dont la pente est la dimension fractale de l'objet (voir [2]).

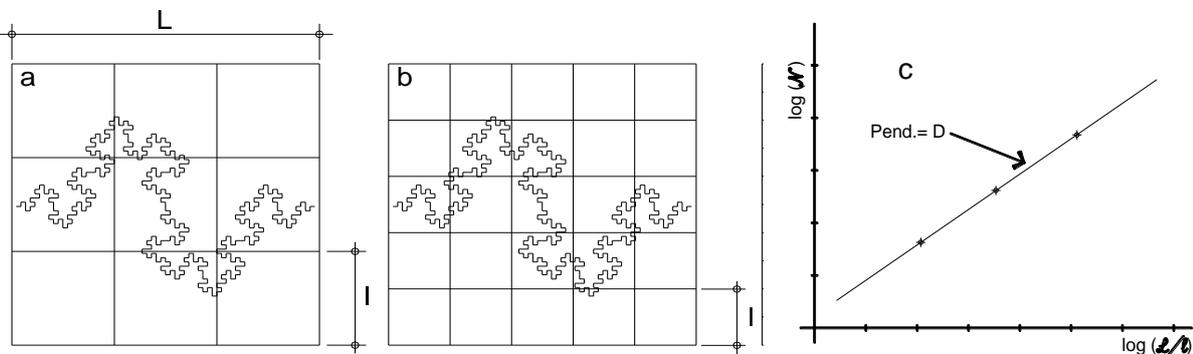


Figure 3. Procédure de calcul et d'obtention de la dimension fractale par la méthode d'estimation du nombre de boîtes.

La méthode d'estimation du nombre de boîtes est l'une des plus utilisées pour obtenir la dimension d'un objet, car elle offre une voie systématique applicable à une grande variété de formes naturelles (voir [3]).

Voyons maintenant l'application de la théorie exposée. Les deux applications suivantes sont tirées de [4], où se trouvent les dendrogrammes construits et qui exemplifient les applications.

### Application 1

Le but de cette application est d'analyser les effets de la corrosion atmosphérique sur l'acier structurel avec lequel est constituée l'infrastructure civile de la Ville de Mexico, lieu où se trouvent quatre parcs industriels enclavés dans la zone nord de la ville : Vallejo, Azcapotzalco, Xalostoc et Tultitlán. L'information analysée et utilisée est l'union de trois arrangements tabulaires de données. Un arrangement tabulaire de l'information météorologique  $IxJ1$  avec des valeurs moyennes hebdomadaires obtenues par la Station Météorologique Expérimentale du Instituto Politécnico Nacional Mexico, et qui se compose de cinq variables : vitesse du vent, température de l'air, humidité relative, radiation solaire et précipitation pluviale. Un arrangement tabulaire de l'information  $IxJ2$ , avec des données moyennes hebdomadaires des concentrations horaires maximales de deux polluants : le dioxyde de soufre, enregistré dans 4 stations du Réseau Automatique de Surveillance Atmosphérique de la Ville de Mexico et situées à Vallejo, La Villa, Azcapotzalco et Xalostoc, et les chlorures ou la concentration d'anions pour des valeurs maximales hebdomadaires à la station Xalostoc, ainsi comme les valeurs de  $pH$  ou de potentiel hydrogène de l'eau de pluie. Enfin, le troisième arrangement tabulaire d'informations  $IxJ3$  qui contient les données sur la vitesse de corrosion de deux dépôts d'éléments structurels, *ibidem*.

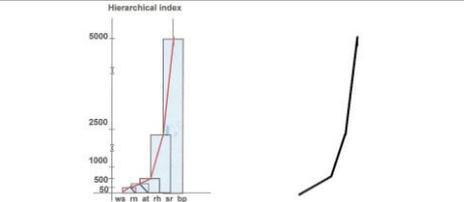
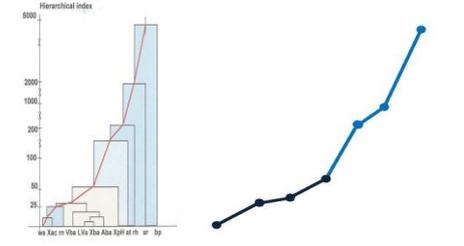
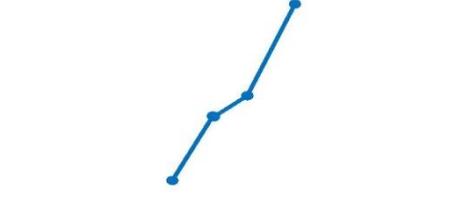
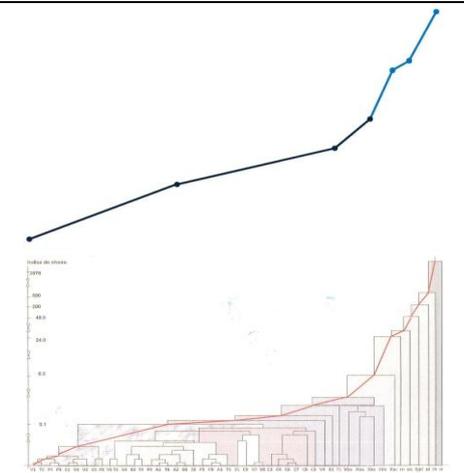
Après avoir appliqué la théorie de l'Analyse des Données et avoir réalisé la construction finale d'un dendrogramme, le Tableau 1, contenant 5 colonnes, a été réalisée. La première présente le numéro de la fractale et ses caractéristiques, la seconde contient le graphique de la fractale, la troisième la valeur calculée de sa dimension fractale, obtenue conformément à la théorie exposée et développée, la quatrième la valeur de la déviation standard de la valeur de l'équation de la droite dont la pente est  $D_{0^\circ}$ , et la cinquième qui expose l'équation de la ligne droite dont la pente est  $D_{0^\circ}$ . Les données obtenues ont été corroborées grâce au logiciel Benoit 1.3 (voir [5]). Rappelez-vous que  $\sigma$  mesure la probabilité qu'une observation se trouve à une certaine distance de l'observation moyenne, laquelle est valide si le système analysé est aléatoire.

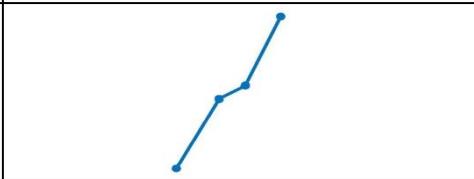
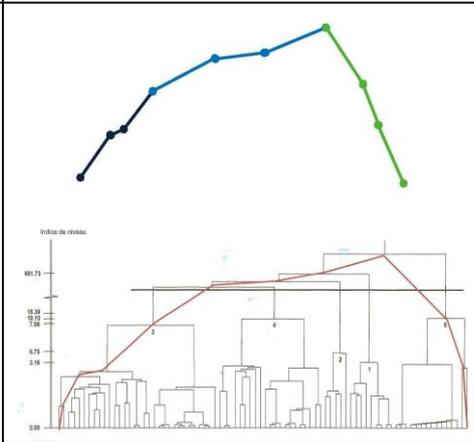
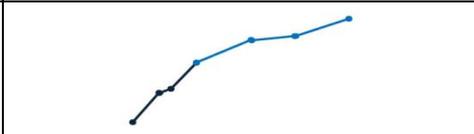
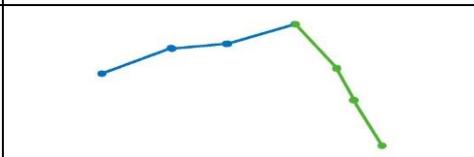
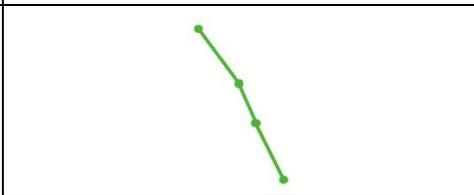
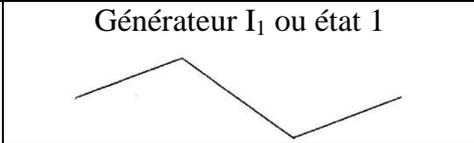
Prenons maintenant le cas des polygonales de l'application 1, qui représentent la séquence d'incorporation de variables à l'analyse hiérarchique développée. Les données du Tableau 1 ne sont pas à la même échelle hiérarchique. Pour la première d'entre elles, pour laquelle le dendrogramme construit ne reprend que les variables météorologiques, son polygonal ne réussit pas à ébaucher la tendance de la structure qu'aura le dendrogramme final de l'étude. La Figure 2 du Tableau 1, dans laquelle les variables de pollution atmosphérique ont été incorporées, montre déjà le générateur de la polygonale jusqu'à deux fois. Les segments du générateur sont construits de forme linéaire de la base d'une classe jusqu'au point terminal d'une autre classe supérieure, de sorte que la séquence de cet ensemble de classes définisse conceptuellement une partie du comportement des variables et que leur indice hiérarchique montre à quel point cet ensemble de classes est différent des autres. Ce format ne reflète pas les petites ruptures présentes dans la polygonale dans ce trajet au sein du dendrogramme original.

La Figure 5 du Tableau 1 montre la fractale obtenue de la polygonale du dendrogramme de l'arrangement tabulaire complet, c'est à dire, l'arrangement tabulaire contenant les variables météorologiques, de pollution et de vitesse de corrosion des éléments structurels étudiés. Vous remarquerez que, tout comme pour la Figure 2 du Tableau 1, les segments du générateur sont tracés de forme droite en omettant à quel point le tracé du polygonal est accidenté. Ici, le générateur se

manifeste aussi jusqu'à deux fois. La Figure 8 du Tableau 1 est la polygonale du dendrogramme obtenu à partir d'un arrangement tabulaire de Burt construit sur la base de la coupe en classes des données brutes ou initiales. Le générateur se présente trois fois car il a été obtenu, pour la troisième fois, dans la partie gauche du dendrogramme et sa branche a un sens ou une lecture qui contribue à son interprétation.

Tableau 1. Paramètres de la dimension fractale des composants des dendrogrammes de l'application 1.

No.	Fractale	Dimension fractale $D_{\theta^{\circ}}$	Déviations standard $\sigma$	Équation de la ligne droite dont la pente est $D_{\theta^{\circ}}$
1		1.96257	0.0081621	$2.06 \text{ E-}06 X^{-1.96}$
2		1.96226	0.0081067	$2.06 \text{ E+}06 X^{-1.96}$
3		1.96244	0.0081412	$2.06 \text{ E+}06 X^{-1.96}$
4		1.96253	0.0081619	$2.06 \text{ E+}06 X^{-1.96}$
5		1.96166	0.0079848	$2.05 \text{ E+}06 X^{-1.96}$

6		1.96197	0.0080441	$2.05 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
7		1.96241	0.0081344	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
8		1.96197	0.0080498	$2.05 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
9		1.96223	0.0081008	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.98}$
10		1.96216	0.0080863	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
11		1.96253	0.0081587	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
12		1.96243	0.0081378	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
13		1.96246	0.0081444	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
14		1.96224	0.0081029	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
15	Générateur I <sub>1</sub> ou état 1 	1.96267	0.0081833	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$

16	Générateur I <sub>2</sub> ou état 2 	1.96267	0.0081836	2.06 E+06 X <sup>-1.96</sup>
17	Générateur I <sub>3</sub> ou état 3 	1.96266	0.0081803	2.06 E+06 X <sup>-1.96</sup>

Chaque générateur de la courbe fractale définit une caractéristique de l'information étudiée, ce qui donne de la valeur à la construction des dendrogrammes hiérarchiques. Par exemple, la courbe fractale de la Figure 8 du Tableau 1 est formée par trois courbes génératrices. La première d'entre elles est la fractale 11 du Tableau 1, dont les segments définissent la stabilisation de l'effet de la corrosion, de la météo et de la transition de l'effet d'un excès d'humidité. La troisième courbe génératrice ou fractale 13 du Tableau 1, définit l'état initial de l'effet de la corrosion sur les échantillons étudiés (voir [6]).

Il est important de souligner que, tout comme chaque courbe génératrice définit une branche du dendrogramme, il en est de même pour les segments qui composent dite courbe génératrice. Par exemple, le premier segment de la courbe génératrice ou fractale 11 du Tableau 1 ajoute une brise faible, une radiation basse, une humidité moyenne et un SO<sub>2</sub> peu élevé. Le deuxième segment contient une faible précipitation pluviale, un bas niveau de sels et un pH inférieur ou égal à 5 unités, et le troisième segment ajoute les valeurs de vitesse de corrosion, d'échantillons de tubes, de barres d'armature de 3/8", des tés, des canaux, des plaques et des carrés.

La Figure 15 du Tableau 1 montre le générateur idéal. Les Figures 16 y 17 du Tableau 1 présentent les premiers deux états du générateur idéal construit. Il faut noter que la dimension fractale calculée est la même dans les trois cas et que les dimensions de toutes les courbes fractales coïncident au niveau de quatre premières décimales.

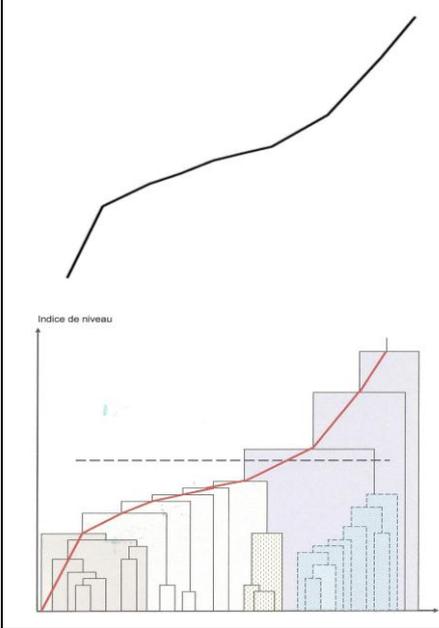
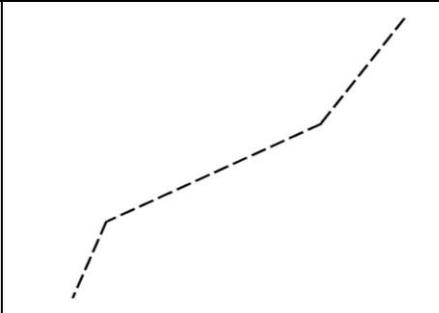
## Application 2

À partir du développement d'une méthodologie d'évaluation du rendement des enseignants pour les études de troisième cycle au Mexique, et avec la conception d'un questionnaire ou instrument d'évaluation appliqué aux élèves de niveau Maîtrise en Sciences (voir [7]) et divisé en quatre sections. Les élèves ont répondu à 543 questionnaires, un par matière étudiée pendant les années 2003 et 2004. Une étude statistique a été faite matière par matière et, une analyse aussi bien globale que par matière a été faite du point de vue éducatif et psychologique. L'objectif principal de cette recherche a été de développer une méthodologie propre permettant d'évaluer le rendement académique du personnel enseignant de troisième cycle au Mexique (voir [8]). La population sur laquelle a été appliqué cet instrument sont les élèves d'un cursus de troisième cycle appartenant à l'Institut Polytechnique National du Mexique. Dans celui-ci sont enseignées 22 matières, dont 3 sont propédeutiques, 8 obligatoires, 3 des séminaires et 8 optionnelles parmi lesquelles l'élève choisit 2. Parmi les élèves interrogés, 19 étaient en cours d'écriture du mémoire et le reste suivait les cours obligatoires ou optionnels. Les 18 élèves qui suivaient les cours propédeutiques ne furent pas interrogés. Chaque élève a répondu à un questionnaire par matière, accumulant un total de 543 questionnaires répondus pendant 2003.

Le Tableau 2, tout comme le Tableau 1, recense également le numéro de fractale et ses caractéristiques, dont les valeurs obtenues ont été corroborées grâce à l'utilisation du logiciel Benoit 1.3 (voir [5]). Comme les variables de l'étude ont été définies depuis le début, c'est à dire, elles ne furent pas incorporées comme pour le cas précédent, la fractale obtenue de la polygonale du dendrogramme est unique. La Figure 2 du Tableau 2 représente la fractale des côtés idéalisés (droits) et la Figure 1 de ce même Tableau 2 est la fractale naturelle obtenue de la polygonale. La différence de la valeur de sa dimension fractale se présente à partir de la quatrième décimale.

La polygonale du dendrogramme forme une seule courbe génératrice, composée de trois segments, reflétant des petites cassures sur toute la longueur de la polygonale (Figure 2 du Tableau 2). Le premier segment contient ce qui a été nommé moyens audiovisuels dans l'étude (voir [4] et [8]). Le deuxième segment ajoute l'engagement de l'enseignant auprès de ses élèves et les activités hors cursus, et le troisième segment contient la responsabilité du professeur en matière d'enseignement.

Tableau 2. Paramètres de la dimension fractale des composants du dendrogramme de l'application 2.

No.	Fractale	Dimension fractale $D_{\theta^{\circ}}$	Déviati on standard $\sigma$	Équation de la ligne droite dont la pente est $D_{\theta^{\circ}}$
1		1.96235	0.00811107	$2.06 \text{ E}+06 \text{ X}^{-1.96}$
2		1.96259	0.0081648	$2.06 \text{ E}-06 \text{ X}^{-1.96}$

### Conclusions

La propriété de symétrie axiale de la courbe génératrice prouve l'affinité des triangles formés par celle-ci avec l'état zéro (Figure 2.b).

La caractérisation de la courbe génératrice comme une séquence nombrable d'ensemble permet de prouver l'existence de la transformation en affinité linéaire qu'ont ces derniers.

Dans ce travail a été développé en particulier une méthodologie pour l'analyse fractale de la discontinuité géométrique ou polygone, formée par les unions des points moyens des sommets, nœuds ou crêtes des classes terminales des dendrogrammes : i) le contour du dendrogramme étudié est tracé en joignant les points moyens des sommets, nœuds ou crêtes des classes terminales, vérifiant le comportement sectionné du polygone, ii) il est procédé à l'identification de tout comportement miroir de la courbe dans l'une de ses sections, iii) la courbe montrant la direction de sa propagation fractale est isolée, puis une ligne droite est tracée depuis le point initial jusqu'au point final, calculant son angle de propagation par rapport à l'axe des ordonnées, iv) le facteur d'échelle de la courbe fractale est calculé, v) le générateur de la courbe est reproduit à échelle, vi) un maillage est fait sur le polygone pour le calcul de sa dimension fractale, vii) la dimension fractale de chacun des différents maillages et rotations sont calculés, puis un graphique des résultats est tracé, et viii) il est vérifié si le polygone possède la propriété d'auto-affinité.

Il est utile de noter que chacune des branches du générateur ou de la courbe génératrice définit ou signifie une partie de la hiérarchie construite.

Le générateur ne doit pas être exclusivement ou nécessairement composé de trois segments, mais il doit compter d'au moins deux segments. Dans les cas ici présentés, le générateur ou la courbe génératrice est composée par trois segments de ligne.

### Références bibliographiques

- [1] **Mandelbrot, B. B. 1999.** Multifractals and  $1/f$  noise. Springer-Verlag. ISBN: 0-387-98539-5.
- [2] **Talanquer, V. 2002.** "Fractus, fracta, fractales", Fractales de laberintos y espejos. Fondo de Cultura Económica. Núm. 147. 2ª edición. México. ISBN: 968-16-6367-4.
- [3] **Peitgen, H.O., Jürgen, H. y Saupe, D. 1993.** "Fractals for the Classroom", Introduction to Fractals and Chaos. Ed. Springer-Verlag. Second edition, Part two. New York, USA. ISBN: 3-540-97041-X.
- [4] **Casanova del Angel, F. 2010.** Structure géométrique des distances hiérarchiques. Revue Modulad. Vol: 41. ISSN : 17697387. Paris. France.
- [5] **Benoit 1.3. 2008.** TruSoft Int'l Inc. USA. www.trusoft.com
- [6] **Casanova del Angel, F y Toquiantzi Butrón, R. 2008.** Corrosion phases of structural shapes exposed to the atmosphere. Corrosion Science. Vol. 50, issue 8, August (2008) pp. 2288-2295. ISSN: 0010-938X doi: 10.1016/j.corsi2008.05.015.
- [7] **Cattel, J. M., & Farrand, L. 1896.** Physical and Mental Measurements of the Students of Colombia University. The Psychological Review, 3(6), pp. 618-648.
- [8] **Casanova del Angel, F. 2006.** Postgraduate Teaching Performance Evaluation System. International Conference on Teaching Statistics. July 2-7, 2006. Salvador Bahía. Brasil.