

ECOLE POLYTECHNIQUE
PROMOTION 2008
ORREGO Ignacio

RAPPORT DE STAGE DE RECHERCHE

Modèle Libor Markov Fonctionnel

NON CONFIDENTIEL PUBLICATION

Option : MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Champ de l'option : MATHEMATIQUES FINANCIERES
Directeur de l'option : NIZAR TOUZI
Directeur de stage : AGNES SULEM
Dates du stage : 11 AVR jusqu'à 2 JUN 2011
Nom et adresse de l'organisme :
Inria Paris - Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay, France

Abstract

This paper is centred on the n -dimensional Markov-functional interest rate model, i.e. a model driven by an n -dimensional state process and constructed using Markov-functional techniques (pure discount bonds can be expressed as a functional of some Markov process). The paper also develops a quick overview through LIBOR market models and through low dimension Markov-functional models. We study the similarities to an n -factor LIBOR market model hence allowing intuition from the LIBOR market model to be transferred to the Markov-functional model; we study also the advantages and disadvantages of the model. Finally we give an implementation of the model in a specific language ("C") and using a specific programming library (PNL). We use the elements of this library to give a good standard implementation of the n -dimensional Markov-functional model given by Kaisajuntti and Kennedy (January 7, 2008). This model is suitable for pricing certain exotic interest rate products where the control of the correlation between rates is particularly important.

Abstract

Ce rapport est centré sur le modèle Markov-fonctionnel à n -dimension, i.e. un modèle qui est conduit par un processus de Markov à n -dimension et que l'on construit en utilisant les raisonnements du modèle Markov-fonctionnel unidimensionnel. Dans ce rapport nous présentons un bref récapitulatif du modèle de marché LIBOR et le modèle Markov-fonctionnel unidimensionnel. Nous étudions les propriétés qu'ils ont en commun, ce qui permet d'étendre une partie de l'intuition derrière le modèle LIBOR au modèle Markov-fonctionnel; nous étudions aussi les avantages et désavantages du modèle à n -dimension. Finalement nous présentons une implémentation du modèle en « C » en utilisant une librairie spécifique appelée PNL. Nous utilisons les éléments de cette librairie pour implémenter le modèle présenté par Kaisajuntti and Kennedy (7 Janvier 2008) d'une façon efficace. Les propriétés de ce modèle le rendent adéquat pour le pricing de certains produits dérivés sur le marché des taux d'intérêt.

Table des matières

1	Préliminaires sur le taux d'intérêt	7
1.1	Definitions sur le taux d'intérêt	8
1.2	Mesures de probabilités équivalentes	9
2	Le modèle de marché LIBOR	12
2.1	Modèle LIBOR sous la mesure forward	13
2.1.1	Mesures forward	13
2.1.2	Modèle LIBOR	14
2.2	Modèle LIBOR sous la mesure forward “spot”	20
3	Le modèle Markov-Fonctionnel	23
3.1	Modèle Markov-Fonctionnel à 1-dimension	24
3.1.1	Formulation sous la mesure forward	24
3.1.2	Calibration du modèle	25
3.2	Modèle Markov-Fonctionnel à n-dimensions	27
3.2.1	Construction sous la mesure forward “spot”	27
3.2.2	Modélisation	30
3.2.3	Résultats	34

Introduction

L'intérêt pour les produits exotiques de taux d'intérêt a considérablement augmenté ces 10 dernières années ; mais le pricing de ces produits est un des problèmes les plus sophistiqués dans la théorie de pricing des actifs. De nos jours les modèles appelés « modèles de marché » sont devenus de plus en plus populaires parmi les modèles de pricing de taux d'intérêt ; et parmi ces « modèles de marché » celui qui est centré sur le LIBOR (aussi appelé LIBOR market model) est devenu le modèle de benchmark dans le pricing et la gestion de risque de ce type de produits financiers. Les propriétés les plus appréciées de ce type de modèles sont qu'ils modélisent des taux d'intérêt qui sont observables dans le marché et qu'ils se calibrent parfaitement avec la formule de Black-Scholes pour les caplets, qui est un des dérivés de taux le plus liquides. Par ailleurs, les «market models » permettent de contrôler la structure de corrélation entre les LIBORS, et cette propriété devient très importante lors du pricing de dérivés exotiques de taux. Le problème le plus grand des « modèles de marchés » est le fait que, bien qu'ils soient très compréhensibles en théorie, ils sont difficiles à implémenter de façon efficace. Une alternative qui a aussi la caractéristique de se calibrer parfaitement à la formule de Black-Scholes (ou à toute formule en absence d'arbitrage) pour les caplets et aussi modéliser les taux qui sont observables dans le marché est le modèle Markov-fonctionnel. L'approche du modèle Markov-fonctionnel est de baser la modélisation sur un processus de Markov de basse dimension qui donne les possibilités d'appliquer plusieurs techniques pour une implémentation efficace. Ces modèles sont très similaires au modèle LIBOR du point de vue de la distribution. Ce type de modèle a été présenté pour la première fois en [1]. Avec le temps, les chercheurs ont commencé à s'intéresser si un modèle Markov-fonctionnel à n -dimensions serait aussi similaire 'à sont analogues dans les modèles LIBOR. Cela s'éloigne de l'idée originale derrière le modèle mais c'était intéressant d'un point de vue théorique si c'est possible

de construire un modèle de Markov à n -dimensions et s'il jusqu'à quel point il serait similaire au modèle LIBOR. Un de ces représentation est présentait dans [3] . Pour ce type de modèles à n -dimensions nous ne pouvons pas faire les mêmes implémentations efficaces que l'on pouvait dans le cas unidimensionnel. Cependant si l'on est capable d'accepter un modèle qui a seulement une implémentation par la méthode de Monte-Carlo, tel est le cas des modèles de marché LIBOR, ce modèle a deux avantages par rapport à son analogue LIBOR. D'abord le modèle est en général plus rapide que le modèle LIBOR car nous devons suivre un processus à chaque instant de temps et non plusieurs. Les approximations nécessaires pour l'implémentation du modèle en termes de la structure de corrélation sont beaucoup plus proches aux approximations standards. Mon projet de stage est centré sur la compréhension et l'implémentation d'un modèle Markov-Fonctionnel à n -dimensions dans le langage C. L'apport principal de mon projet de stage ce de chercher à programmer le modèle présenté par Kaisajuntti et Kennedy dans [3] et le calibrer de façon efficace, en utilisant les outils disponibles dans une librairie particulière qui est utilise par le Laboratorio I.N.R.I.A. qui est où j'ai réalisé mon stage. Ce programme a été implémente dans un logiciel de pricing de produits dérivés sous la demande d'une institution financière.

Chapitre 1

Préliminaires sur le taux d'intérêt

Cette partie est fortement inspirée de [1], [3] et [6] . Nous allons considérer une économie avec une seule devise, complète et en absence d'arbitrage, que l'on pourrait appeler ξ , dans laquelle les actifs sous-jacents sont des obligations. Nous appelons D_{tT} le prix à la date t de l'obligation zéro-coupon avec maturité T (alors nous avons $D_{TT} = 1$). En général nous allons décrire les formulations discrètes des modèles présentés dans ce rapport. Il nous sera utile de considérer un ensemble discret de maturités strictement croissantes :

$$\mathfrak{S} = \{T_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1\},$$

Où $T_0 < T_1 < \dots < T_{n+1}$ et T_0 représente la date actuelle, celui sera l'ensemble avec lequel nous allons travailler tout au long de ce rapport.

Nous allons définir la filtration \mathcal{F}_t comme tous les prix des zéros-coupons disponibles jusqu'à la date t , ou dit d'une autre manière $\mathcal{F}_t = \sigma(D_{vT} : v \leq t, T \in \mathfrak{S})$ et nous allons travailler sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. Il est peut-être pertinent de remarquer que, bien que nous permettions le trading dans cette économie, nous interdisons les injections de fonds externes à l'économie, cela veut dire que toutes les stratégies doivent être autofinancées.

Pour améliorer la compréhension des chapitres suivants, nous allons d'abord de clarifier quelques concepts qui seront souvent mentionnés dans le reste du rapport.

1.1 Définitions sur le taux d'intérêt

Definition 1.1. On définit $f(t, T)$ le **taux d'intérêt forward instantané** à la date t pour une maturité T suivant la formule :

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log(D_{tT})$$

Nous appelons aussi le **taux d'intérêt instantané à court terme** par r , si r est de la forme $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T)$. Avec ces deux définitions de taux d'intérêt nous définissons la quantité suivante que nous sera très utile par la suite.

Definition 1.2. On appelle B_t “Money Market account” de la forme :

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right)$$

où $r(u)$ est donné par l'expression décrite ci-dessus.

Ces premières définitions de taux d'intérêt sont la base sur laquelle se centrent plusieurs modèles de taux d'intérêt (en particulier les modèles de type “short rate”, “long rate” et quelque formulation de modèles de types HJM). Par ailleurs les modèles de marché appelés LIBOR qui seront un de nos sujets d'études utilisent le concept de taux d'intérêt forward simple.

Definition 1.3. On dénote le **taux d'intérêt forward simple** à la date t dans l'intervalle $[T, T + \delta]$ par $f_s(t, T)$, pour tout $0 \leq t \leq T \leq T_{n+1} - \delta$. Ce taux est défini en fonction des obligations zéro-coupon par la formule

$$1 + \delta f_s(t, T) = \frac{D_{t,T}}{D_{t,T+\delta}}$$

En utilisant la définition 1.1, nous avons de façon équivalente

$$1 + \delta f_s(t, T) = \exp\left(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right)$$

En plus de ces deux définitions de taux d'intérêt, nous aurons besoin pour la formulation des modèles de quelques concepts financiers qui nous aideront à éviter des confusions.

Definition 1.4. On appelle *numéraire* tout processus de prix $V = \{V_t, \quad 0 \leq t \leq T_{n+1}\}$ qui est strictement positif presque sûrement pour tout $t \in [0, T_{n+1}]$.

1.2 Mesures de probabilités équivalentes

En règle générale on doit choisir un actif qui jouera le rôle de numéraire et que l'on utilisera pour normaliser tous les autres actifs dans le marché.

Definition 1.5. On appelle \mathcal{N} une *mesure martingale* si elle est équivalente à \mathcal{P} et s'il existe un numéraire N tel que les actifs du marché normalisés par le numéraire sont des \mathcal{F} -martingales sous \mathcal{N} .

Dans notre économie les actifs sous-jacents sont les obligations alors suivant la définition ci-dessus \mathcal{N} est une mesure martingale si elle est équivalente à \mathcal{P} et s'il existe un numéraire N tel que $(D_{tT}/N_t, T \in \mathfrak{T})$ est une \mathcal{F}_t -martingale sous \mathcal{N} .

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes nous savons que l'absence d'arbitrage se traduit par l'existence d'une mesure risque-neutre. Nous savons aussi que sous cette mesure les prix des actions normalisés par le "market-saving account" (voir définition) sont des martingales. Dans ce cadre, les actifs sous-jacents sont les actions et le numéraire est le "market-saving account", ainsi selon la définition 1.5 la mesure risque-neutre est une mesure martingale équivalente. La relation entre l'existence d'une mesure martingale équivalente et l'absence d'arbitrage n'est pas une caractéristique que du modèle de Black-Scholes; en fait elle est beaucoup plus générale et on la connaît sous le nom de "Théorème fondamental du pricing d'actifs".

Imaginons que nous nous intéressons au problème de pricer un produit dérivé dans cette économie, si nous supposons que à une date T la valeur de ce produit V_T sera complètement déterminée par l'évolution du prix de l'actif sous-jacent. Supposons l'existence d'une mesure martingale \mathcal{N} et d'un numéraire N . Alors

nous avons, par l'absence d'arbitrage, que la valeur V_t de cette dérivée, qui est répliquable par le marché, pour n'importe quel instant t antérieur à T peut se représenter par :

$$V_t = N_t E_N \left[\frac{V_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T \quad (1.2.1)$$

Dans les formulations de ces modèles nous allons nous servir de deux mesures martingale équivalentes, principalement la mesure forward et la mesure forward spot.

Pour faciliter la lecture nous allons supposer l'existence dans cette économie d'une mesure forward $Q^{T_{n+1}}$; elle est une mesure martingale équivalente en utilisant le flux de prix de l'obligation zéro-coupon $Q^{T_{n+1}}$ comme numéraire. Mais l'existence de cette mesure peut être dérivée des hypothèses faites antérieurement. Ainsi il est immédiat, selon la définition 1.3, que tout taux forward simple f_s dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ est une martingale sous Q^{T_i} par rapport à la filtration \mathcal{F} .

La grande différence entre l'implémentation d'un modèle Markov-Fonctionnel à 1-dimension et d'un modèle à n-dimension est le fait que pour le premier on utilise généralement *backward induction* pour la formulation et *forward induction* pour le deuxième. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction notre objectif est de deviner la forme des fonctionnels qui dépend de notre processus de Markov. La mesure forward est particulièrement attractive pour le modèle à une dimension car elle nous donne des équations pour trouver la forme explicite des fonctionnels qui sont faciles à résoudre en utilisant *backward induction*. Par contre ces équations deviennent compliquées à résoudre en utilisant *forward induction*, ainsi pour traiter le modèle à n-dimensions nous allons travailler sous la mesure forward "spot" que nous allons dénoter par Q^* . Sous cette mesure les équations qui définissent les formes des fonctionnels sont agréables à résoudre en utilisant le forward induction. La mesure forward "spot" est une mesure martingale équivalente qui utilise comme numéraire le "**saving account**". Le "**saving account**" peut être vu comme la version discrète du "Money market". On peut le reproduire en utilisant la stratégie de trading suivante : à $t = T_0$ acheter une unité de la devise ξ sur une obligation zéro-coupon de maturité T_1 ; à $t = T_1$ investir les revenus sur une obligation zéro coupon de maturité T_2 et continuer de la même façon consécutivement. Le processus de prix de ce numéraire est décrit par les équations suivantes :

$$N_t = D_{tT_1}, \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$N_t = \frac{D_{tT_{i+1}}}{D_{T_1T_{i+1}}}, \quad T_i \leq t \leq T_{i+1} \quad (1.2.2)$$

Nous supposons aussi qu'il existe un mouvement brownien n -dimensionnel W sous la mesure "rolling spot", avec une structure de corrélation donnée.

$$W = (W^1, \dots, W^n)$$

$$dW_t^i dW_t^j = \rho^{ij} dt \quad (1.2.3)$$

Nous allons supposer que le prix des zéros-coupon sont déterminé par W . Ainsi la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle engendrée par le mouvement brownien. Nous appellerons tout au long de ce rapport $W^n = W^{Q^*}$ étant donné que c'est la composante dans laquelle on cherchera à exprimer tout les taux LIBORs pour la formulation des modèles sous la mesure forward spot. Ainsi on évitera la sobre utilisation d'indices et on rappellera que on travaille sous la mesure forward spot Q^* .

Chapitre 2

Le modèle de marché LIBOR

Dans ce chapitre nous allons rappeler rapidement la formulation d'un modèle LIBOR à n -dimensions. L'objectif de cette partie est de pouvoir comparer plus tard les relation entre ce modèle (un des modèle le plus accepté et utilisé parmi les modèles de taux d'intérêt) et les modèle markov-fonctionnel.

Étant donné que nous cherchons la comparaison entre les modèles, nous allons présenter la formulation du modèle LIBOR sous la mesure "forward" et sous la mesure forward "spot", les deux dans le cas discret. La seule différence qui existe entre les deux formulations est que le numéraire que nous allons considérer dans le deuxième cas (mesure forward "spot") ne sera pas l'obligation zéro-coupon sinon qu'il sera donné par l'équation 1.2.2 (ou saving account).

Pour faciliter l'explication de cette idée préliminaire nous allons considérer que les "accroissement de temps" sont de la forme $\alpha_i = T_{i+1} - T_i$, mais les résultats restent vrai indépendamment de l'échelle de temps choisie. Alors les taux de LIBOR forward "établi" au temps t pour la période $[T_i, T_{i+1}]$ sont de la forme :

$$L_t^i = \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{D_{tT_i} - D_{tT_{i+1}}}{D_{tT_{i+1}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.0.1)$$

Nous croiserons au fur et mesure quelques produits dérivés de taux d'intérêt. En particulier les produits connus par le nom de Caplets nous seront très utiles.

Definition 2.1. Un *caplet* est un produit financier qui délivre un flux égal à la différence entre un taux d'intérêt et un taux d'exercice, seulement si cette différence est positive. Le caplet a une date T_1 de setting et une date T_2 d'exer-

cice.

En général, le flux donné par le caplet dépend de la fraction de temps entre la date de setting et d'exercice, et aussi d'une valeur nominale mais souvent ces valeurs peuvent être omises. Cela veut dire qu'en générale nous allons considérer le payoff d'un caplet avec un taux d'exercice K , date de setting T_i et maturité T_{i+1} donné par la formule,

$$Payoff^{caplet} = \alpha_i(L_{T_i}^i - K)^+ \quad (2.0.2)$$

Definition 2.2. Un Digital caplet est une option qui paie une unité au temps S si au temps T (antérieur à S) le LIBOR pour la période $[T, S]$ es supérieur à un strike K . Le payoff de cette option à la date S est $payoff_S = \mathbf{1}\{L_T \geq K\}$

Definition 2.3. Un Digital caplet in arrears égale à un digital calplet, mais on regarde le LIBOR à la date de paiement (i.e. on reregarde le LIBOR à la date S pour la période $[S, S + (S - T)]$). Le payoff de cette option à la date S est $payoff_S = \mathbf{1}\{L_S \geq K\}$

2.1 Modèle LIBOR sous la mesure forward

2.1.1 Mesures forward

Quand on veut faire du pringing de dérivés de taux d'intérêt il est souvent adéquat de choisir une obligation zéro-coupon comme numéraire. Par exemple si l'on veut donner le prix d'une option avec un payoff à la date T , il est judicieux d'utiliser l'obligation zéro-coupon avec maturité T comme numéraire car le prix de ce numéraire à la date T est 1. De cette façon nous évitons le problème de devoir dériver la distribution jointe du payoff et du numéraire.

Comme nous l'avons dit dans le chapitre de préliminaires la mesure équivalente associée au processus de prix de l'obligation zéro-coupon $D_{T_{i+1}}$ est appelée mesure $T_i - forward$ et dénotée Q^{T_i} . Dans le papier de GEMAN, EL

KAROUÏ & ROCHET (1995) on voit une preuve du fait que Q^{T_i} est une mesure équivalente à la mesure risque neutre Q et qu'elle est définie par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ^{T_i}}{dQ} = \frac{1}{D_{T_0 T_i} B_{T_i}} \quad (2.1.1)$$

où $D_{T_0 T_i}$ est l'obligation zéro-coupon et B_{T_i} est le “money market account” décrit dans la définition 1.2. Nous pouvons facilement déduire que tous les actifs qui sont normalisés par l'obligation zéro-coupon de maturité T_i sont des martingales sous la mesure Q^{T_i} .

2.1.2 Modèle LIBOR

Selon ce que nous avons vu dans la section ci-dessus, nous avons en particulier L_t^i donné par l'équation 2.0.1 martingale sous $Q^{T_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n$. Alors grâce au théorème de représentation de martingale nous avons la forme suivante du taux du LIBOR en T_i :

$$dL_t^i = L_t^i \tilde{\sigma}_t^i dW_t^{i+1} \quad (2.1.2)$$

Supposons que nous connaissons les n fonctions déterministes de volatilité.

$$\tilde{\sigma}_t^i, t \leq T_i \quad (2.1.3)$$

Et donc la distribution des LIBORs L_t^i sous les $Q^{T_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n$ est log-normale d'espérance

$$\log(L_t^i) - \frac{1}{2} \int_t^{T_i} \|\tilde{\sigma}_s^i\|^2 ds$$

Et variance

$$\int_t^{T_i} \|\tilde{\sigma}_s^i\|^2 ds$$

Avant de passer à la formulation de ce modèle nous voudrions montrer que ce type de modèle nous permet de retrouver la formule de Black-Scholes pour les prix de caplet (décrit dans la définition 2.1). Ainsi si nous prenons un caplet avec un taux d'exercice K , une date de “setting” T_i et une maturité T_{i+1} , nous savons que son payoff est donné par l'équation 2.0.2 et nous pouvons calculer le prix de la façon suivante

$$V_t^{caplet} = E_Q \left[\frac{1}{B_{T_{i+1}}} \alpha_i (L_{T_i}^i - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.1.4)$$

En remplaçant l'équation 2.1.1 nous obtenons,

$$= D_{tT_{i+1}} E_{Q^{T_{i+1}}} [\alpha_i (L_{T_i}^i - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

En utilisant le fait que L_t^i a une distribution log-normale sous $Q^{T_{i+1}}$ nous avons

$$= \alpha_i D_{tT_{i+1}} (L_t^i \Phi(d_1(t, T)) - K \Phi(d_2(t, T)))$$

où

$$d_{1,2}(t, T) := \frac{\log\left(\frac{L_t^i}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \int_t^{T_i} \|\tilde{\sigma}_s^i\|^2 ds}{\left(\int_t^{T_i} \|\tilde{\sigma}_s^i\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}}$$

et Φ est la distribution de la loi normale centrée réduite. On observe clairement que celle-ci est la formule de Black-Scholes pour le prix d'un caplet avec une volatilité $\hat{\sigma}(t)$ égal à,

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} \|\tilde{\sigma}_s^i\|^2 ds$$

Ainsi nous avons montré que le modèle LIBOR qui suit l'équation 2.0.1 donne la formule de Black-Scholes pour le prix de caplet. Cela est une propriété importante du modèle LIBOR, que nous considérons utile à montrer avant de présenter la formulation de ce modèle.

Un modèle de taux d'intérêt consiste basiquement d'un numéraire et d'un ensemble d'équation différentielles stochastiques qui sont satisfaites par une famille d'obligation zéro-coupon. Nous avons déjà défini le numéraire, il nous faut trouver les équation et les résoudre. Pour cela nous allons introduire le concept suivant,

Definition 2.4. F est un processus forward sous Q^{T^*} , si pour tout $T \in [0, T^*]$ il es de la forme,

$$F(t, T, T^*) = \frac{D_{t,T}}{D_{t,T^*}}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Strictelement positive, et une martingale continue sous Q^{T^*} .

En remplaçant la définition ci-dessus dans l'équation 2.0.1 nous obtenons que pour tout $i = 1, \dots, n+1$,

$$1 + \alpha_i L_t^i = F(t, T_i, T_{i+1}), \quad 0 \leq t \leq T_i$$

Nous allons commencer par étudier la dynamique de $F(t, T, T_{n+1})$ pour tout $T \in [0, T_{n+1}]$ et $0 \leq t \leq T$, pour après définir la dynamique de LIBORs. Ainsi étant donné que $F(\cdot, T, T_{n+1})$ est une martingale sous Q^{T_n} . Le théorème de représentation nous dit que,

$$dF(t, T, T_{n+1}) = F(t, T, T_{n+1}) \gamma(t, T, T_{n+1}) dW_t^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\text{où } Q^{T_n}[\int_0^{T+\delta} \|\gamma(t, T+\delta, T_{n+1})\|^2 dt < \infty] = 1$$

Nous pouvons écrire,

$$F(t, T, T+\delta) = \frac{F(t, T, T_{n+1})}{F(t, T+\delta, T_{n+1})} = \frac{D_{t,T}}{D_{t,T+\delta}}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Une application directe de la formule d'Itô nous permet de trouver une expression de $dF(t, T, T+\delta)$ en fonction des quantités à droite de l'équation,

$$dF(t, T, T+\delta) = \frac{F(t, T, T_{n+1})}{F(t, T+\delta, T_{n+1})} (\gamma(t, T, T_{n+1}) - \gamma(t, T+\delta, T_{n+1})) (-\gamma(t, T+\delta, T_{n+1}) dt + dW_t^{n+1})$$

$$= F(t, T, T+\delta) \gamma(t, T, T+\delta) (-\gamma(t, T+\delta, T_{n+1}) dt + dW_t^{n+1})$$

où $\gamma(t, T, T+\delta) = \gamma(t, T, T_{n+1}) - \gamma(t, T+\delta, T_{n+1})$. Alors nous pouvons définir la mesure $T+\delta$ - forward $Q^{T+\delta}$ par l'équation,

$$\frac{dQ^{T+\delta}}{dQ^{T_{n+1}}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{T+\delta} \|\gamma(t, T+\delta, T_{n+1})\|^2 dt + \int_0^{T+\delta} \gamma(t, T+\delta, T_{n+1}) dW_t^{n+1}\right) \quad (2.1.5)$$

Il est clair que $Q^{T+\delta}$, définie par l'équation ci-dessus, satisfait toutes les conditions que nous avons énoncés pour être une mesure $T+\delta$ - forward. Nous avons aussi par le théorème de Girsanov,

$$W_t^{T+\delta} = W_t^{n+1} - \int_0^{T+\delta} \gamma(t, T+\delta, T_{n+1}) du, \quad 0 \leq t \leq T+\delta$$

qui est un $Q^{T+\delta}$ - mouvement brownien. Finalement nous avons que sous

$Q^{T+\delta}$ le processus $F(t, T, T + \delta)$ satisfait,

$$dF(t, T, T + \delta) = F(t, T, T + \delta)\gamma(t, T, T + \delta)dW_t^{T+\delta}$$

Alors pour tout taux simple forward, suivant la définition 1.3

$$f_s(t, T) = \frac{1}{\delta}(F(t, T, T + \delta) - 1)$$

Ainsi en remplaçant les résultat précédant nous trouvons que les taux forward satisfont

$$\begin{aligned} df_s(t, T) &= \frac{1}{\delta}F(t, T, T + \delta)\gamma(t, T, T + \delta)dW_t^{T+\delta} \\ &= \frac{1}{\delta}(1 + \delta f_s(t, T))\gamma(t, T, T + \delta)dW_t^{T+\delta} \\ &= f_s(t, T)\left[\frac{1 + \delta f_s(t, T)}{\delta f_s(t, T)}\gamma(t, T, T + \delta)\right]dW_t^{T+\delta} \end{aligned}$$

Celle-là est une expression continue pour tous les taux simples forward. Les LIBORs sont une famille discrète de taux simples forward ; ainsi nous obtenons que sous Q^{n+1} le taux LIBOR L_t^n satisfait

$$dL_t^n = L_t^n\left[\frac{1 + \alpha_n L_t^n}{\alpha_n L_t^n}\gamma(t, T, T + \delta)\right]dW_t^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T_n$$

Et en comparant avec l'expression 2.1.2 nous obtenons,

$$\tilde{\sigma}_t^n = \frac{1 + \alpha_n L_t^n}{\alpha_n L_t^n}\gamma(t, T, T + \delta) \quad (2.1.6)$$

Nous rappelons que, par hypothèse, la volatilité $\tilde{\sigma}_t^i$, $t \leq T_i$ est connue et déterministe pour tout $t \leq T_i$ et $i = 1, \dots, n$.

Alors la dynamique du taux LIBOR L_t^n est déterminée par la fonction de volatilité $\tilde{\sigma}_t^n$. De cette manière nous pouvons construire la famille d'équations qui déterminent le taux LIBOR en utilisant un raisonnement par récurrence backward ("backward induction").

Pour commencer nous allons définir la mesure Q^{T_n} en suivant le même raisonnement que dans l'équation 2.1.5. Ainsi nous obtenons

$$\frac{dQ^{T_n}}{dQ^{T_{n+1}}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{T_n} \|\gamma(t, T_n, T_{n+1})\|^2 dt + \int_0^{T_n} \gamma(t, T_n, T_{n+1}) dW_t^{n+1}\right)$$

Et donc par le théorème de Girsanov, le processus décrit par

$$W_t^n = W_t^{n+1} - \int_0^{T_n} \gamma(t, T_n, T_{n+1}) du, \quad 0 \leq t \leq T_n \quad (2.1.7)$$

W est un mouvement brownien sous la mesure équivalente Q^{T_n} . Remarquons encore une fois que pour Q^{T_n} défini par la formule ci-dessous, toutes les propriétés qui caractérisent une mesure T – *forward* sont bien satisfaites : elle est équivalente et tous les processus de prix des sous-jacent divisé par le numéraire sont de martingales. Nous pouvons bien observer que sous Q^{T_n} , la dynamique du taux LIBOR L_t^{n-1} est effectivement

$$dL_t^{n-1} = L_t^{n-1} \tilde{\sigma}_t^{n-1} dW_t^n$$

Après avoir vu que la mesure Q^{T_n} ainsi défini est effectivement une mesure T_n – *forward*, nous pouvons injecter l'équation 2.1.7 dans l'équation 2.1.2 et nous obtenons,

$$\begin{aligned} dL_t^n &= L_t^n \tilde{\sigma}_t^n dW_t^{n+1} \\ &= L_t^n \tilde{\sigma}_t^n (\gamma(t, T_n, T_{n+1}) dt + dW_t^n) \\ &= L_t^n \tilde{\sigma}_t^n \left(\frac{\alpha_n L_t^n}{1 + \alpha_n L_t^n} \tilde{\sigma}_t^n dt + dW_t^n \right) \end{aligned}$$

Ainsi en itérant cette “backward induction” jusqu’à ce que nous ayons reconstruit la famille entière de taux LIBORs décrits par 2.1.2, nous obtenons que pour tout $j = i + 1, \dots, n$

$$dL_t^j = L_t^j \tilde{\sigma}_t^j \left(\sum_{k=i+1}^j \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k dt + dW_t^{i+1} \right) \quad 0 \leq t \leq T_j \quad (2.1.8)$$

Finalement pour bien déterminer la dynamique des taux LIBORs sous chaque mesure Q^{i+1} il nous reste à dériver la dynamique de L_t^j pour $j = i + 1, \dots, n$.

Pour cela nous suivons un raisonnement de type *forward induction*. Ainsi

sous Q^2 le taux LIBOR L_t^1 satisfait, par l'équation 2.1.2,

$$dL_t^1 = L_t^1 \tilde{\sigma}_t^1 dW_t^2 \quad 0 \leq t \leq T_1$$

Et comme nous l'avons déjà calculé dans nos interactions de type *backward*, la mesure Q^2 est définie par

$$\frac{dQ^{T_2}}{dQ^{T_3}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{T_2} \|\gamma(t, T_2, T_3)\|^2 dt + \int_0^{T_2} \gamma(t, T_2, T_3) dW_t^{n+1}\right)$$

où, avec le même raisonnement avec lequel nous avons obtenu l'équation 2.1.6, $\gamma(t, T_2, T_3)$ est défini par

$$\gamma(t, T_2, T_3) = \frac{\alpha_2 L_t^2}{1 + \alpha_2 L_t^2} \tilde{\sigma}_t^2$$

Et donc par le théorème de Girsanov nous avons l'expression L_t^1 sous Q^3 est,

$$dL_t^1 = L_t^1 \tilde{\sigma}_t^1 (dW_t^3 - \frac{\alpha_2 L_t^2}{1 + \alpha_2 L_t^2} \tilde{\sigma}_t^2 dt) \quad 0 \leq t \leq T_1$$

En itérant le raisonnement nous trouvons que sous Q^{i+1} pour tout $j = 1, \dots, i-1$

$$dL_t^i = L_t^i \tilde{\sigma}_t^i (dW_t^{i+1} - \sum_{k=j+1}^i \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k dt) \quad 0 \leq t \leq T_j \quad (2.1.9)$$

De cette façon nous complétons la construction du modèle LIBOR sous toutes les mesures forward Q^{i+1} pour tout $i = 1, \dots, n$. Cela veut dire que nous avons la dynamique de tous les L_t^j sous chacune de ces mesure.

Pour mieux visualiser la structure du modèle, en utilisant les équations 2.1.8 et 2.1.9 nous pouvons décrire toutes les combinaisons de dynamique de L_t^j sous Q^i possibles dans le tableau ci-dessous

Condition	Dynamique
$i < j + 1$	$\frac{dL_t^j}{L_t^j} = \tilde{\sigma}_t^j \left(\sum_{k=i}^j \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k dt + dW_t^i \right)$
$i = j + 1$	$\frac{dL_t^j}{L_t^j} = \tilde{\sigma}_t^j dW_t^{j+1}$
$i > j + 1$	$\frac{dL_t^j}{L_t^j} = \tilde{\sigma}_t^j (dW_t^i - \sum_{k=j+1}^{i-1} \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k dt)$

TABLE 2.1.1 – Résumé de la structure du modèle LIBOR pour L_t^j et sous la mesure forward Q^i , pour $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, n + 1$

Il ne faut pas oublier que l'objectif du modèle est de pricer des dérivés de taux d'intérêt. Pour y arriver on choisit, en général, une seule mesure parmi toutes les mesures forward ici décrites. Cependant la mesure sera choisie en relation au produit dérivé en question, souvent il existe une mesure en particulière qui sera beaucoup plus convenant que le reste.

2.2 Modèle LIBOR sous la mesure forward “spot”

Pour faire tous nos calculs Il nous sera utile d'exprimer ce numéraire en fonction des LIBORs. En utilisant les équations 2.0.1 et 2.1.2, un calcul facile nous donnent que les équations 1.2.2 peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$N_t = D_{tT_1}, \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$N_t = D_{tT_{i+1}} \prod_{j=1}^i (1 + \alpha_j L_{T_j}^j), \quad T_i \leq t \leq T_{i+1} \quad (2.2.1)$$

En particulière nous avons aussi pour tout $0 \leq j \leq n + 1$,

$$D_{t,T_j} = D_{t,T_{i+1}} \prod_{k=i+1}^j \frac{1}{1 + \alpha_k L_t^k} \quad 0 \leq t \leq T_j \text{ et } T_i \leq t < T_{i+1}$$

Alors nous pouvons calculer le prix normalisé des obligations $i = 1, \dots, n + 1$

$$\frac{D_{t,T_j}}{N_t} = \frac{\prod_{k=i+1}^j \frac{1}{1 + \alpha_k L_t^k}}{\prod_{k=1}^i (1 + \alpha_k L_{T_k}^k)} \quad \begin{array}{l} T_i \leq t < T_{i+1} \\ 0 \leq t \leq T_j \end{array} \quad (2.2.2)$$

Nous remarquons que les prix normalisés des obligations ne dépendent que des taux LIBORs. Comme nous l'avons déjà expliqué dans la section 1.2 la mesure forward "spot" Q^* est une mesure telle que les prix normalisés des obligations normalisées sont des martingales. Alors le théorème de représentation de martingale nous assure l'existence d'un processus $u^i(t)$ telle que $Q^*[\int_0^{T+\delta} \|u^i(t)\|^2 dt < \infty] = 1$ et

$$d\left(\frac{D_{t,T_j}}{N_t}\right) = \frac{D_{t,T_j}}{N_t} u^j(t) dW^{Q^*} \quad (2.2.3)$$

où W^{Q^*} est un W^{Q^*} -mouvement brownien. Alors si nous calculons la dérivée logarithmique de $\frac{D_{t,T_j}}{N_t}$ et nous remplaçons l'équation 2.2.2, nous obtenons

$$d\log\left(\frac{D_{t,T_j}}{N_t}\right) = - \sum_{k=i+1}^j d\log(1 + \alpha_k L_t^k) \quad (2.2.4)$$

Par l'autre côté si nous appliquons la formule d'Itô et nous remplaçons l'équation 2.2.5 nous obtenons de façon direct

$$d\log\left(\frac{D_{t,T_j}}{N_t}\right) = - \|u^j(t)\|^2 dt + u^j(t) dW^{Q^*} \quad (2.2.5)$$

Si nous faisons très attention aux équations du tableau 2.1.1, nous pouvons remarquer que sous toutes les mesures le coefficient de diffusion du taux LIBOR L_t^j est égal à $\tilde{\sigma}_t^j L_t^j$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Effectivement le théorème de Girsanov assure que le coefficient de diffusion d'un processus reste invariable sous changements de mesures équivalentes. Alors si nous appliquons la formule d'Itô au processus $\log(1 + \alpha_j L_t^j)$ nous obtenons que son coefficient de diffusion est égale à

$$\frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \tilde{\sigma}_t^j$$

Si nous égalons les coefficient de diffusion des équations 2.2.4 et 2.2.5,

$$u^j(t) = - \sum_{k=i+1}^j \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k$$

Après avoir obtenu une expression pour la volatilité $u^j(t)$ nous pouvons dériver les équations stochastique qui sont satisfait par les taux LIBORs sous la mesure forward spot Q^* . Nous avons

$$\begin{aligned} dL_t^j &= \frac{1}{\alpha_i} d\left(\frac{D_{tT_j}}{D_{tT_{j+1}}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_i} d\left(\frac{D_{tT_j}}{N_t} \frac{N_t}{D_{tT_{j+1}}}\right) = \frac{1}{\alpha_i} d\left(\frac{D_{tT_j}}{N_t} / \frac{N_t}{D_{tT_{j+1}}}\right) \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô à ce combinaison de multiplications et divisions des processus d'Itô; nous obtiendrons, après quelques calculs et en remplaçant la valeur de la volatilité $u^i(t)$

$$\frac{dL_t^j}{L_t^j} = \tilde{\sigma}_t^j \left(\sum_{k=i}^j \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k dt + dW_t^{Q^*} \right), \quad \begin{array}{l} T_i \leq t < T_{i+1} \\ 0 \leq t \leq T_j \end{array} \quad (2.2.6)$$

Cette expression détermine la formulation du modèle de marché LIBOR sous la mesure forward spot Q^* .

Remark 2.5. Dans notre cas nous considerons la structure donnée par l'équation 2.1.2 où la fonction $\tilde{\sigma}_t^j$ est une fonction scalaire et deterministe, W_t est aussi scalaire et nous supposons qu'il existe une structure de covariance donnée telle que $dW_t^i dW_t^j = \rho^{ij} dt$ comme il est exprimé dans l'équation 1.2.3. Ce changement peuvent être facilement inclus dans le même raisonnement fait ci-dessus, et l'équation 2.2.6 deviendrait

$$\frac{dL_t^j}{L_t^j} = \tilde{\sigma}_t^j \left(\sum_{k=i}^j \frac{\alpha_k L_t^k}{1 + \alpha_k L_t^k} \tilde{\sigma}_t^k \rho^{ij} dt + dW_t^{Q^*} \right), \quad \begin{array}{l} T_i \leq t < T_{i+1} \\ 0 \leq t \leq T_j \end{array} \quad (2.2.7)$$

Les calculs explicite derriere cette equation sont présentés dans [6], mais il revient à des petites modifications des calculs ci dessus. Dans [3] nous retrouvons une approximation de l'équation 2.2.7 qui nous permet de calculer de façon approximative la correlation entre deux taux LIBORs de la facons suivante,

$$Corr(\log(L_{T_i}^i), \log(L_{T_j}^j)) \approx \frac{\int_0^{\min(T_i, T_j)} \tilde{\sigma}_t^j \tilde{\sigma}_t^i \rho^{ij} dt}{\sqrt{\int_0^{T_i} (\tilde{\sigma}_t^j)^2 dt} \sqrt{\int_0^{T_i} (\tilde{\sigma}_t^i)^2 dt}} \quad (2.2.8)$$

Chapitre 3

Le modèle

Markov-Fonctionnel

À l'origine, les modèles Markov-Fonctionnel cherchent à résoudre deux problématiques importantes : la première était la nécessité du modèle à bien se calibrer avec les actifs de marché les plus représentatifs et liquides, et le deuxième était d'avoir la possibilité de l'implémenter de manière efficace. L'idée principale derrière ce modèle est, comme son nom l'indique, de faire l'hypothèse que toute l'incertitude dans le marché peut être représentée par un processus de Markov que l'on appellera x_t . Ainsi toute l'information du marché à la date t est concentrée dans la valeur de x_t . Cela veut dire que l'on suppose que les actifs du marché sont des fonctions (en général déterministes) de ce processus.

La démarche à suivre pour la modélisation est de choisir le processus de Markov x_t , ce qui en général sera assez évident car dépendant du type de marché et des options que l'on veut pricer, et de trouver quels sont les équations qui déterminent la façon dont les obligations (et donc le numéraire et les taux LIBORs) dépendent du processus x .

Nous commencerons par expliquer brièvement le modèle Markov-Fonctionnel à 1-dimension, sa formulation pour modéliser les taux LIBORs et ses caractéristiques. La deuxième partie contiendra les modèles Markov-Fonctionnel à n-dimension, leur formulation pour modéliser les taux LIBORs et finalement l'implémentation de ce modèle. Les résultats techniques de cette partie sont vus plus profondément dans [1] et [2].

3.1 Modèle Markov-Fonctionnel à 1-dimension

Cette section est un bref récapitulatif de la construction d'un modèle Markov-fonctionnel unidimensionnel sous la mesure forward. Elle est fortement inspirée de [1],[3] et [5]. Ainsi nous essayons de trouver un processus de Markov x unidimensionnel, telle que $D_{tT_{n+1}} = D_{tT_{n+1}}(x_t)$ pour tout $0 \leq t \leq T_{n+1}$. Plus précisément nous avons besoins de trouver les valeurs du fonctionnel seulement sur les points de notre ensemble de maturités $\mathfrak{T} = \{T_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1\}$.

Remarquons qu'en sachant la forme de $D_{tT_{n+1}}(x_t)$ on est capable de déduire la forme des fonctionnels de tous les taux forward. Etant donné que nous connaissons les taux forward, alors si nous avons la forme des fonctionnels l'espérance du paiement d'un produit sous la mesure forward Q^T peut être déterminé par intégration numérique. Alors on est capable de pricer les produit dérivé de taux d'intérêt.

3.1.1 Formulation sous la mesure forward

La principale hypothèse dans la construction de ce modèle est de supposer que pour tout $i = 1, \dots, n$ le taux LIBOR à la date T_i est une fonction monotone croissante du processus de Markov x . Cela veut dire qu'il existe f^i monotone est croissante

$$L_{T_i}^i = f^i(x_{T_i}) \quad (3.1.1)$$

Comme nous l'avons déjà dit grâce à l'équation 2.0.1 le fait de connaître $L_{T_i}^i$ est équivalent à connaître $D_{T_i T_{i+1}}$.

D'après la définition 2.2 et l'équation 1.2.1, nous pouvons voir que la valeur du digital caplet sous la mesure forward est

$$V^i(K) = D_{0T_{i+1}} E^{Q^{T_i}}(\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K\})$$

Grâce à l'équation 2.1.1 nous pouvons l'exprimer par

$$= D_{0T_{n+1}} E^{Q^{T_n}}\left(\frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}} \mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K\}\right) \quad (3.1.2)$$

Nous rappelons que pour cette construction nous allons utiliser la backward induction. Alors si nous voulons trouver la valeur des fonctionnels à la date T_i pour un point fixe $x_{T_i} = x^*$; nous pouvons supposer que tous les fonctionnels $D_{T_i T_m}$ sont déjà connus pour tout les $i < l \leq m \leq n+1$.

Il faut aussi remarquer que, d'après la définition 1.5, $D_{T_i T_l}$ a la propriété de martingale sous Q^{T_n} , alors

$$\frac{D_{T_i T_l}}{D_{T_i T_{n+1}}} = E^{Q^{T_n}}\left(\frac{1}{D_{T_i T_{n+1}}}|x_{T_i}\right) \quad (3.1.3)$$

Les formes des fonctionnels seront déduites des prix du marché et des équations qui définissent l'absence d'arbitrage dans l'économie.

3.1.2 Calibration du modèle

Pour calibrer le modèle aux données de marché et trouver la valeur du fonctionnel au point x^* , nous définissons

$$J^i(x^*) := D_{0T_{n+1}} E^{Q^{T_n}}\left(\frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}} \mathbf{1}\{x_{T_i} \geq x^*\}\right)$$

Et l'étape suivante est de chercher un strike K^* tel que

$$V^i(K^*) = J^i(x^*)$$

L'existence et l'unicité de ce strike sont expliquées dans [1]. Ainsi nous pouvons faire le calcul suivant

$$\begin{aligned} J^i(x^*) &= D_{0T_{n+1}} E^{Q^{T_n}}\left(\frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}} \mathbf{1}\{x_{T_i} \geq x^*\}\right) \\ &= D_{0T_{n+1}} E^{Q^{T_n}}\left(\frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}} \mathbf{1}\{f^i(x_{T_i}) \geq f^i(x^*)\}\right) \\ &= D_{0T_{n+1}} E^{Q^{T_n}}\left(\frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}} \mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq f^i(x^*)\}\right) = V^i(K^*) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$f^i(x_{T_i}) = K^*$$

La dernière équation, ainsi que la deuxième égalité utilisent fortement les propriétés de monotonie et croissance de la fonctions $f^i(\cdot)$.

Pour finir avec la construction du modèle nous devons trouver la valeur du numéraire à ce point ; qui est donné par

$$\frac{1}{D_{T_i T_{n+1}}(x^*)} = \frac{D_{T_i T_{i+1}}}{D_{T_i T_{n+1}}}(x^*)(1 + \alpha_i f^i(x^*))$$

Est les valeurs de tous les fonctionnels (discount factors) sont données par

la propriété de martingale exprimée dans l'équation 3.1.3. Cette démarche est à faire pour toutes les simulations x^* du processus x_{T_i} . Pour calculer les espérances stochastique il nous faut interpoler les valeurs trouvées. Finalement pour pricer des produits dérivés on peut suivre une démarche similaire à celle des pour les modèles de taux d'intérêts à court terme, cette démarche est présentée dans [6].

3.2 Modèle Markov-Fonctionnel à n-dimensions

Les objectifs principaux du modèle à 1-dimension décrit dans la partie précédente étaient la bonne calibration aux actifs liquides du marché et l'implémentation facile. La induction backward et la petite dimension de ce modèle nous permettait de faire des implementations et du pricing efficaces de façons à éviter des grandes boucles ou des calculs de Monte-Carlo inutiles. Dans le cas du modèle à n-dimensions nous n'avons pas ce privilège, et pour le pricing nous sommes forcés d'utiliser la méthode de Monte-Carlo et des grandes boucles pour y arriver. Il semblerait donc qu'un modèle Markov-Fonctionnel à n-dimensions va contre les objectifs originaux de ce modèle. Cela n'est en fait pas le cas, car la motivation du modèle change quand on passe à plusieurs dimensions. Les objectifs que l'on cherche à atteindre sont maintenant

1. Garder les propriétés d'unicité et de monotonie qui nous permettent la bonne calibration au marché et l'efficacité avec laquelle on calcule les fonctionnels.
2. Réussir à représenter la structure de corrélation que l'on vise à reproduire avec le modèle.

Dans le modèle à 1-dimension nous payons la possibilité du pricing efficace avec l'impossibilité de représenter des structures d'interaction plus complexes entre les taux LIBORs. Ces interactions peuvent être très importantes pour le pricing de certains dérivés exotiques et les omettre peut nous conduire à faire des estimations totalement fausses.

3.2.1 Construction sous la mesure forward “spot”

L'objectif est de construire un modèle de Markov-fonctionnel de type LIBOR (i.e. calibré aux digital caplets), où on considère les taux LIBORs comme une fonction croissante d'un processus de Markov n-dimensionnel, que l'on appellera par la suite vecteur aléatoire. L'astuce clé derrière cette construction est de modéliser chaque taux LIBOR comme étant fonction d'une et seulement d'une des composantes du vecteur aléatoire. L'intuition derrière cette hypothèse est de regarder ce modèle comme une petite variation d'une approximation du modèle LIBOR à n-dimension présenté dans le chapitre 2, cette intuition ainsi

que l'approximation du modèle LIBOR sont présentées dans [3]. Il existe aussi une deuxième raison pour soutenir cette hypothèse du point de vue de la calibration et de la construction du modèle. En supposant chaque taux LIBOR comme étant fonction seulement d'une composante du vecteur aléatoire nous assurons l'unicité et la monotonicité du fonctionnel quand nous étendons le modèle à n -dimensions. Nous avons déjà vu l'importance de ces propriétés dans la construction du modèle à n -dimension dans la partie 3.1.

Ainsi nous avons,

$$L_{T_i}^i = f^i(x_t^i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.1)$$

où f^i est une fonction monotone croissante à déterminer. Pour trouver la forme exacte de ce fonctionnel nous nous baserons sur le même type de raisonnement que dans le modèle à 1-dimension de la section précédente, mais en utilisant une “forward induction” au lieu de “backward”. Nous rappelons que nous allons construire ce modèle sous la mesure “forward spot”, et c'est pour cette raison que la induction forward est plus adéquate.

Avec cette construction il est difficile de trouver une formule explicite pour la calibration du modèle aux digital caplets, l'astuce qui nous permet de calibrer parfaitement le modèle est d'utiliser *digitals caplets in arrears*, dont la description est donné dans la définition 2.3, au lieu des digital caplets pour la calibration. La démonstration du fait que ça revient au même est présentée dans [3].

Alors nous appellerons $V^i(K)$ la valeur aujourd'hui (i.e. $T=0$) du digital caplet en “arrears” avec strike K et maturité T_i . Alors on utilisant l'équation donnée dans la définition 2.3 et l'équation 1.2.1, nous avons l'expression de la valeur $V^i(K)$ sous la mesure Q^*

$$V^i(K) = N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K\}}{N_{T_i}} \right] \quad (3.2.2)$$

Nous baserons la construction de notre modèle sur cette expression de la valeur $V^i(K)$. Alors nous procédons en utilisant la “forward induction” pour déterminer la forme du fonctionnel. Supposons que nous sommes au i -ème pas d'itération de la démarche, cela veut dire que nous connaissons les formes des fonctionnels $L_{T_k}^k$ pour $k = 1, \dots, i-1$. Alors la valeur du fonctionnel $L_{T_i}^i$ est à déterminer. Pour cela faire nous définissons la fonction suivante pour chaque valeur x^* sur une grille des scalaires

$$J^i(x^*) := N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{x_{T_i}^i \geq x^*\}}{N_{T_i}} \right] \quad (3.2.3)$$

L'idée est de chercher la valeur du strike K^* telle que

$$V^i(K^*) = J^i(x^*) \quad (3.2.4)$$

Alors si nous utilisons les équations 3.2.2 et 3.2.3 nous pouvons faire le calcul suivant,

$$\begin{aligned} V^i(K^*) &= N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K^*\}}{N_{T_i}} \right] \\ &= J^i(x^*) = N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{x_{T_i}^i \geq x^*\}}{N_{T_i}} \right] \\ &= N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{f^i(x_{T_i}^i) \geq f^i(x^*)\}}{N_{T_i}} \right] \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse de monotonie du fonctionnel est ce qui justifie cette dernière égalité. Alors en remplaçant l'expression 3.2.1 nous avons

$$N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K^*\}}{N_{T_i}} \right] = N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq f^i(x^*)\}}{N_{T_i}} \right]$$

Et alors aussi par monotonie du fonctionnel nous pouvons conclure que

$$K^* = f^i(x^*) \quad (3.2.5)$$

Ainsi si nous trouvons la valeur K^* nous trouvons la valeur du fonctionnel f^i dans x^* , ce que nous permettra plus tard de calculer la valeur du taux LIBOR $L_{T_i}^i$ en utilisant 3.2.1. Cependant calculer la valeur de $J^i(x^*)$ dans l'expression 3.2.3 pose un problème difficile à résoudre du point de vue de l'implémentation numérique du modèle.

Nous pouvons voir dans l'équation 2.2.1 que le numéraire N_{T_i} est fonction des première $i - 1$ valeurs des taux LIBORs. Alors il est déterminé dans l'interaction $i - 1$ et connu dans le $i - \text{ème}$ pas d'itération. Nous pouvons remarquer que l'utilisation de digitaux caplets in arrears nous permet d'avoir une bonne calibration de notre modèle. Comme nous l'avons dit dans la définition 2.3, ces produits sont déterminés et payés à la même date (T_i). La forme du fonctionnel du numéraire N_{T_i} , qui est déjà connue à cette date, est tout ce dont on a besoin

pour calculer l'expression de $J^i(x^*)$ donnée par l'équation 3.2.3. Rappelons que dans le cas unidimensionnel, dans la Section 3.1 où la calibration est faite par rapport aux digitaux caplets, nous n'avions pas cette propriété.

Par contre nous voyons que le numéraire en i , est fonction des LIBORs et donc des $i - 1$ premières valeurs du vecteur aléatoire. Cela signifie que l'on a besoin de calculer des intégrales multidimensionnelles sous une distribution jointe compliquée à déterminer. Le moyen standard pour le faire est d'utiliser la méthode de Monte-Carlo, et l'objectif sera de le faire de la façon la plus efficace possible.

3.2.2 Modélisation

L'implémentation de ce modèle suit notamment les conseils donnés dans [3]. Comme nous l'avons déjà dit, les problèmes du modèle multidimensionnel par rapport au modèle à une dimension sont les grandes dimensions qui ne nous permettent pas d'utiliser des méthodes de calculs rapides et efficaces au même temps. Ainsi nous devons nous préoccuper de faire les calculs des intégrales par la méthode de Monte-Carlo les plus rapides possibles sans perdre beaucoup de précision dans nos résultats.

Nous avons implémenté le modèle dans le langage *C* et en utilisant la librairie du projet *PREMIA* qui s'appelle *PNL*. Cette librairie est programmée dans *C* et contient plusieurs outils mathématiques que l'on rencontre souvent, mais principalement lorsque l'on implémente des modèles financiers.

Nous allons décrire pas à pas l'implémentation de ce modèle en utilisant les fonction de cette librairie, qui nous permet d'utiliser des vecteurs et des matrices dans cet environnement, ainsi comme des opérations entre eux. Si on cherche à implémenter le modèle sans ces fonctionnalités c'est encore possible mais il faudra faire plus attention à la définition des pointeur lorsqu'on veut faire les opérations.

1. La première étape est de définir la structure de variance-covariance que l'on veut capturer avec le modèle. Cette structure devrait être déduite des données du marché en utilisant par exemple le équation 2.2.8. Ces données seront en générale des données de marché provenant du passé. Nous aurons comme données la valeur du zéro coupon aujourd'hui pour la premier date T_1 que nous considérons, i.e D_{0T_1} qui est à la fois notre première valeur

de numéraire d'où nous commencerons nos interactions, i.e

$$D_{0T_1} = N_0$$

Finalement nous aurons besoin des prix des digitals caplets in arrears pour plusieurs maturités K et pour toutes les dates où l'on cherche à déterminer les valeurs T_i , pour $i = 0, 1, \dots, n + 1$.

2. La deuxième étape est de tirer un échantillon de notre processus de Markov x . Ainsi nous cherchons à simuler plusieurs réalisation de notre vecteur aléatoire.

$$x(w_k) = \{x_{T_1}^1(w_k), x_{T_2}^2(w_k), \dots, x_{T_n}^n(w_k)\}, \quad k = 1, \dots, m$$

Alors la simulation de ce processus en C n'est pas immédiate. De plus nous avons que ce processus de Markov est défini par une structure de covariance σ donné par l'équation 1.2.3 . Nous avons utilisé le générateur aléatoire de la librairie *PNL* pour générer un ensemble des Gaussiennes, et après nous avons utilisé la décomposition de Cholesky pour implémenter la structure que l'on souhaitait. C'est pour ces points que nous avons simulés que nous voulons trouver la valeur des fonctionnelles, pour les déterminer et les interpoler.

3. La troisième étape consiste à fixer une grille de référence pour chaque date de maturité i , avec $i = 1, \dots, n$. Dans cette grille nous essayerons de trouver les valeurs des fonctionnels de façon approximative. On utilisera les valeurs simulées dans la deuxième étape pour approcher ces valeurs. Il nous faut définir la méthode que l'on utilisera pour fixer notre grille de référence, dans [3] les auteurs ont présenté deux approches possibles,

- Choisir parmi les valeurs simulées un ensemble de taille fixe en essayant de tenir une distance constante entre les réalisations. Cela veut dire par exemple trier le vecteur et prendre parmi ses composantes les $m/10$ ou m/c valeurs, avec c un scalaire positif.
- La deuxième méthode fixe un nombre de pas uniformément écarté. Pour calculer la longueur du pas on prend la différence entre la plus grande et la plus petite valeur simulées, et on la divise par le nombre de pas que l'on veut dans notre grille(idéalement le même pour chaque i).

Nous avons testé les deux méthodes et nous avons confirmé que, en général, la deuxième méthode donne une meilleur approximation des fonctionnels et ce de manière très marqué, car nous avons besoin de moins de points dans notre grille pour atteindre des résultat acceptables. Cela est consistant avec ce que les auteurs de [3] ont trouvé.

4. Étant donné que nous avons pris la deuxième méthode, nous avons décidé de trier toutes les valeurs simulées de chaque $x_{T_i}^i$ cela nous aidera beaucoup lors de la calibration du modèle. Alors pour une valeur d' i fixe nous commençons par évaluer $J^i(x^*)$ pour chaque valeur x^* de la grille, puis nous approchons $J^i(x^*)$ en appliquant l'approximation de Monte-Carlo dans l'équation 3.2.3

$$J^i(x^*) \approx \frac{N_0}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\mathbf{1}\{x_{T_i}^i(w_k) \geq x^*\}}{N_{T_i}(w_k)} \quad (3.2.6)$$

Comme nous l'avons déjà mentionne dans la première étape, la valeur N_0 est donnée par le marché. Pour le reste de pas la valeur du numéraire au temps T_i en chaque état du monde w_k a été déjà calculée dans l'étape antérieur par la formule 2.2.1.

Une des caractéristiques de notre implementation est le fait que dans la formule (3.2.6) nous utilisons fortement le fait que les vecteurs $x_{T_i}^i$ sont triés ainsi que les valeurs x^* qui appartiennent à notre grille (étant donné le fait que dans la troisième étape nous avons choisi la deuxième démarche pour construire notre grille, les point x^* sont automatiquement triés). De cette façon on ne doit pas tester $x_{T_i}^i(w_k) \geq x^*$ pour toutes les valeur de $x_{T_i}^i(w_k)$ et quand on calculera la valeur (3.2.6) pour le point de la grille suivant on peut commencer avec la première valeur de $x_{T_i}^i(w_k)$ qui a satisfait $x_{T_i}^i(w_k) \geq x^*$ pour le point antérieur. Ces deux relations augmentent considérable la vitesse de nos calculs de Monte-Carlo et de notre programme en générale

5. Maintenant que nous avons calculé $J^i(x^*)$, nous cherchons la valeur K^* telle que l'équation (3.2.4) est satisfaite. Pour résoudre cette égalité nous avons tout d'abord interpolé les données $V^i(K)$ sur tout l'espace en utilisant une interpolation linéaire et après nous avons utilisé un "solver" déjà implémenté dans la librairie *PNL* pour trouver la valeur précise de K^* ; ce solver utilise les algorithmes de Brent à une dimension pour trouver

les racines de la fonction $V^i(K) - J^i(x^*)$. Cet algorithme nous demande d'avoir toujours une solution dans l'intervall défini par les données, à condition d'avoir des valeurs de $J^i(x^*)$ plus grands/ plus petits que le maximum/minimum de nos $V^i(K)$ donnés ; nous allons prendre le strike K tel que la valeur $V^i(K)$ est maximum/minimum.

Rappelons nous du fait que, selon l'équation (3.2.5), la valeur du strike K^* nous donne exactement la valeur du fonctionnel pour le point de la grille x^* .

6. Maintenant que nous avons toutes le valeur du fonctionnel dans tous les point de la grille (i.e. tous les K^*) nous pouvons interpoler les valeurs du fonctionnel f^i pour chaque valeur du processus $x_{T_i}^i$ dans chaque état du monde w_k (i.e. $f^i\{x_{T_i}^i\{w_k\}\}$). Dans les références bibliographiques on conseille d'utiliser la méthode de "*cubic splines*" pour interpoler les fonctionnels sur tout les domaines. Nous avons implémenté cette méthode mais nous avons trouvé que l'incrément du temps de calcul versus le peu de gain de précision n'est pas satisfaisant. Nous rappelons que la caractéristique la plus importante de notre fonctionnel est d'être une fonction monotone et les restrictions que l'on doit implémenter pour conserver cette caractéristique quand on utilise la méthode "*cubic splines*" sont trop coûteuses. Par contre une interpolation linéaire nous assure un fonctionnel monotone croissant sans la nécessité d'ajouter de contraintes et avec des temps de calculs considérablement plus petits. Il est vrai que la précision est inférieure que celle de la méthode antérieure. Plus précisément, pour la même précision nous avons besoin d'approximativement 100 fois plus de points dans la grille (approx 10000 point pour une bonne précision). Cependant après plusieurs essais nous avons trouvé que pour la même précision l'interpolation linéaire restait considérablement plus rapide. Pour cette raison nous avons gardé l'approximation linéaire comme méthode d'interpolation pour les valeurs du fonctionnel dans le domaine de $x_{T_i}^i$.
7. La dernière étape est de recalculer le numéraire pour l'interaction suivante pour chaque état du monde. Cela est possible car $N_{T_{i+1}}$ est totalement déterminé au temps N_{T_i} (ici on peut remarquer l'utilité de ne pas utiliser des digital caplets pour calibrer sinon des digitals caplets in arrears). On on fait cela en modifiant l'équation (2.2.1) q'on peut l'exprimer de façon

réursive par

$$N_{T_{i+1}}(w_k) = (1 + \alpha_i f^i(x_{T_i}^i(w_k)))N_{T_i}(w_k) \quad k = 1, \dots, n$$

Où la valeur de $f^i(x_{T_i}^i(w_k))$ a été approchée dans le pas antérieur soit par la méthode “*cubic splines*” ou soit par une interpolation linéaire. en général nous allons garder les valeurs $f^i(x_{T_i}^i(w_k))$ et $N_{T_i}(w_k)$ ainsi comme les simulations du processus $x_{T_i}^i(w_k)$ en mémoire, en particulier nous avons crée une structure dans le langage *C* que nous avons appelé *fonction discrète* qui garde le valeurs d’une fonction plus les points où elle est évaluée.

8. Grâce au fait que nous avons gardé les valeurs des taux LIBORs et du numéraire, avec les valeurs de notre processus de Markov dans tous les états du monde dans notre structure de *fonction discrète*. Nous avons tous les élément pour le pricing de produits dérivés exotiques par la méthode de Monte-Carlo.

3.2.3 Résultats

Alors pour faire tourné la méthode antérieure nous avons besoins des prix de digital caplets in arrears, de l’obligation zéro coupon D_{0T_1} et de la structure de covariance que l’on cherche à représenter. Pour calibrer le modèle nous n’avions pas la possibilité d’avoir des données de marché sur les prix de digital caplets in arrears, alors nous avons simulé de données pour différents strikes de façons qu’elles soient décroissant par rapport au strike et cohérentes. On a fait de même pour l’obligation zéro coupon ; pour la matrice de variance nous avons pris l’identité étant donné que nous n’avions pas un produit particulier à pricer. Les valeurs exactes des prix n’était pas relevantes pour nous. Ce que nous cherchions c’est d’être capable de le retrouver après avoir calibré notre modèle.

Nous avons appliqué la méthode antérieure et nous avons trouvé la matrice L qui contient toutes les valeurs du LIBORs $f^i(x_{T_i}^i(w_k))$ évaluéess sur les valeurs simulées de notre processus de Markov et la matrice N qui contient toutes les valeurs du numéraire $N_{T_i}(w_k)$ évalué aussi dans ces points.

Finalement nous devons repricer les digital caplets in arrears pour vérifier que notre modèle et bien capable de retrouver les valeurs correctes.

Pour cela faire nous utilisons l’équation 3.2.2, et les valeurs trouvées par le

modèle, pour approcher cette équation par la méthode de Monte-Carlo pour chaque strike dans notre vecteur de données. Ainsi

$$V^i(K) = N_0 E^{Q^*} \left[\frac{\mathbf{1}\{L_{T_i}^i \geq K\}}{N_{T_i}} \right]$$

$$\approx N_0 \sum \frac{\mathbf{1}\{f^i(x_T^i(w_k)) \geq K\}}{N_{T_i}(w_k)}$$

Les valeurs que nous avons trouvées sont représentées par l'image ci-dessous. Nous avons fait les calculs pour trois maturité différents $i = 1/3, 2/3, 1$ et nous avons garde le même vecteur de prix pour le trois instant de temps; ainsi $V^i(K) = V(K)$ pour $i = 1/3, 2/3, 1$ et $\forall K$; cela est peut probable dans la réalité mais ça ne nous pose pas un problème pour notre analyse et de cette façons nous pouvons présenter et comparer les résultats dans un seul graphe.

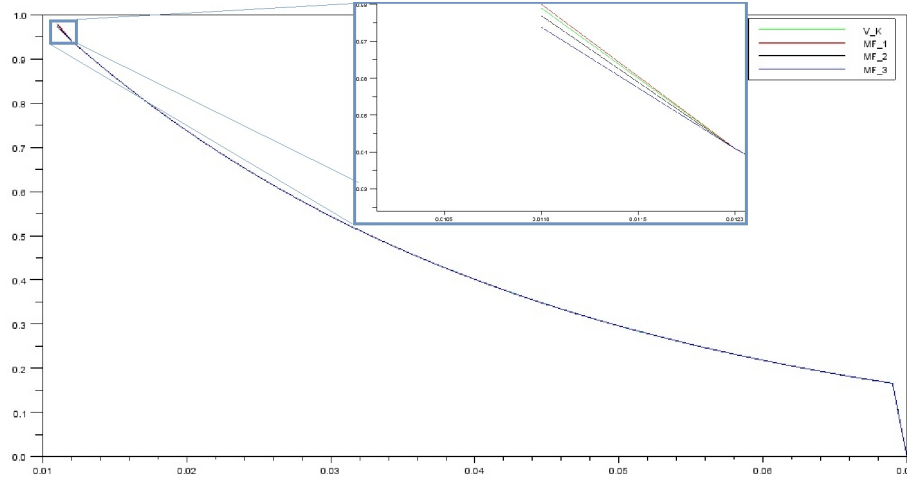


FIGURE 3.2.1 – Résultats obtenus par la calibration du modèle aux prix de digital caplets in arrears fictifs

Pour appliquer la méthode nous avons choisi de simuler 100.000 points de notre processus de Markov x , pour cette quantité de points le calcul total de la calibration du modèle plus le pricing de digital caplets in arrears prends 7 min approximativement.

Nous pouvons observer que en général, la calibration du modèle est assez satisfaisante, les différences entre les valeurs simulées et les valeurs trouvées par le modèle sont de 0.01 bp sauf pour la première valeur du vecteur $V^i(K)$ où la

différence arrive à 0.9 bps. Nous pensons que cela est dû à la manque des données, comme nous l'avons expliqué dans la cinquième étape de la Modélisation, quand nous avons des valeurs de $J^i(x^*)$ qui étaient dehors de notre domaine de données nous les remplaçons par la valeurs la plus grande ou plus petite, étaient donné que le prix de digital caplets in arrears sont décroissants par rapport à le strike ces valeurs sont la première et la dernière valeur du vecteur respectivement, cela nous cause des perturbations dans ce deux point. L'important pour nous ce de trouver une bonne calibration des valeurs à l'intérieur de l'intervalle car nous serons toujours capable de prendre plus de donné du marché pour déplacer les bornes intérieur et supérieur.

Nous voyons aussi que notre modèle est bien convergent, si nous augmentons les points simulés de notre processus de Markov nous obtenons une meilleure calibration au marché et nous pouvons faire la différence des 0.01 bp si petite que l'ont veux, si on augmente la quantité de points simulés qui signifie augmenter le temps de calcul.

Conclusion

Nous avons étudié deux modèles de taux d'intérêt pour 1 et n -dimensions. Si bien l'objectif de ce rapport est l'implémentation du modèle Markov fonctionnel dans le langage C en utilisant une librairie spécifique, l'étude du modèle à 1 dimension et du modèle "benchmark" LIBOR étaient nécessaire pour la compréhension et la comparaison du modèle.

Nous pouvons remarquer le fait que le raisonnement utilisé pour trouver la forme des fonctionnels dans le cas à n -dimensions déduit du cas unidimensionnel présenté dans [1] et [5], et résumé dans la Section 3.1. Par l'autre côté nous pouvons apprécier la relation de ce modèle avec le modèle LIBOR, et voir que plusieurs caractéristiques qui le deux partage dans le cas de petite dimension sont aussi partage dans le cas de grande dimension.

Nous avons observé si on est prêt à utiliser la méthode de Monte-Carlo pour les calculs des intégrales de plusieurs dimensions, le modèle de Markov-fonctionnel n -dimensionnel possède des caractéristiques qui le rendent adéquat pour l'étude des certains produits dérivés de taux d'intérêt. Particulièrement nous pouvons voir que la structure de corrélation que nous voulons représenter par notre modèle est préservée, dans le cas du modèle LIBOR il est connu que les approximations faites pour contrôler cette structures ne sont pas valables pour de longues maturités. Cette structure est importante pour certains produits dérivés, dans [3] nous trouvons un exemple où la préservation de la structure est très important dans le pricing de TARNs.

Le modèle étudié, en général, est plus rapide que le modèle LIBOR car nous avons la possibilité d'implémenter des petites astuces telles que trier le vecteur aléatoire de notre processus de Markov multidimensionnel ou de garder les simulations faites pour la calibration pour les utiliser dans la méthode de Monte-Carlo pour le pricing de produits dérivés.

Finalement ce stage m'a donné la possibilité d'étudier directement l'aspect de

modélisation et d'implémentation d'un modèle financier, ainsi qu'il m'a donné le temps d'étudier la théorie et motivation derrière lui, les modèles les plus utilisés aux quels on peut comparer le modèle en question. Tout cela permet de voir quelles sont les avantages et les faiblesses du modèle, mais encore plus important quelles sont les innovations que le modèle présente.

Bibliographie

- [1] Hunt P., Kennedy J.E., Pelsser A. : Markov-functional interest rate models, Finance & Stochastics 4, 391-408
- [2] Hunt P., Kennedy J.E. : Financial Derivatives in Theory and Practice, Wiley (2000)
- [3] Kaisajuntti L, Kennedy J.E : An n-Dimensional Markov-functional Interest Rate Model, January 7, 2008.
- [4] Fries C.P, Rott M.G. : Cross-Currency and Hybrid Markov-Functional Models
- [5] Blunck S. : One-factor Markov-functional interest rate models and pricing of Bermudan swaptions, February 9, 2010; PREMIA, INRIA.
- [6] Björk T. : Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford.
- [7] Björk T. : INTEREST RATE THEORY, Department of Finance Stockholm School of Economics.
- [8] Filipovic´ D. : Interest Rate Models. University of Munich.
- [9] Selic´ N. : The LIBOR Market Model. University of the Witwatersrand.
- [10] Markov Functional interest rate models with stochastic volatility. December 9, 2009; New College University of Oxford.
- [11] Cassagne B. : INTRODUCTION AU LANGAGE C.
- [12] Pnl Manual March 10, 2011.