

# Implémentation de Différents Schémas pour la simulation du Modèle à Volatilité Stochastique de Heston dans PREMIA

Moulay Abdellah CHKIFA

Tuteur : Aurélien ALFONSI

# Contents

<b>1</b>	<b>Le modèle de Heston</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Discrétisation de la Variance Heston</b>	<b>4</b>
2.1	Schéma d'Euler (Lord et al.) . . . . .	4
2.2	Schéma ESM (Broadie et Kaya) . . . . .	6
2.2.1	Simuler $V_t$ sachant $V_u$ . . . . .	6
2.2.2	Simuler $\int_u^t V_s ds$ sachant $V_u$ et $V_t$ . . . . .	7
2.3	Schéma AESM (Smith) . . . . .	9
2.4	Schéma QE (Andersen) . . . . .	11
2.4.1	Simuler $V_{t+\Delta}$ sachant $V_t$ . . . . .	11
2.4.2	Simuler $\int_t^{t+\Delta} V_s ds$ sachant $V_t$ et $V_{t+\Delta}$ . . . . .	13
2.4.3	Schéma QE et martingales corrigées . . . . .	14
2.5	Schéma EVS et NCI (Haastrecht et Pelsser) . . . . .	17
2.6	Schéma TVS (Zhu) . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>21</b>
3.1	Comparaison des schémas ESM et AESM . . . . .	21
3.2	Comparaison des schémas Euler/QE/EVS/NCI . . . . .	23

# Premia 22

## Abstract

Dans ce rapport, Nous allons présenter différents schémas de simulation de la volatilité stochastique de Heston. Toutes ces méthodes permettent de simuler toute la trajectoire de la volatilité et du sous-jacent, ainsi elles peuvent être utilisées pour calculer le prix de tout type d'option. Dans un premier temps, nous allons détailler chacune des méthodes, ensuite nous comparons leurs performances et leurs précisions avec les tests numériques. Dans le modèle de Heston, le Prix du Call européen est donné par une formule fermée, Nous allons donc utiliser ce genre d'option pour comparer la précision des schémas de simulation. Nous allons aussi tester ces schémas avec différents paramètres de Heston, pour comparer leurs robustesses.

Les schémas sont les suivants:

- Simulation par schéma d'Euler (Lord, Koekkoek et Van Dijk [LKD]).
- Simulation exacte ESM. (Broadie et Kaya [BK06])
- Simulation presque exacte AESM. (Smith [SM])
- Schéma Quadratic-Exponential QE (Andersen [AN]).
- Schéma Non-central Chi-squared Inversion NCI (Haastrecht et Pelsser [HP]).
- Schéma Transformed Volatility TVS (Zhu [ZHU]).

Pour une description plus détaillée de ces schémas, le lecteur pourra consulter les papiers décrivant chacun.

## 1 Le modèle de Heston

Le modèle de Heston (1993) postule que le cours d'une action  $S_t$ , et de sa volatilité  $V_t$  suivent la dynamique suivante.

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^V \quad V_0 \text{ constant} \quad (1)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^S \quad S_0 \text{ constant} \quad (2)$$

où  $\kappa$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  sont des constantes strictement positives, et  $W^S$  et  $W^V$  sont des mouvements browniens scalaires corrélés sous la probabilité risque neutre. On suppose que  $dW_t^S \cdot dW_t^V = \rho dt$ , où  $\rho$  est le coefficient de corrélation.

Dans la suite, on substitue  $W^S$  par  $\rho W^V + \sqrt{1 - \rho^2}W$ , avec  $W$  un mouvement brownien standard indépendant de  $W^V$  (et donc de  $V$ ). Les autres paramètres peuvent être interprétés comme:

- $\theta$ : Une moyenne de la variance à long terme.
- $\kappa$ : La vitesse du retour à la moyenne.
- $\sigma$ : La volatilité de la variance.

Citons quelques propriétés fondamentales connues des processus de Cox-Ingersoll-Ross qui gouverne la volatilité:

- Si  $V_0 \geq 0$  alors le processus  $V_t$  reste positif.
- 0 est une borne atteignable par  $V$  lorsque  $\sigma^2 > 2\kappa\theta$  et il est fortement réflexive .
- $+\infty$  est inatteignable par  $V$ .

## 2 Discrétisation de la Variance Heston

### 2.1 Schéma d'Euler (Lord et al.)

Le schéma d'Euler du premier ordre de l'équation décrivant la volatilité se présente sous la forme suivante:

$$\hat{V}_t = \hat{V}_u + \kappa(\theta - \hat{V}_u)\Delta + \sigma\sqrt{\hat{V}_u}Z_V\sqrt{\Delta}$$

Cependant avec ce schéma  $\mathbf{P}(\hat{V}_t < 0) = \mathbf{P}\left(Z_V < \frac{-\hat{V}_u - \kappa\Delta(\theta - \hat{V}_u)}{\sigma\sqrt{\hat{V}_u}\sqrt{\Delta}}\right) > 0$ , sauf pour  $\Delta \rightarrow 0$ . Ceci est pratiquement impossible à réaliser. Il est donc primordial de modifier légèrement le schéma pour ne pas avoir des valeurs négatives de  $V$ . Dans [LKD], on compare différentes variantes de cette modification. Nous adoptons la solution qui donne l'erreur de discrétisation la plus petite selon [LKD] et qui consiste à remplacer  $V$  par sa partie positive :

$$\hat{V}_t = \hat{V}_u + \kappa(\theta - \hat{V}_u^+)\Delta + \sigma\sqrt{\hat{V}_u^+}Z_V\sqrt{\Delta}$$

Pour discrétiser  $S_t$ , il est préférable de discrétiser  $\ln(S_t)$  parce que  $S_t$  est proche d'un brownien géométrique et car ceci donne une équation linéaire. Avec la formule d'Ito et en tenant compte de la correction sur  $V$ , le schéma d'Euler pour  $\ln(S_t)$  se présente

$$\ln \hat{S}_t = \ln \hat{S}_u - \frac{1}{2}V_u^+\Delta + \sqrt{V_u^+}\sqrt{\Delta}(\rho Z_V + \sqrt{1 - \rho^2}Z)$$

$Z$  et  $Z_V$  sont deux gaussiennes indépendantes.

Dans [LKD], on prouve la convergence forte dans  $L^1$  de ce schéma d'Euler de la variance.

Pour les 4 schémas que nous allons présenter dans la suite, nous considérons les formes intégrales des équations de diffusion décrivant  $V_t$  et  $\log(S_t)$ . Pour  $t > u$

$$V_t = V_u + \kappa\theta(t - u) - \kappa \int_u^t V_s ds + \sigma_v \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^V \quad (3)$$

$$\log(S_t) = \log(S_u) + r(t - u) - \frac{1}{2} \int_u^t V_s ds + \rho \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^V + \sqrt{1 - \rho^2} \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s \quad (4)$$

Par conséquent, la simulation des trajectoires de  $V$  et  $\log(S)$  par conditionnement s'impose. Voici les étapes de la simulation de  $V_t$  et  $S_t$  connaissant  $V_u$  et  $S_u$  :

- 1/ Simuler  $V_t$  sachant  $V_u$
- 2/ Simuler  $\int_u^t V_s ds$  sachant  $V_u$  et  $V_t$
- 3/  $\int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^V$  est donné par (3)
- 4/ Simuler  $\int_u^t \sqrt{V_s} dW_s$  suivant une gaussienne centrée de variance  $\int_u^t V_s ds$ , car  $W$  est indépendante  $V$ .
- 5/  $\ln(S_t)$  est donné par (4)

## 2.2 Schéma ESM (Broadie et Kaya)

Ce schéma propose de simuler exactement dans chaque étape citée plus haut.

### 2.2.1 Simuler $V_t$ sachant $V_u$

Sachant  $V_u$ , la loi de  $V_t$  est donnée par

$$\frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-u)})}{4\kappa} \chi_d'^2 \left( \frac{4\kappa e^{-\kappa(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-u)})} V_u \right) \quad \text{avec} \quad d = \frac{4\theta\kappa}{\sigma_v^2}$$

Rappelons la forme de la fonction de distribution d'une loi chi-deux non centrale, d'ordre  $d$  et de paramètre  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\chi_d'^2(\lambda) < x) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^i}{i!} \frac{\int_0^x t^{d/2-1} e^{-t/2} dt}{2^{d/2+i} \Gamma(d/2)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = i) \mathbf{P}(\chi_{d+2i}^2 < x) \\ &= \mathbf{P}(\chi_{d+2N}^2 < x) \end{aligned}$$

avec  $N$  un processus de poisson d'intensité  $\lambda/2$ . Il est donc possible de simuler exactement une variables aléatoire suivant la loi  $\chi_d'^2(\lambda)$  en simulant  $\chi_{d+2N}^2$ . En outre lorsque  $d > 1$  on a l'égalité en lois suivante

$$\chi_d'^2(\lambda) = (Z + \sqrt{\lambda})^2 + \chi_{d-1}^2$$

Ce qui revient à simuler simplement à partir d'une chi-deux et d'une gaussienne indépendante.

Les processus de poisson simulé dans le modèle de Heston ont des intensités pas très grandes, donc leurs simulation par inversion de la fonction de distribution suffit:

- Simuler  $U$  suivant la loi uniforme dans  $[0,1]$
- Trouver  $j$  vérifiant  $\mathbf{P}(N < j) < U$  et  $\mathbf{P}(N \leq j) \geq U$ :  
 $j = 0$  et  $T = P = \exp(-\lambda/2)$   
 tant que  $P < U$   
 $j \rightarrow j + 1, T \rightarrow T \frac{\lambda}{2j}, P \rightarrow P + T$

Cette étape ne pose donc aucune difficulté dans la simulation puisqu'il existe des algorithmes performants et rapides pour simuler une chi-deux. Notamment l'algorithme récent de Tsang-Marsanglia. Nous écrivons les formules de la moyenne et la variance de  $V_t$  sachant  $V_u$

$$\mathbf{E}(V_t|V_u) = \theta + (V_u - \theta)e^{-\kappa(t-u)}$$

$$Var(V_t|V_u) = \frac{V_u\sigma^2 e^{-\kappa(t-u)}}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-u)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta})^2$$

### 2.2.2 Simuler $\int_u^t V_s ds$ sachant $V_u$ et $V_t$

Notons  $V_{u,t} = (\int_u^t V_s ds | V_u, V_t)$ . On simule  $V_{u,t}$  en inversant sa fonction de distribution, cette dernière serait trouvée à partir de la fonction caractéristique par transformée de Fourier inverse. Boadie et Kaya [BK] ont donné la formule exacte de la fonction caractéristique de  $V_{u,t}$

$$\Phi(a) = \mathbf{E}[\exp(iaV_{u,t})] = \frac{f(\gamma(a))}{f(\kappa)} \frac{\exp\left[\frac{V_u+V_t}{\sigma^2}(-g(\gamma(a)))\right]}{\exp\left[\frac{V_u+V_t}{\sigma^2}(-g(\kappa))\right]} \frac{h(\gamma(a))}{h(\kappa)}$$

avec

$$f(z) = \frac{0.5z(t-u)}{\sinh(0.5z(t-u))}, \quad g(z) = \frac{z}{\tanh(0.5z(t-u))} \quad \text{et} \quad h(z) = I_\nu \left[ \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f(z) \right]$$

$$\gamma(a) = \sqrt{\kappa^2 - 2\sigma^2 ia} \quad \text{et} \quad \nu = 0.5d - 1$$

$I_\nu$  la fonction bessel de deuxième espèce.

$V_{u,t}$  a donc pour fonction de distribution

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u} \Phi(u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ux)}{u} \Re[\Phi(u)] du$$

Elle pourra être calculer rapidement avec la méthode des trapèzes

$$F(x) = \frac{hx}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\sin(hjx)}{j} \Re[\Phi(hj)]$$

La précision du calcul  $\epsilon$  dépend des deux paramètres  $h$  et  $N$ , via la formule  $\frac{|\Phi(hN)|}{N} < \frac{\pi\epsilon}{2}$ . pour les applications numériques, nous avons choisi  $\epsilon = 10^{-6}$  et

$h = \frac{\pi}{u_\epsilon}$  avec  $u_\epsilon = \mu_{V_{u,t}} + 5 \times \sigma_{V_{u,t}}$  comme mentionné dans [BK], avec  $\mu_{V_{u,t}}$  et  $\sigma_{V_{u,t}}$  la moyenne et l'écart type de  $V_{u,t}$  dérivés à partir de  $\Phi$ .

Pour les détails sur les valeurs de  $h$  et de  $N$ , on renvoie à l'article [BK]. Cependant on explicite ici les deux premiers moments de  $V_{u,t}$  requises pour cette méthode et la méthode qui suit.

$$\mathbf{E}(V_{u,t}) = i\Phi'(0) = i\gamma'(0) \left[ \frac{f'(\kappa)}{f(\kappa)} - \frac{V_u + V_t}{\sigma^2} g'(\kappa) + \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f'(\kappa) R_1 \left( \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f(\kappa) \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(V_{u,t}^2) = -\Phi''(0) = -\gamma''(0) & \left[ \frac{f'(\kappa)}{f(\kappa)} - \frac{V_u + V_t}{\sigma^2} g'(\kappa) + \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f'(\kappa) R_1 \left( \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f(\kappa) \right) \right] \\ -\gamma'(0)^2 & \left[ \frac{f''(\kappa)}{f(\kappa)} - \frac{V_u + V_t}{\sigma^2} g''(\kappa) + \left( \frac{V_u + V_t}{\sigma^2} g'(\kappa) \right)^2 + \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f''(\kappa) R_1 \left( \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f(\kappa) \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f'(\kappa) \right)^2 R_2 \left( \frac{4\sqrt{V_u V_t}}{\sigma^2} f(\kappa) \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$R_1(z) = \frac{I'_\nu(z)}{I_\nu(z)} = \frac{I_{\nu+1}(z)}{I_\nu(z)} + \frac{\nu}{z} \text{ et } R_2(z) = \frac{I''_\nu(z)}{I_\nu(z)} = -\frac{1}{z} \frac{I_{\nu+1}(z)}{I_\nu(z)} + 1 - \frac{\nu}{z^2} + \left(\frac{\nu}{z}\right)^2$$

Cette écriture nous montre qu'on peut calculer rapidement et en une seule fois  $R_1$  et  $R_2$  en calculant la fraction continue  $\frac{I_{\nu+1}(z)}{I_\nu(z)}$ .

Pour ce qui est de l'inversion de la fonction de distribution, on se contente d'effectuer un algorithme de Brent [RPB] et non pas un algorithme de type Newton, pour ne pas avoir à calculer les dérivées première et seconde de  $F$  qui sont à leur tour des sommes infinies. Pour les paramètres des tests numériques, et pour une erreur absolue de  $10^{-6}$ , l'algorithme converge au maximum en 12 itération pour  $u$  proche de 0 ou de 1 et au maximum en 8 itération sinon.

Le reste des étapes de calcul sont directs.

### Remarques sur le schéma

Avec la simulation exacte, l'erreur commise par application de la méthode de MonteCarlo est connue grâce au théorème Centrale Limite. Elle est en  $\frac{1}{\sqrt{N_s}}$  avec  $N_s$  le nombre de simulations.



La simulation exacte a l'avantage de permettre de simuler  $V_t$  et  $S_t$  pour un instant  $t > 0$  en connaissant seulement  $V_0$  et  $S_0$ . Ainsi pour les payoffs qui sont indépendants de la trajectoire de  $S$ , nous ne sommes pas obligé de discrétiser en temps. Pour ceux qui dépendent de la trajectoire, càd de  $S_{t_1}, S_{t_2} \dots S_{t_l}$ , avec  $t_1 < t_2 < \dots < t_l$ , Il est suffisant de simuler  $S$  qu'en ces dates comme décrit plus haut.

Malheureusement, pour  $V_u$  et  $V_t$  donnée, Le calcul de la fonction de distribution de  $V_{u,t}$  implique le calcul de N fonctions de Bessel, ceci peut s'avérer très coûteux surtout puisque nous aimerions simuler la trajectoire de  $S$  et donc de  $V$ , des milliers de fois pour annuler le bruit Monte Carlo. Par exemple si on simule  $10^6$  trajectoires, et nous supposons pour l'illustration que la fréquence de calcul est 1 et que la fonction de distribution exige 40 fois le calcul des Bessel (temps de calcul moyen  $10^{-5}s$ ), le calcul prends 400s, ce qui reste très élevé dans l'absolu ou comparé aux autres schémas.

### 2.3 Schéma AESM (Smith)

Ce schéma a pour but d'accélérer la méthode ESM tout en gardant le caractère exacte de la méthode. Il est suggéré dans l'article [SM] d'effectuer un pré-calcul antérieure à la boucle MonteCarlo des quantités dont le calcul pourrait être coûteux, puis utiliser une interpolation simple et des corrections pertinentes pour approximer la quantité voulue.

Dans la ESM, l'étape qui sollicite le plus de temps de calcul est la simulation de  $V_{u,t}$ , notamment la fonction caractéristique  $\Phi$ . L'idée donc est de précalculer un nombre de fonctions caractéristiques sur des grilles uniformes des domaines d'appartenance de  $V_u$  et  $V_t$  si ces domaines sont finis. Ce précalcul pourraient être assez coûteux s'il est bi-dimensionnel. l'auteur remarque que  $\Phi$  dépend de  $V_u$  et  $V_t$  via  $\frac{V_t + V_u}{2}$  et  $\sqrt{V_u V_t}$ , qui sont deux quantités liées, dont l'écart  $\frac{V_t + V_u}{2} - \sqrt{V_u V_t} = \frac{(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_u})^2}{2}$  pourrait être négligeable si  $V_u$  et  $V_t$  sont proches. Il propose donc d'approximer ces deux quantités par la moyenne suivante

$$z = \omega \frac{V_u + V_t}{2} + (1 - \omega) \sqrt{V_u V_t} \text{ avec } \omega \in [0, 1]$$

Puis de simuler la variables aléatoire  $A_z$  dont la fonction caractéristique est

$$\Phi(a) = \mathbf{E} [\exp(iaA_z)] = \frac{f(\gamma(a))}{f(\kappa)} \frac{\exp \left[ \frac{2z}{\sigma^2} (-g(\gamma(a))) \right]}{\exp \left[ \frac{2z}{\sigma^2} (-g(\kappa)) \right]} \frac{h(\gamma(a))}{h(\kappa)}$$

$$h(x) = I_\nu \left[ \frac{4z}{\sigma^2} f(x) \right]$$

Remarque:  $A_z$  est bien une variable aléatoire, elle a la même loi que  $\int_u^t V_s ds$  sachant  $V_u = V_t = z$ .

et enfin simuler  $V_{u,t}$  par  $V_{u,t} = \frac{\sigma_{V_{u,t}}}{\sigma_{A_z}} (A_z - \mu_{A_z}) + \mu_{V_{u,t}}$ .

Il va falloir donc calculer les quantités requises pour la fonction caractéristique précédante sur une grille uniforme  $\{z_1, \dots, z_M\}$  avec  $z_i = \frac{i}{M} Z_{max}$   $i \in 1, 2, \dots, M$ .

Résumons donc les étapes du calcul de cette Méthode:

- Détermination de  $Z_{max}$ :

Il est facile de voir que  $z \leq \frac{V_u + V_t}{2} \leq \max(V_u, V_t)$ . Mais avec l'approximation normale d'une loi chi-deux non centrale, on peut trouver, pour une précision  $\epsilon$  donnée, un  $\chi'_{max}$  tel que  $\mathbf{P}(\chi'_d(\lambda) > \chi'_{max}) < \epsilon$ . Ainsi, en considérant  $V_t$  comme chi-deux non centrale dont le paramètre  $\lambda$  dépend de  $v_0$  et du reste des paramètres, il existe  $V_{max}^t$  vérifiant  $V_t > V_{max}^t$  avec une probabilité inférieure à  $\epsilon$ . Un choix naturel est  $Z_{max} = MAX_{0 \leq k \leq N_t}(V_{max}^{k\Delta})$  avec  $\Delta$  le pas de temps, et  $N_t$  le nombre de pas de temps.

- Nous Précalculons pour chaque  $z_i$  les  $N_{z_i}$  valeurs de la fonction caractéristique requise pour le calcul de la fonction de distribution dérivée de

$$\Phi_i(a) = \frac{f(\gamma(a))}{f(\kappa)} \frac{\exp \left[ \frac{2z_i}{\sigma^2} (-g(\gamma(a))) \right]}{\exp \left[ \frac{2z_i}{\sigma^2} (-g(\kappa)) \right]} \frac{h_i(\gamma(a))}{h_i(\kappa)}$$

$$h_i(x) = I_\nu \left[ \frac{4z_i}{\sigma^2} f(x) \right]$$

Le calcul des moment est le même que pour  $V_{u,t}$  en remplaçant  $V_u$  et  $V_t$  par  $z_i$

- Dans la boucle Monte Carlo, pour simuler  $V_{u,t}$ , nous calculons  $z$ , puis  $z_i$  qui approche le plus  $z$ .  $u$  étant donné dans  $[0,1]$ , nous calculons l'inverse de

u par la fonction de distribution de  $A_{z_i}$ .

- Nous faisons une correction des moments  $V_{u,t} = \frac{\sigma_{V_{u,t}}}{\sigma_i}(F_i^{-1}(u) - \mu_i) + \mu_{V_{u,t}}$

## Remarques sur le schéma

En plus du bruit de la méthode MonteCarlo, à l'erreur de ce schéma s'ajoute les imprécisions suivantes.

- Approximation de  $\sqrt{V_u V_t}$  et de  $\frac{V_u + V_t}{2}$  par z.
- Approximation de z par  $z_i$  pour le calcul de  $N_z$  valeurs de la fonction caractéristique.

Ainsi la précision de cette méthode pourrait être mise à mal si les valeurs de variance simulées sont très distancées, nous rappelons que  $\frac{V_t + V_u}{2} - \sqrt{V_u V_t} = \frac{(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_u})^2}{2}$ . La précision diminue aussi lorsque les  $z_i$  sont distancés, ce qui revient à dire  $Z_{max}$  est suffisamment grand ou M pas très élevé. Nous allons essayer vérifier ces mauvaises conditions dans nos applications numériques, notamment par le choix du paramètre  $\sigma$ , caractérisant l'aléa dans l'évolution de  $V$ , élevé.

Dans les schémas qui suivent, le but sera de proposer des techniques d'approximations des étapes de calcul qui soient rapides et exactes.

## 2.4 Schéma QE (Andersen)

### 2.4.1 Simuler $V_{t+\Delta}$ sachant $V_t$

Dans la lignée des résultats anciens et connus de l'approximation d'une chi-deux et d'une chi-deux non-centrale par une gaussienne [AS], l'auteur du schémas QE [AN] propose un schéma simple de simulation de  $V_{t+\Delta}$

Pour les grandes valeurs de  $\hat{V}_t$ , on écrit :

$$\hat{V}_{t+\Delta} = a(b + Z_V)^2 \quad (5)$$

avec  $Z_V$  une variable aléatoire gaussienne standard et  $a, b$  deux constantes qui seront déterminées par identification des moments de  $\hat{V}_{t+\Delta}$  avec  $V_{t+\Delta}|V_t$ , qui dépendent du pas de temps  $\Delta$  et de la valeur  $\hat{V}_t$ .

Pour les faibles valeurs de  $\hat{V}_t$ , le schéma précédent ne fonctionne plus, mais on peut approximer la densité de la loi de  $\hat{V}_{t+\Delta}$  par:

$$P(\hat{V}_{t+\Delta} \in [x, x + dx]) \approx (p\delta(0) + \beta(1 - p)e^{-\beta x})dx, \quad x \geq 0 \quad (6)$$

avec  $\delta$  la fonction de Dirac et  $p, \beta$  sont des constantes à déterminer. On notera que si  $0 \leq p \leq 1$  et  $\beta \geq 0$ , alors la fonction précédente définit bien une densité de probabilité.

Disposant de cette approximation, on a:

$$\Psi(x) = P(\hat{V}_{t+\Delta} \leq x) = p + (1-p)(1 - e^{-\beta x}), \quad x \geq 0 \quad (7)$$

$\Psi(x)$  qui est la fonction de distribution de  $\hat{V}_{t+\Delta}$  est facilement inversible selon la formule:

$$\Psi^{-1}(u) = \Psi^{-1}(u; p, \beta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq p \\ \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right), & p < u \leq 1 \end{cases}$$

Disposant alors de l'inverse exact de la fonction de distribution, on peut simuler  $\hat{V}_{t+\Delta}$  à partir d'une variable aléatoire  $U_V$  uniforme sur  $[0, 1]$ :

$$\hat{V}(t + \Delta) = \Psi^{-1}(U_V; p, \beta) \quad (8)$$

Ces schémas de simulation sont très rapides à exécuter. Il reste maintenant à déterminer les constantes:  $a, b, p$  et  $\beta$ .

### Déterminer $a$ et $b$

Pour  $\hat{V}_{t+\Delta}$  distribuée comme  $a(b + Z_V)^2$ , on a clairement que:

$$\begin{cases} E(\hat{V}_{t+\Delta}) = a(1 + b^2) = m \\ Var(\hat{V}_{t+\Delta}) = 2a^2(1 + 2b^2) = s^2 \end{cases}$$

On note  $\psi = \frac{s^2}{m^2}$ , on a alors si  $\psi \leq 2$ :

$$\begin{cases} b^2 = \frac{2}{\psi} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\psi} - 1} \geq 0 \\ a = \frac{m}{1+b^2} \end{cases}$$

Remarquons que ces formules s'appliquent uniquement pour  $\psi \leq 2$ , ce qui correspond bien à de grandes valeurs de  $\hat{V}_t$ . Autrement, on applique la deuxième partie du schéma QE en commençant par déterminer  $p$  et  $\beta$ .

### Déterminer $p$ et $\beta$

Dans cette partie on désigne par  $m$  la moyenne théorique de  $\hat{V}_{t+\Delta}$ ,  $s^2$  sa variance et  $\psi = \frac{s^2}{m^2}$ . On montre alors que, pour une fonction de distribution de la forme  $\Psi(x)$  calculée précédemment:

$$\begin{cases} E(\hat{V}_{t+\Delta}) = \frac{1-p}{\beta} = m \\ Var(\hat{V}_{t+\Delta}) = \frac{1-p^2}{\beta^2} = s^2 \end{cases}$$

En supposant que  $\psi \geq 1$ , on montre que :

$$\begin{cases} p = \frac{\psi-1}{\psi+1} \in [0, 1[ \\ \beta = \frac{1-p}{m} = \frac{2}{m(\psi+1)} > 0 \end{cases}$$

On note comme précédemment:

$$\psi = \frac{Var(V_{t+\Delta}|V_t = \hat{V}_t)}{\left(\mathbf{E}(V_{t+\Delta}|V_t = \hat{V}_t)\right)^2} = \frac{s^2}{m^2} \quad (9)$$

On a montré que le schéma quadratique peut être appliqué uniquement pour les valeurs  $\psi \leq 2$ , alors que le schéma exponentiel doit vérifier  $\psi \geq 1$ . Heureusement, les domaines d'application se chevauchent, donc on peut toujours appliquer l'un ou l'autre de ces deux schémas et pour  $1 \leq \psi \leq 2$ , on peut appliquer les deux schémas. En pratique, on fixe une valeur critique  $\psi_c$  dans  $[1, 2]$ . On utilise alors l'un ou l'autre des schémas selon que  $\psi \leq \psi_c$  ou  $\psi \geq \psi_c$ .

#### 2.4.2 Simuler $\int_t^{t+\Delta} V_s ds$ sachant $V_t$ et $V_{t+\Delta}$

Pour ce schémas, il est proposé de considérer simplement

$$\int_t^{t+\Delta} V_s ds = \Delta \left[ \gamma_1 \hat{V}_t + \gamma_2 \hat{V}_{t+\Delta} \right]$$

Avec cette expression, nous avons

$$\begin{aligned}\ln \hat{S}_{t+\Delta} &= \ln \hat{S}_t + \frac{\rho}{\sigma}(\hat{V}_{t+\Delta} - \hat{V}_t - \kappa\theta\Delta) + \Delta\left(\frac{\kappa\rho}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)(\gamma_1\hat{V}_t + \gamma_2\hat{V}_{t+\Delta}) \\ &\quad + \sqrt{\Delta}\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\gamma_1\hat{V}_t + \gamma_2\hat{V}_{t+\Delta}} Z_S \\ &= \ln \hat{S}_t + K_0 + K_1\hat{V}_t + K_2\hat{V}_{t+\Delta} + \sqrt{K_3\hat{V}_t + K_4\hat{V}_{t+\Delta}} Z_S\end{aligned}$$

$Z_S$  est une gaussienne indépendante de  $\hat{V}$  et  $K_0, \dots, K_4$  sont donné par

$$\begin{aligned}K_0 &= -\frac{\rho\kappa\theta}{\sigma}\Delta, \quad K_1 = \gamma_1\Delta\left(\frac{\kappa\rho}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\rho}{\sigma}, \quad K_2 = \gamma_2\Delta\left(\frac{\kappa\rho}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\rho}{\sigma} \\ K_3 &= \gamma_1\Delta(1-\rho^2), \quad K_4 = \gamma_2\Delta(1-\rho^2)\end{aligned}$$

### 2.4.3 Schéma QE et martingales corrigées

N'ayant pas fait une simulation exacte de  $S$ , le schéma pourra ne pas donner le caractère martingale de  $\hat{S}$ . Nous devons donc proposer une version avec martingales corrigées de la technique QE. Nous aimerions donc que  $\mathbf{E}(\hat{S}_{t+\Delta}|\hat{S}_t) = \hat{S}_t$ . dans l'article [AN], on trouve que ceci est possible en remplaçant  $K_0$  par  $K_0^*$  donné par

$$K_0^* = -\ln M - (K_1 + \frac{1}{2}K_3)\hat{V}_t$$

avec

$$M = \mathbf{E}\left(e^{A\hat{V}_{t+\Delta}}|\hat{V}_t\right) \quad \text{supposé être } < \infty$$

Les notations sont les mêmes que précédemment.

Pour  $\psi < \psi_c$ , on a:

$$E\left(e^{A\hat{V}_{t+\Delta}}|\hat{V}_t\right) = \frac{\exp(\frac{Ab^2a}{1-2Aa})}{\sqrt{1-2Aa}} \quad \text{pour tout } A < \frac{1}{2a}$$

Pour  $\psi > \psi_c$ :

$$E\left(e^{A\hat{V}_{t+\Delta}}|\hat{V}_t\right) = p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A} \quad \text{pour tout } A < \beta$$

On mettra en particulier l'accent sur les restrictions imposées à  $A$ . Pour se

rendre compte à quel point les deux conditions sur  $A$  sont restrictives, on rappelle que:

$$A = \frac{\rho}{\epsilon}(1 + \kappa\gamma_2\Delta) - \frac{1}{2}\gamma_2\Delta\rho^2 \quad (10)$$

D'autre part, le paramètre  $a$  vérifie par définition:  $a \geq \frac{4}{\kappa}\epsilon^2(1 - e^{-\kappa\Delta})$ . Ainsi, la condition  $A < \frac{1}{2a}$  serait toujours satisfaite si:

$$\frac{\rho}{\epsilon}(1 + \kappa\gamma_2\Delta) - \frac{1}{2}\gamma_2\Delta\rho^2 < \frac{2\kappa}{\epsilon^2(1 - e^{-\kappa\Delta})} \quad (11)$$

Ce qui est le cas lorsque  $\rho \leq 0$ . Quand  $\rho > 0$ , cette condition impose une limite sur le pas de temps  $\Delta$ . Grossièrement  $\rho\epsilon\Delta < 2$ . Étant donné que l'on a choisi  $0.5 < \epsilon < 1.5$ , cette condition sur le pas de temps n'est pas soulevée en pratique même pour les grandes valeurs de  $\rho$ . En ce qui concerne la deuxième condition, nous avons  $\beta = \frac{2}{m(\psi+1)} \sim \frac{1}{m} \gg 1$  pour des  $\psi > \psi_c$ . Donc cette condition est pratiquement toujours vérifiée.

Finalement, la correction des martingales dans le cas du schéma QE est simple à implémenter puisqu'il suffit d'imposer:

$$K_0^* = \begin{cases} -\frac{Ab^2a}{1-2Aa} - \frac{1}{2}\ln(1 - 2Aa) - (K_1 + \frac{K_3}{2})\hat{V}_t & si \ \psi \leq \psi_c \\ -\ln\left(p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}\right) - (K_1 + \frac{K_3}{2})\hat{V}_t & si \ \psi \geq \psi_c \end{cases}$$

On résume l'algorithme de simulation QE:

- 1) Connaissant la valeur de  $\hat{V}_t$ , calculer  $m$  et  $s^2$ .
- 2) Calculer  $\psi = \frac{s^2}{m^2}$ .
- 3) Simuler une variable aléatoire uniforme  $U_V$  entre 0 et 1.
- Si  $\psi \leq \psi_c$ :
  - (a) Calculer  $a, b$ .
  - (b) Simuler  $Z_V = \Phi^{-1}(U_V)$  qui est une gaussienne centrée réduite.
  - (c) Calculer  $\hat{V}_{t+\Delta} = a(b + Z_V)^2$ .
- Si  $\psi \geq \psi_c$ :
  - (a) Calculer  $p, \beta$ .
  - (b) Simuler  $\hat{V}_{t+\Delta} = \Psi^{-1}(U_V; p, \beta)$ .
- 4)  $\int_t^{t+\Delta} V_s ds = \Delta [\gamma_1 V_t + \gamma_2 V_{t+\Delta}]$
- 5)

$$K_0^* = \begin{cases} -\frac{Ab^2a}{1-2Aa} - \frac{1}{2}\ln(1-2Aa) - (K_1 + \frac{K_3}{2})\hat{V}_t & \text{si } \psi \leq \psi_c \\ -\ln\left(p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}\right) - (K_1 + \frac{K_3}{2})\hat{V}_t & \text{si } \psi \geq \psi_c \end{cases}$$

$$\ln \hat{S}_{t+\Delta} = \ln \hat{S}_t + K_0^* + K_1 \hat{V}_t + K_2 \hat{V}_{t+\Delta} + \sqrt{K_3 \hat{V}_t + K_4 \hat{V}_{t+\Delta}} Z_S$$

Avec la méthode QE, on suppose une forme donnée à  $V_{t+\Delta}$  connaissant  $V_t$ . Comme nous allons le constater avec les résultats numériques, la méthode QE est très rapide et donne une erreur négligeable. Il serait donc attrayant de simuler exactement  $V_{t+\Delta}|V_t$  en dépit d'une légère perte de rapidité. Ceci nous introduit aux deux schémas qui suivent.



## 2.5 Schéma EVS et NCI (Haastrecht et Pelsser)

Les deux schémas vont différer seulement par la première étape de la simulation.

- Schéma EVS (pour Exact Variance scheme): on simule exactement  $V_{t+\Delta}|V_t$  comme nous l'avons décrit dans le paragraphe 2.2.1

- Schémas NCI (Haastrecht et Pelsser):

Nous rappelons que  $V_{t+\Delta}$  suit la loi de  $\chi_{d+2N}$  avec  $N$  un processus de poisson d'intensité  $\lambda/2$  et  $\lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta}}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta})} V_u$ .

Dans le récent papier [HP], on a remarqué donc qu'il existe  $\lambda_{max}$  tel que  $\mathbf{P}(\lambda > \lambda_{max}) < \epsilon$  "cf AESM". Par conséquent, il existe un entier  $N_{max}$  vérifiant que les entiers simulés suivant les lois de Poisson d'intensité  $\lambda/2$  sont inférieurs à  $N_{max}$  avec une probabilité proche de 1, par exemple pour des  $\lambda < 20$   $\mathbf{P}(N > 30) < 10^{-6}$ . La méthode proposée consiste donc à dessiner sur une grille uniforme de  $[0,1]$  l'inverse de la fonction de distribution de  $\chi_{d+2N_j}$  pour les  $N_j \leq N_{max}$  qu'on génère souvent, et effectuer une interpolation chaque fois qu'on veut inverser de cette fonction. lorsque  $N > N_{max}$ , on effectue une inversion directe ou on simule normalement une chi-deux.

Pour l'inversion, supposons qu'on veut inverser  $F$  sur  $\{0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{M-1}{M}\}$ , nous avons préféré par souci de rapidité de chercher les inverses itérativement, c-à-d trouver  $x_{i+1}$  vérifiant  $F(x_{i+1}) = \frac{i+1}{M}$  à partir de  $x_i$  qui vérifie  $F(x_i) = \frac{i}{M}$ . Ceci avec un algorithme de Newton avec  $x_i$  comme point initial.

Comme pour la méthode QE, on se contente de supposer que

$$\int_u^t V_s ds = \Delta[\gamma_1 V_u + \gamma_2 V_t]$$

. Dans ce cas aussi, on peut ajouter une correction martingale à  $\hat{S}$ .

Même si nous n'avons pas simulé exactement  $(V_t|V_u)$  dans NCI, nous faisons le calcul de  $K_0^*$  comme si théoriquement c'est le cas. On a donc

$$\mathbf{E}(e^{A\hat{V}_{t+\Delta}}|\hat{V}_t) = \frac{\exp(\frac{C_0 A \lambda}{1-2C_0 A})}{(1-2C_0 A)^{\frac{d}{2}}} \text{ pour tout } A \text{ tq } C_0 A < \frac{1}{2}, \quad C_0 = \frac{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta})}{4\kappa}$$

la condition imposée à  $A$  équivaut

$$\frac{\rho}{\sigma}(1 + \kappa\gamma_2\Delta) - \frac{1}{2}\gamma_2\Delta\rho^2 < \frac{2\kappa}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta})}$$

Elle est vérifiée sans restriction lorsque  $\rho \leq 0$ . Pour  $\rho > 0$ , on a grossièrement la condition  $\rho\sigma\Delta < 2$ . Quand cette dernière est vérifiée:

$$K_0^* = \frac{C_0 A \lambda}{1 - 2C_0 A} + \frac{d}{2} \log(1 - 2C_0 A) - (K_1 + \frac{1}{2}K_3)V_u$$

résumons donc le schéma

Précalcul:

- Trouver  $V_{max}$  comme décrit dans AESM, puis  $\lambda_{max} = \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta}}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta})} V_{max}$ .
- Trouver  $N_{max}$  vérifiant  $\mathbf{P}(N > N_{max}) < \epsilon$ . N poisson d'intensité  $\lambda_{max}$
- Pré-calculer l'inverse des fonctions de distribution des lois de  $\chi_{d+2j}$   
 $j = \{0, \dots, N_{max}\}$  sur la grille  $\{0, \frac{1}{M}, \dots, \frac{M-1}{M}\}$

Simulation des trajectoires:

- Connaissant  $\hat{V}_t$ ,  $\lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta}}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\Delta})} \hat{V}_t$ . Simuler N comme dans 2.2.1
- Simuler  $U_V$  suivant la loi uniforme, trouver k tel que  $\frac{k}{M} \geq U < \frac{k+1}{M}$   
 si  $N \leq N_{max}$ ,  $\hat{V}_{t+\Delta} = (k+1 - MU_V)F_N^{-1}(\frac{k}{M}) + (MU_V - k)F_N^{-1}(\frac{k+1}{M})$   
 si  $N > N_{max}$ ,  $\hat{V}_{t+\Delta} = F_N^{-1}(U_V)$
- $\int_t^{t+\Delta} V_s ds = \Delta [\gamma_1 V_t + \gamma_2 V_{t+\Delta}]$
- $$K_0^* = \frac{C_0 A \lambda}{1 - 2C_0 A} + \frac{d}{2} \log(1 - 2C_0 A) - (K_1 + \frac{1}{2}K_3)V_u$$
  

$$\ln \hat{S}_{t+\Delta} = \ln \hat{S}_t + K_0^* + K_1 \hat{V}_t + K_2 \hat{V}_{t+\Delta} + \sqrt{K_3 \hat{V}_t + K_4 \hat{V}_{t+\Delta}} Z_S$$

## 2.6 Schéma TVS (Zhu)

L'auteur de ce schéma propose de simuler directement la volatilité ie  $\sqrt{V_t}$  à l'aide du schémas d'Euler. Explicitons les calculs de cette méthodes:

Si  $v_t = \sqrt{V_t}$  la volatilité stochastique, par le lemme d'Ito,  $v_t$  vérifie

$$\begin{aligned} dv_t &= \frac{1}{2}\kappa \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \frac{1}{v_t} - v_t \right] dt + \frac{1}{2}\sigma dW_t^V \\ &= \frac{1}{2}\kappa [\theta_v - v_t] dt + \frac{1}{2}\sigma dW_t^V \end{aligned}$$

Nous remarquons que lorsque  $d = 0$ ,  $v$  suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et  $v$  pourrait être simulé exactement. lorsque  $d > 0$ ,  $\theta_v$  est non nulle et elle est stochastique.

Ensuite, l'auteur propose de simuler la volatilité par un schéma d'Euler du premier ordre.

$$v_{t+\Delta} = v_t + \frac{1}{2}\kappa[\theta_{v_t} - v_t]\Delta + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta}Z^V$$

avec  $\theta_{v_t}$  constante sur  $[t, t + \Delta]$ .

Pour calculer  $\theta_{v_t}$ , l'auteur propose deux façons:

1- La première idée consiste à évaluer  $\theta_v$  non pas avec  $v_t$  mais avec  $v_t^*$  constante moyenne de  $v$  sur  $[t, t + \Delta]$

$$v_t^* = \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} v_s ds = \frac{1}{2}[v_t + v_{t+\Delta}]$$

Mais  $v_{t+\Delta}$  n'est pas encore connue, elle serait remplacée par son espérance, soit

$$u_{t+\Delta} = v_t + \frac{1}{2}\kappa \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \frac{1}{v_t} - v_t \right] \Delta$$

Finalement

$$v_t^* = \frac{1}{2}[v_t + u_{t+\Delta}] \quad \text{et} \quad \theta_{v_t}^* = \left( \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \right) \frac{1}{v_t^*}$$

et le schéma est le suivant

$$v_{t+\Delta} = v_t + \frac{1}{2}\kappa[\theta_{v_t}^* - v_t]\Delta + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta}Z^V$$

2-Moments Matching:  $\theta_v$  est choisie de telle façon que  $v_t$  suit sur  $[t, t + \Delta]$  un processus d'Ornstein-Uhlenbeck,  $\theta_v$  peut donc être trouvé en calculant les deux premiers moments de ce processus. En effet

$$\mathbf{E}(V_{t+\Delta}|v_t) = \mathbf{Var}(v_{t+\Delta}|v_t) + [\mathbf{E}(v_{t+\Delta}|v_t)]^2$$

Mais toutes les trois quatités sont connues,

$$\mathbf{E}(V_{t+\Delta}|v_t) = \theta + (v_t^2 - \theta)e^{\kappa\Delta} = m_1 \quad (12)$$

$$\mathbf{Var}(v_{t+\Delta}|v_t) = \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta}) = m_2 \quad (13)$$

$$\mathbf{E}(v_{t+\Delta}|v_t) = \theta_v + (v_t - \theta_v)e^{-\frac{\kappa\Delta}{2}} \quad (14)$$

donc par identification

$$\theta_{vt}^* = \frac{\beta - v_t e^{-\frac{1}{2}\kappa\Delta}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\kappa\Delta}}$$

avec  $\beta = \sqrt{(m_1 - m_2)_+}$

### 3 Tests numériques

Nous allons comparer tous les schémas cités auparavant par la comparaison des prix du call européen dans le prix exacte est connu cf [HES].  $\hat{p}$  étant l'estimateur du prix et  $p$  étant le prix exacte, nous avons calculé les quantités suivante

$$E = \mathbf{E}(\hat{p}) - p \quad \text{et} \quad V = \mathbf{Var}(\hat{p})$$

Dans tous les calculs effectués, le nombre des trajectoires simulés est  $10^5$ . Pour ce qui est du calcul des deux quantité  $E$  et  $V$ , nous avons calculé fait de moyenne avec  $10^3$  calculs de prix.

#### 3.1 Comparaison des schémas ESM et AESM

Nous commençons par comparer le temps de calcul des schémas ESM et AESM. les paramètres sont les suivants  $\kappa = 1.0407$ ,  $\theta = 0.0586$ ,  $\sigma = 0.5196$ ,  $\rho = -0.6747$ ,  $V_0 = 0.0194$ ,  $r = 0.0$ ,  $T = 4$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ . prix exacte = 15.1796

Nous faisons le choix de la précision  $10^{-6}$  pour le calcul des fonction de distribution et de son inverse dans les deux méthodes. En plus, nous avons pris  $\omega = 0.5$  et  $M = 100$  pour cette méthode pour AESM .

Ainsi la méthode AESM réduit considérablement le calcul dans ce cas là. Nous allons comparer la précision des deux schémas. Pour la méthode ESM, nous choisissons un seul pas de temps cf Tab 2.

Table 1: temps de calcul de ESM et AESM

Nombre de simlation	ESM	AESM
10000	24.9	3.01
40000	99.43	11.82
160000	398.15	47.1
640000	1594.54	187.89

Table 2: Erreur de calcul ESM et AESM

$N_t$	AESM	ESM
1	0.4(0.005)	0.05(0.005)
2	0.08(0.006)	
4	0.07(0.006)	
8	0.05(0.006)	

les résultats obtenues montrent sur cet exemple que le schémas AESM est aussi précis que le schéma exacte, cependant comme nous l'avons remarqué plus haut, pour des valeurs grandes de  $\sigma$ , on peut s'attendre à une erreur E importante. Nous gardons les mêmes paramètres qu'avant, mais un paramètre  $\sigma = 1.0$  cf Tab 3. prix exacte  $\approx 12.71$  .

d'après les résultats, le schéma perd de précision pour les valeurs de  $\sigma$  élevées mais l'erreur diminue en diminuant le pas de temps et en augmentant M. Nous remarquons que l'augmentation de M ne coûte en temps de calcul total que quelques fractions de secondes; nous présentons ce temps de calcul

Table 3: Erreur AESM et  $\sigma$

$N_t$	M=100	M=500	M=1000
1	1.56	0.43	0.35
2	1.44	0. 41	0.15
4	1.31	0.33	0.11
8	1.09	0.21	0.09

Table 4: Erreur de calcul ESM et AESM

$\sigma$	M=100	M=500	M=1000	2000
0.5196	0.07	0.36	0.72	1.45
1.0	0.08	0.41	0.83	1.68

$N_t$	Euler	QE-M	EVS-M	NCI-M
1	0.04	0.05	0.1	6.14
2	0.07	0.09	0.18	6.18
4	0.14	0.19	0.34	6.26
32	1.02	1.7	2.45	7.62

Table 5: temps de calcul

pour les deux exemples précédants avec 4 pas de temps. les temps totaux sont 26.28s et 91.16s pour  $\sigma = 0.5196$  et  $\sigma = 1$ . respectivement.

Pour annuler l'erreur commise pas la méthode AESM sur l'approximation de  $z$  par  $z_i$ , on peut donc choisir  $M$  suffisamment grand, ceci augmente considérablement la précision de la méthode lorsque  $\sigma$  est petit. Cependant, pour des grandes valeurs de  $\sigma$ , affiner le pas de temps s'impose ce qui augmente linéairement le temps de calcul. La méthode AESM qui avait pour but à l'origine de garder le caractère exacte de la méthode ESM tout en diminuant le temps de calcul devient donc coûteuse en temps de calcul et incomparables aux schémas qui suivent.

### 3.2 Comparaison des schémas Euler/QE/EVS/NCI

Nous effectuons la comparaisons de ses schémas avec les mêmes paramètres. Nous commençons par comparer les temps de calcul:

Ces schémas sont très rapides. Le schémas NCI est plus rapide que le schéma EVS car le temps de calcul ne dépend pas linéairement du pas de temps, le seul coût important du calcul est l'étape de précalcul, le reste n'est que des interpolations.

Pour la précision des schémas, Nous vérifions que le schéma d'Euler converge en fonction du pas de temps, Nous constatons que les erreurs des schémas EVS-M et NCI-M sont indistinguables et que le schéma QE est de loin

$N_t$	Euler	QE-M	EVS-M	NCI-M
K=80				
1	-4.4487 (0.006)	0.108 (0.003)	-0.4219 (0.006)	-0.4199 (0.006)
2	2.0982 (0.014)	0.278 (0.008)	-0.0497 (0.007)	-0.047 (0.007)
4	1.212 (0.012)	0.0952 (0.008)	-0.0353 (0.008)	-0.0315 (0.007)
8	0.5318 (0.009)	0.0038 (0.008)	-0.02 (0.007)	-0.0075 (0.008)
16	0.2101 (0.008)	0.0016 (0.008)	0.008 (0.007)	0.0112 (0.008)
32	0.0852 (0.008)	0.0048 (0.008)	0.0105 (0.008)	0.0346 (0.009)
K=100				
1	-4.1059 (0.005)	-0.9167 (0.004)	-1.4017 (0.003)	-1.3983 (0.003)
2	3.1857 (0.015)	-0.0521 (0.003)	-0.4659 (0.004)	-0.4645 (0.004)
4	1.8152 (0.008)	0.0499 (0.005)	-0.1490 (0.004)	-0.1404 (0.005)
8	0.7515 (0.006)	-0.0021 (0.005)	-0.0608 (0.005)	-0.0562 (0.005)
16	0.3017 (0.005)	-0.0163 (0.004)	-0.0190 (0.004)	-0.0176 (0.005)
32	0.1082 (0.005)	-0.0119 (0.005)	-0.0124 (0.005)	0.009 (0.006)
K=120				
1	-2.311 (0.002)	-1.697 (0.001)	-1.7826 (0.001)	-1.7821 (0.001)
2	3.7785 (0.008)	-0.7605 (0.001)	-0.8454 (0.002)	-0.8442 (0.002)
4	2.1437 (0.005)	-0.1911 (0.002)	-0.2736 (0.002)	-0.2728 (0.002)
8	0.8916 (0.003)	-0.7477 (0.002)	-0.0759 (0.002)	-0.0693 (0.002)
16	0.3638 (0.003)	-0.007 (0.002)	-0.0074 (0.002)	-0.0099 (0.002)
32	0.1491 (0.003)	0.0073 (0.003)	0.0081 (0.003)	0.0137 (0.003)

Table 6: Erreur pour schémas Euler, QE-M, EVS-M et NCI-M en fonction de  $\Delta$

le plus performant et converge rapidement.



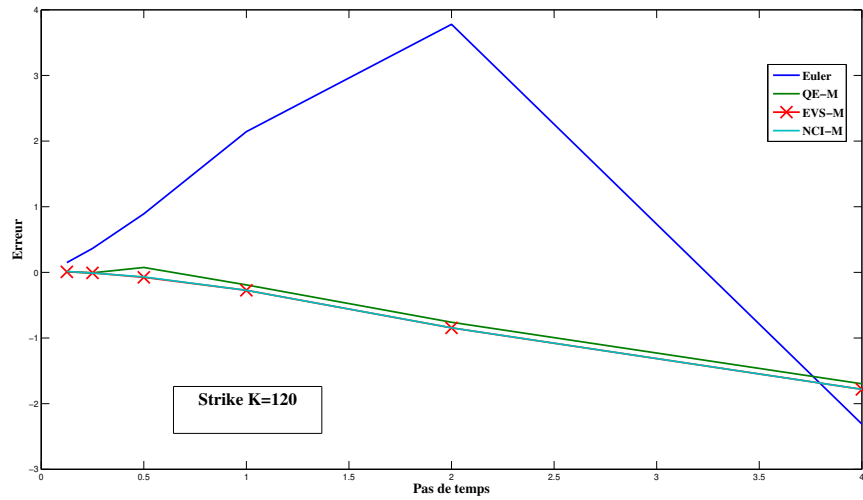
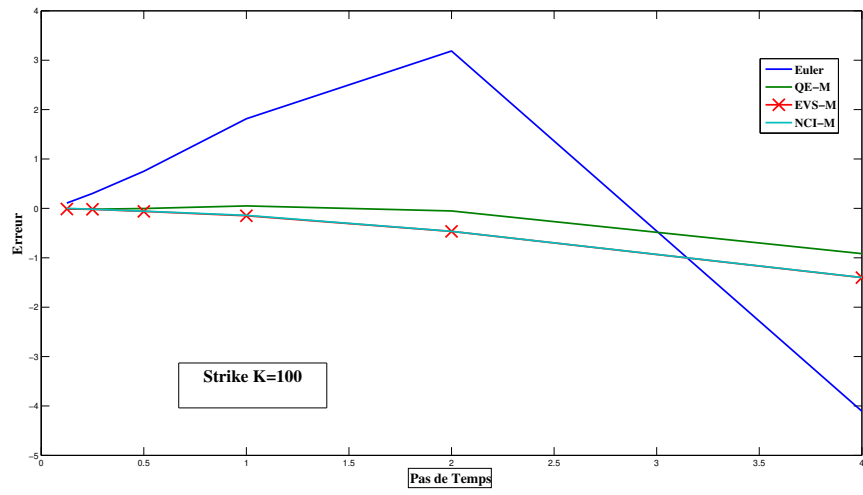
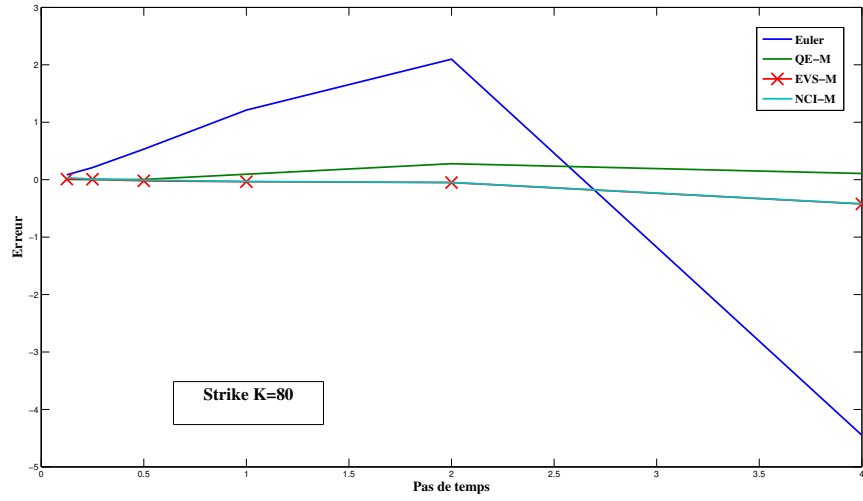


Figure 1: Comparaison de l'erreur  $K = 80$ ,  $K = 100$  et  $K = 120$

Par le calcul qu'on vient de faire, nous avons constaté que la méthode ESM est très lente, il a fallu presque 26 min pour simuler 640000 trajectoires, avec une fréquence de calcul petites ici 4. Nous remarquons aussi que sur cette exemple la méthode AESM réduit significativement le temps de calcul sans pour autant réduire la précision du schéma. Cependant la précision de cette méthode dépend essentiellement du nombre de pas de temps considéré

On voit bien que le schéma QE-M est le me meilleur schéma en précision et en temps de calcul. Mais que le schéma NCI présente aussi une précision et une rapidité attrayante, ce schéma est plus particulièrement rapide efficace, lorsqu'on a l'intention de calculer plusieurs prix ou des moyenne sur un même prix, il suffit de faire un calcul initial des inverses, le reste des étapes de calcul sont directes.

## References

- [AD] J.H. Ahrens and U. Dieter, Computer Generation of Poisson Deviates from Modified Normal Distributions, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 8, No. 2, pp.163-179, 1982.
- [AN] L. Andersen, Efficient simulation of the Heston Stochastic Volatility model, 2007. [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=946405](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=946405) 3
- [AS] M. Abramowitz and I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover (New York), pp 374-379 1964.
- [BK06] M. Broadie and O Kaya, Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion models, Operations Research, vol. 54 no. 2, 2006. 3
- [BK04] Exact simulation of option Greeks under stochastic volatility and jump diffusion models, Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, Volume 2, Issue 5-8, pp. 1607 - 1615, 2004.
- [HES] S.L. Heston, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies, 6, pp. 327-343, 1993.
- [HP] A.V.Haastrecht, A.Pelsser. Efficient, almost exact simulation of the Heston stochastic volatility model.(2008) <http://www1.fee.uva.nl/pp/apelsser> 3
- [LKD] R. Lord, R. Koekkoek and D. van Dijk, A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models, working paper, Erasmus University Rotterdam, Rabobank International and Robeco Alternative Investments, 2006. 3
- [MT] G. Marsaglia and W.W. Tsang, A simple method for generating gamma variables, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 26, no. 3, pp. 363-372, 2000.

- [R.P.B] R. P. Brent, "An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function", Computer Journal, 14 (1971) 422D425
- [SM] R.D. Smith, An almost exact simulation method for the Heston model, Journal of Cumputational Finance, Vol. 11, no. 1, pp. 115-125, 2007. 3
- [ZHU] J. Zhu, A Simple and Exact Simulation Approach to Heston Model, preprint, [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1153950](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1153950), 2008. 3