

Cours

**THÉORIE ALGÈBRIQUE DES  
SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS**

*Guy Cohen*

Centre Automatique et Systèmes  
École des Mines de Paris, Fontainebleau  
&  
INRIA, Rocquencourt

1995

#### AVERTISSEMENT

*Ce cours est issu de recherches commencées en 1981 au sein d'un groupe de travail à l'INRIA-Rocquencourt, groupe qui s'est donné plus tard le nom de Max Plus. Ont participé ou participent toujours à ce groupe en dehors de l'auteur : Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian. D'autres chercheurs ont contribué ailleurs au développement de cette théorie. Une assez grande part de ces travaux est relatée dans un livre paru en septembre 1992 (cf. [4]). On y trouvera une bibliographie plus complète que la liste ci-dessous qui concerne plutôt des sujets connexes au présent cours que le cours lui-même. Les notes ci-après constituent un bref compte-rendu de l'essentiel de ce qui peut être traité dans le volume du cours oral. Des développements plus complets pourront être trouvés dans [4] et d'autres références plus récentes.*

#### RÉFÉRENCES

1. G. Birkhoff. *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Coll. Pub., Providence, 1967 (3rd Ed.).
2. T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford, England, 1972.
3. P. Chrétienne. *Les Réseaux de Pétri Temporisés*. Thèse d'état, Université de Paris 6, Paris, France, 1983.
4. F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.-P. Quadrat. *Synchronization and Linearity — An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley, New-York, 1992.
5. R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1979.
6. P. Dubreil et M.L. Dubreil-Jacotin. *Leçons d'Algèbre Moderne*. Dunod, Paris, France, 1964.
7. M. Gondran and M. Minoux. Linear algebra in dioids: a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics.*, 19:147–164, 1984.
8. M. Gondran et M. Minoux. *Graphes et Algorithmes*. Eyrolles, Paris, 1979.
9. James L. Peterson. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 07632, USA, 1981.

<b>Références</b>	<b>i</b>
<b>1. Généralités sur les systèmes à événements discrets (SED)</b>	<b>1</b>
1.1. Classes de systèmes	
1.2. Caractéristiques	
1.3. Problèmes	
1.4. Approches et méthodes	
<b>2. Nécessité d'une nouvelle arithmétique, dioïdes</b>	<b>5</b>
2.1. Une nouvelle façon de compter	
2.2. L'algèbre des dioïdes	
2.3. Autres phénomènes mettant en jeu l'algèbre des dioïdes	
<b>3. Introduction aux réseaux de Petri (RdP)</b>	<b>11</b>
3.1. Généralités	
3.2. Graphes d'événements	
3.3. Approche de la modélisation basée sur les ressources	
<b>4. Graphes et matrices</b>	<b>17</b>
4.1. Graphes orientés	
4.2. Représentations matricielles des graphes valués	
4.3. Matrice de transition	
4.4. Opérations sur les graphes et matrices	
<b>5. Résolution des équations <math>x = Ax \oplus b</math> dans un dioïde</b>	<b>21</b>
5.1. Cas d'un dioïde complet	
5.2. Cas de dioïdes non complets	
<b>6. Mise en équations des graphes d'événements temporisés</b>	<b>23</b>
6.1. Dateurs, domaine événementiel et algèbre $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$	
6.2. Compteurs, domaine temporel et algèbre $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$	
6.3. Systèmes continus min- ou max-linéaires, analogie avec des graphes d'événements	
<b>7. Transformées en <math>\gamma</math> et <math>\delta</math> et matrice de transfert</b>	<b>30</b>
7.1. Transformées en $\gamma$ et $\delta$	
7.2. Matrice de transfert	
7.3. Conditions initiales non canoniques	
7.4. Exemple d'utilisation de la matrice de transfert	
<b>8. Valeurs propres et vecteurs propres des systèmes autonomes</b>	<b>33</b>
8.1. Fermeture de la boucle et système autonome	
8.2. Interprétation du problème de valeur propre et questions	
8.3. Existence de valeur propre/vecteur propre	
8.4. Structure de l'ensemble des vecteurs propres	
8.5. Itérées $A^k$ d'une matrice irréductible. Périodicité de la réponse impulsionnelle.	
8.6. À propos des algorithmes de calcul de valeurs propres	
8.7. Valeurs propres généralisées	
<b>9. Stabilisation par feedback et optimisation de ressources</b>	<b>42</b>
9.1. Stabilisation par feedback	
9.2. Préservation de la vitesse intrinsèque du système	
9.3. Optimisation de ressources	
9.4. Exemples	

<b>10. Représentation des graphes d'événements temporisés dans un domaine 2D</b>	<b>46</b>
10.1. Une comparaison des représentations dateurs et compteurs	
10.2. "Filtrage" des trajectoires monotones	
10.3. Passage à la représentation 2D	
<b>11. Rationalité, réalisabilité, périodicité</b>	<b>56</b>
11.1. Rationalité, causalité	
11.2. Réalisabilité, polynômialité	
11.3. Périodicité	
11.4. Théorème fondamental	
<b>12. Dates au plus tard</b>	<b>58</b>

## 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS (SED)

Le vocable “systèmes (dynamiques) à événements discrets”<sup>1</sup> est relativement récent (moins de dix ans) et recouvre un champ de recherches encore assez diverses, mais qui cherchent à se fédérer sous ce drapeau. Ce domaine est actuellement très actif, fait l’objet de nombreuses manifestations scientifiques, et a déjà son propre journal spécialisé<sup>2</sup>.

**1.1. Classes de systèmes.** Alors que la théorie classique des systèmes “continus” (y compris en temps discret) et de l’Automatique s’intéresse à des systèmes “naturels” obéissant essentiellement aux lois de la Physique, et descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles (ou leur discrétisation approchée en temps), le vocable SED recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la dynamique échappe totalement à ce genre de description. En réalité, c’est plutôt le niveau descriptif auquel on se place qui est à la source de cette impossibilité : au lieu de s’intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne se soucie que des “début” et des “fin” de ces phénomènes (les “événements discrets”) et à leur enchaînement dynamique, logique ou temporel.

Ces systèmes, généralement fabriqués par l’homme, ont une part croissante, voire prépondérante, dans l’économie moderne. Pourtant, sur le plan de la théorie, il ne bénéficiaient pas jusqu’à récemment d’un “statut” et d’une conceptualisation comparables à ceux des systèmes continus. De plus, ils étaient plutôt étudiés par la Recherche Opérationnelle que par l’Automatique. En voici quelques exemples.

1.1.1. *Systèmes de production, ateliers flexibles.* Les méthodes de production manufacturière modernes se sont orientées vers des ateliers organisés en réseaux de machines multi-tâches à la place des anciennes “lignes de transfert” rigides de machines mono-tâche. Cette organisation, qui permet la production simultanée de petites ou moyennes séries en respectant des ratios de production, conduit à des systèmes plus souples mais beaucoup plus difficiles à gérer.

1.1.2. *Systèmes informatiques.* On vise là tout type de système, des plus microscopiques comme une “puce” spécialisée en traitement de signal, jusqu’aux plus macroscopiques comme un réseau international d’ordinateurs communiquant par satellites.

1.1.3. *Réseaux de communication, de transport.* Téléphone ou réseau SNCF sont des exemples de situation où des messages ou des trains doivent emprunter les mêmes voies sans se télescoper.

1.1.4. *Planification de tâches.* La gestion d’un chantier de construction ou d’un projet quelconque nécessite l’articulation de tâches dont certaines peuvent se dérouler en parallèle, c’est-à-dire sans ordre préétabli, alors que d’autres supportent des contraintes de précédence<sup>3</sup>. Ces tâches peuvent faire appel à des ressources communes (hommes, machines).

**1.2. Caractéristiques.** La plupart des systèmes énumérés ci-dessus présente les caractéristiques communes suivantes.

1.2.1. *Parallélisme.* De nombreux événements peuvent se dérouler simultanément et indépendamment dans diverses parties du système.

1.2.2. *Synchronisation.* L’accomplissement de certains événements nécessite la disponibilité *simultanée* de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions. La fin d’un événement entraîne l’apparition simultanée de plusieurs autres événements. Par exemple, pour qu’une conversation téléphonique ait lieu, il faut qu’une ligne soit disponible pour acheminer l’appel et que les deux interlocuteurs aient décroché. La fin de la conversation marque la libération de la ligne, et le fait que les deux interlocuteurs peuvent désormais vaquer à d’autres occupations. De telles considérations peuvent être reprises par exemple à propos d’un atelier flexible.

<sup>1</sup>en Anglais, “Discrete Event (Dynamic) Systems” — DEDS

<sup>2</sup>Journal of Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers

<sup>3</sup>dans la construction d’un immeuble, il vaut mieux construire le deuxième étage *après* le premier!

1.2.3. *Concurrence.* Certains événements excluent l'apparition simultanée d'autres événements. Par exemple, une machine ne peut travailler que sur une seule pièce à la fois. À la SNCF, les voies sont divisées en tronçons appelés "cantons". Le "cantonnement" consiste à exclure par un système de feux rouges la présence simultanée de deux trains sur le même canton. Sur un bus d'ordinateur non multiplexé, un seul message peut transiter à la fois.

**1.3. Problèmes.** Ce qui suit est une liste de problèmes-type soulevés par la conception, la réalisation, la conduite ou la gestion, l'optimisation de ces systèmes.

1.3.1. *Spécification.* Avant de concevoir un système, il faut dire ce qu'on veut lui faire faire, quel doit être sa "réponse" dans un certain nombre de situations-type, etc. Il se pose donc déjà un problème de langage dans lequel ces desiderata trouveront une expression précise (et donc vérifiable a posteriori).

1.3.2. *Conception, architecture.* Une fois spécifié le comportement fonctionnel du système, il faut le concevoir, notamment du point de vue de son architecture : composants, agencement et articulations, mécanismes de synchronisation et d'exclusion.

1.3.3. *Validation logique.* Il faut ensuite vérifier que le système ainsi conçu répond bien aux spécifications désirées, et qu'il n'engendre pas d'autres comportements indésirables. La cas typique est le "deadlock" : pour commencer, Pierre attend que Paul commence, celui-ci attend que Jacques commence, mais Jacques attend que Pierre commence. Un bel exemple de deadlock est donné à la SNCF par le "fameux triangle de Gagny" représenté schématiquement par la Figure 1. Si on laisse trois trains s'engager dans la

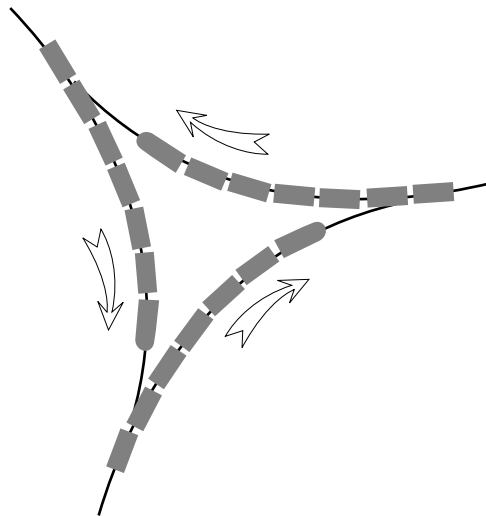


FIGURE 1. Le triangle de Gagny

configuration indiquée, c'est le blocage. Le mécanisme de feux rouges devra éviter d'atteindre cet état du système.

1.3.4. *Évaluation de performance.* À cette étape, la notion de temps, jusque là, absente intervient. On cherche alors à répondre à des questions du type : combien d'événements d'un type donné se produisent en une heure, à quelle date se produira le  $n$ -ième événement, etc.? Par exemple, pour un système informatique spécialisé en annulation d'écho sur le signal de parole transmis à partir d'une salle de téléconférence, il faut vérifier si la vitesse de traitement du signal est compatible avec la vitesse normale d'élocution.

1.3.5. *Ordonnancement.* L'ordonnancement a pour but d'établir des politiques de priorité, de routage, etc., destinées à résoudre les problèmes posés par les phénomènes de concurrence. Il est clair que la performance globale d'un système peut dépendre de la façon dont ces phénomènes auront été arbitrés. À la limite, la politique d'ordonnancement elle-même peut être la cause de deadlocks (et donc de performances "infiniment" mauvaises).

1.3.6. *Optimisation, dimensionnement.* L'ordonnancement peut être un premier "levier" d'une optimisation de performance. Mais dès le choix de l'architecture, on risque d'avoir éventuellement engagé de façon assez déterminante la performance du système. A posteriori, on peut essayer d'améliorer les performances en dupliquant (ou en  $n$ -pliant) certaines ressources (machines, serveurs, buffers, etc.), mais ceci n'a généralement de sens que sous une contrainte de budget donné, ou de coût à minimiser. Autre exemple : pour un "chip" spécialisé, une certaine surface de silicium est disponible ; comment l'utiliser au mieux pour avoir la performance optimale? Doit-on rajouter des buffers (effet "pipe-line"), un bus, un deuxième multiplieur, etc.?

Comme la discussion vient de le suggérer, la suite de questions ci-dessus n'est pas en général résolue séquentiellement en une seule passe, mais bien par une démarche itérative.

**1.4. Approches et méthodes.** On cite ici quelques unes des approches les plus usuelles dans l'étude des SEDs en précisant leur champ d'application.

1.4.1. *Simulation "par événements" sur ordinateur.* Il s'agit de reproduire sur un ordinateur, éventuellement avec l'aide de langages de programmation spécialisés pour la simulation, le déroulement de l'"histoire" du système : le temps courant est égrené et les événements à venir sont stockés dans une pile jusqu'à ce que les conditions soient réunies pour qu'ils "se produisent" et sortent de la pile. Toutes sortes de compteurs et d'outils statistiques peuvent être "branchés" sur une telle simulation. Ce genre d'approche n'a a priori de limites que par la complexité du programme à écrire et le temps d'exécution. Cependant, c'est une méthode "aveugle" ou "boîte noire" en ce sens qu'il n'y a pas de compréhension analytique de la relation entre les entrées (les choix faits a priori) et les sorties (les résultats observés), sauf à dépouiller des tonnes de listing permettant de suivre le déroulement des événements pas à pas, ce qui est rarement praticable.

1.4.2. *Approche "Perturbation Analysis" (PA).* Cette approche tournée vers l'optimisation n'est pas à proprement parler une description nouvelle des SEDs mais plutôt une technique de calcul de sensibilité de certaines grandeurs par rapport à certains paramètres. On doit s'appuyer sur une première trajectoire nominale obtenue par simulation ou par tout autre moyen. Sans répéter la simulation pour une valeur légèrement différente d'un paramètre, on cherche à évaluer les modifications de la trajectoire qui résulteraient d'une petite modification de ce paramètre. On obtient ainsi par différence finie une sorte de "gradient stochastique" susceptible d'être utilisé en optimisation dans l'algorithme itératif du même nom.

1.4.3. *Réseaux de files d'attente.* Le système est modélisé en termes de serveurs et de clients en attente dans les files devant les serveurs. Les clients circulent d'une file à une autre après avoir reçu un service. Les temps de service sont aléatoires et obéissent à des lois de probabilité données. Il existe un certain nombre de résultats analytiques montrant que, sous certaines conditions, la loi conjointe  $p(x_1, \dots, x_n)$  des longueurs  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  de  $n$  files en régime stationnaire peut s'écrire sous "forme produit", c'est-à-dire

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i) ,$$

ce qui est a priori surprenant puisque les variables aléatoires  $x_i$  sont loin d'être indépendantes. On parle alors de "réseaux jacksoniens". Cependant, ce type de résultat nécessite des hypothèses souvent

irréalistes (e.g. temps de service poissonniers<sup>4</sup>, pas de blocage du service amont par saturation de la file d'attente aval, etc.). Il existe aussi des tentatives d'extensions de cette théorie par des résultats approchés. Cependant, il faut considérer ces approches comme des outils d'évaluation "en moyenne" et sur le long terme, plutôt que comme de véritables outils d'étude de phénomènes dynamiques.

1.4.4. *Automates*. On fait ici allusion à des extensions de la théorie des automates par le point de vue "commande" des automaticiens. Un automate reconnaît, ou engendre, un langage qui est l'ensemble des "mots" (trajectoires) formés de suites ordonnées de "lettres" (associées aux états de l'automate) qu'il est susceptible de produire en considérant toutes les transitions possibles entre états. La commande consiste à limiter le langage au plus grand sous-langage contenu dans un vocabulaire donné (concrètement, celui qui évite les "gros mots", c'est-à-dire les suites d'événements ou les états indésirables) en ayant la possibilité d'inhiber certaines transitions.

Cette théorie est actuellement bien adaptée à l'étude de l'aspect logique du fonctionnement, des questions de validation, etc. Par contre, elle a plus de mal à incorporer l'aspect quantitatif de l'évaluation de performance.

1.4.5. *Réseaux de Petri (RdP)*. Les RdP sont un langage graphique de description des phénomènes de synchronisation et de concurrence. Les RdP *temporisés* permettent de plus de prendre en compte les aspects "évaluation de performance". Un certain nombre de propriétés des systèmes ainsi décrits (invariants au cours du fonctionnement, présence de deadlocks, etc.) peuvent être étudiées dans ce cadre.

En temps que langage graphique, les RdP ont sur le plan pratique les avantages et les inconvénients de ce type de représentation : concision et clarté pour des systèmes simples, difficulté d'utilisation pour des systèmes atteignant un certain niveau de complexité. Dans ce cas, à l'instar des "blocs-diagramme" utilisés par les automaticiens pour décrire graphiquement les systèmes continus, une approche hiérarchisée (procédant par zooms successifs sur des parties du système de plus en plus détaillées) est hautement recommandable.

Dans ce cours, nous nous servons des RdP comme outil de représentation agréable à utiliser pour décrire rapidement des schémas simples. De même que l'algèbre des fonctions rationnelles permet de plaquer sur les blocs-diagramme, et dans le cas de systèmes linéaires stationnaires de dimension finie, une structure de calcul algébrique (calcul sur les fonctions de transfert) permettant de prendre le relais de l'outil graphique, de même on peut voir l'objet de ce cours comme une démarche visant à plaquer sur une sous-classe de RdP temporisés (ceux qui apparaîtront comme linéaires stationnaires dans une certaine algèbre) une structure de calcul algébrique en tous points analogue à celle des fonctions de transfert.

1.4.6. *Langages de programmation parallèle/temps réel*. Un certain nombre de ces langages informatiques (Occam, Estérel, Signal, Lustre, . . . ) peuvent aussi être vus comme des langages de spécification, voire de validation logique, des SEDs. Cependant la notion d'évaluation de performance est pour l'essentiel absente de ce type d'approche.

1.4.7. *Modèles dynamiques algébriques*. C'est l'objet de ce cours de proposer une description de certaines classes de SEDs, prenant en compte l'aspect quantitatif (évaluation de performance), et s'appuyant sur des modèles mathématiques tout à fait analogues aux modèles utilisés en Automatique. Cependant, on devra pour cela écarter les phénomènes de *concurrence* (supposés déjà arbitrés par des politiques de priorité, d'ordonnancement, etc.) pour se limiter à la prise en compte des phénomènes de *synchronisation*.

---

<sup>4</sup>Il faut un temps quasiment déterministe pour percer un trou dans une tôle ou pour effectuer une addition dans un calculateur. Certes une machine peut tomber en panne, mais ces événements sont, on l'espère, assez rares, et entre deux pannes, la description stochastique semble inappropriée dans ce cas. Elle le sera d'autant moins que l'on s'intéressera à des phénomènes moins microscopiques et plus globaux comme la durée d'une conversation téléphonique.



## 2. NÉCESSITÉ D'UNE NOUVELLE ARITHMÉTIQUE, DIOÏDES

**2.1. Une nouvelle façon de compter.**

2.1.1. *Phénomènes cumulatifs et algèbre usuelle.* Le calcul différentiel ou plutôt intégral décrit des phénomènes cumulatifs (un réservoir qui se remplit ou qui se vide) : la notion d'“addition” correspond à l'opérateur  $+$  habituel. Si on s'intéresse à la production de bicyclettes, on dira : 6 kg pour le cadre + 600 g pour les roues = 6,6 kg pour la bicyclette. On remarque qu'il ne faut additionner que des grandeurs de même nature (dimension physique) et les exprimer dans la même unité avant de pouvoir les additionner.

2.1.2. *Phénomènes de rendez-vous, de synchronisation, d'assemblage, de mélange ... et algèbre des dioïdes.* Si on s'intéresse à nouveau à la production de bicyclettes, on peut dire qu'une bicyclette est la “somme” d'une paire de roues et d'un cadre. Cette nouvelle “somme”, notée  $\oplus$  pour la distinguer

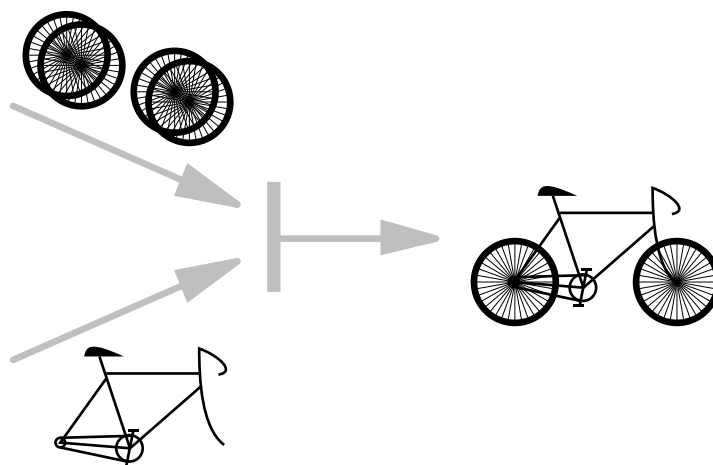


FIGURE 2. Assemblage de bicyclettes

du  $+$  habituel, correspond à l'opération d'assemblage. On notera que l'on se permet alors d'“ajouter” des “torchons et des serviettes”, des chevaux et des cavaliers, des paires de roues et des cadres, etc., c'est-à-dire des grandeurs ne s'exprimant pas dans les mêmes unités. Si on a 2 paires de roues et 1 cadre, on ne peut fabriquer qu'une seule bicyclette, donc

$$1 \oplus 2 = 1 \quad \text{et plus généralement} \quad a \oplus b = \min(a, b) .$$

Si on s'intéresse maintenant à la date  $t_n$  de fabrication de la  $n$ -ième bicyclette, celle-ci sera calculée comme  $\max(\theta_n, \tau_n)$  où  $\theta_n$  est la date de disponibilité de la  $n$ -ième paire de roues tandis que  $\tau_n$  représente la date de disponibilité du  $n$ -ième cadre. Si on est quatre pour faire un bridge, c'est l'heure d'arrivée du quatrième partenaire qui détermine l'heure de début de la partie.

On le voit, les opérateurs tels que  $\min$  ou  $\max$  interviendront<sup>5</sup> à chaque fois que l'on considère des phénomènes d'assemblage, de rendez-vous, ou plus généralement de synchronisation de plusieurs conditions. De plus, cette situation n'est pas propre au cas discret et les phénomènes de mélange en continu de fluides par exemple donnent lieu aux mêmes opérateurs (combien produit-on l'instant  $t$  de litres de peinture rose si celle-ci est obtenue par mélange dans la proportion un pour un de peintures blanche et rouge, et que l'on dispose l'instant  $t$  de  $x(t)$  et de  $y(t)$  demi-litres de ces couleurs respectivement?).

En dehors de l'opérateur  $\min$  ou  $\max$ , on aura aussi besoin de l'opérateur  $+$  habituel (phénomènes cumulatifs usuels) dans la mesure où la quantité produite à l'instant  $t$  est la somme des quantités produites aux instants antérieurs, ou que la date de fin est égale à la date de début + une durée.

<sup>5</sup>min lorsqu'il s'agira de quantités, max lorsqu'il s'agira de dates

## 2.2. L'algèbre des dioïdes.

2.2.1. *Axiomatique.* Un dioïde est un ensemble  $\mathcal{D}$  muni de deux opérations internes notées  $\oplus$  et  $\otimes$  et appelées “addition” et “multiplication” respectivement, telles que

**l'addition est associative :**  $(a \otimes b) \oplus c = a \oplus (b \otimes c)$  ;

**l'addition est commutative :**  $a \oplus b = b \oplus a$  ;

**l'addition admet un élément neutre :** noté  $\varepsilon$  et appelé “zéro” :  $a \oplus \varepsilon = a$  ;

**la multiplication est associative :**  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ;

**la multiplication admet un élément neutre :** noté  $e$  et appelé “identité” :  $a \otimes e = e \otimes a = a$  ;

**la multiplication est distributive par rapport à l'addition :**  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$   
et idem pour la multiplication à gauche ;

**le zéro est absorbant pour la multiplication :**  $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  ;

**l'addition est idempotente :**  $a \oplus a = a$ .

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif sera parfois omis. Le dioïde est dit *commutatif* si la multiplication est commutative. On parlera de *sous-dioïde* d'un dioïde pour un sous-ensemble stable par  $\oplus$  et  $\otimes$  <sup>(6)</sup> et contenant  $\varepsilon$  et  $e$ .

### 2.2.2. Quelques exemples.

- (1)  $\mathbb{N}_{\max}, \mathbb{Z}_{\max}, \mathbb{Q}_{\max}, \mathbb{R}_{\max}$  : il s'agit des ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , augmentés de l'élément  $-\infty$  (qui joue le rôle de  $\varepsilon$ ) avec  $\oplus = \max$  et  $\otimes = +$ .

**Exercice 1.** Vérifier tous les axiomes. À quoi est égal  $e$ ? Pourquoi ne pas prendre plutôt  $\oplus = +$  et  $\otimes = \max$ ? Pourquoi ne pas se contenter de  $\varepsilon = 0$  dans le cas de  $\mathbb{N}_{\max}$ ?

- (2)  $\mathbb{Z}_{\min}$  : on remplace  $\oplus = \max$  par  $\oplus = \min$  dans  $\mathbb{Z}_{\max}$  et  $-\infty$  par  $+\infty$ .  
 (3) Dioïdes de parties de  $\mathbb{R}^n$  : on considère la collection des parties de  $\mathbb{R}^n$  (y compris  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$  lui-même) que l'on note  $2^{\mathbb{R}^n}$ , et on pose  $\oplus = \cup$  et  $\otimes = +$  (somme vectorielle de parties : on a par exemple  $A + B = \bigcup_{x \in A} \{x + B\}$  où  $x + B$  est le translaté de  $B$  par le vecteur  $x$ ).

**Exercice 2.** Vérifier les axiomes. Montrer que  $\mathbb{R}_{\max}$  est isomorphe au sous-dioïde des demies-droites  $]-\infty, x]$  de  $\mathbb{R}$  muni de  $\oplus = \cup$  et  $\otimes = +$  en précisant cet isomorphisme.

- (4) Algèbre de Boole : vérifier que c'est un dioïde (le plus simple des dioïdes, hormis le dioïde trivial réduit à  $\{\varepsilon\}$ ).  
 (5) Dioïde  $(\overline{\mathbb{R}}, \max, \min)$  : on a posé  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  et  $\oplus = \max$ ,  $\otimes = \min$ . Vérifier les axiomes. Considérer de même  $(2^{\mathbb{R}^n}, \cup, \cap)$ .

2.2.3. *Dioïdes matriciels.* À partir d'un dioïde  $\mathcal{D}$  “scalaire” (mais n'importe lequel des exemples ci-dessus peut être considéré comme le dioïde scalaire de départ), on peut obtenir un dioïde “matriciel” en considérant les matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathcal{D}$  et en munissant cet ensemble de la somme et du produit matriciels usuels :

$$A = (A_{ij}) \quad , \quad B = (B_{ij}) \quad , \quad (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad , \quad (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \quad .$$

**Exercice 3.** Montrer que cette structure obéit bien aux axiomes des dioïdes. Donner l'expression de  $\varepsilon$  et celle de  $e$  dans ce nouveau dioïde<sup>7</sup> Donner l'expression du produit matriciel avec les notations de l'algèbre usuelle lorsque  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{\max}$ .

Observer que le dioïde matriciel associé à un dioïde scalaire *commutatif* n'est pas en général lui-même commutatif. On reviendra sur l'interprétation du calcul matriciel en liaison avec les graphes valués.

<sup>6</sup>i.e. la somme et le produit de deux éléments du sous-ensemble appartiennent aussi au sous-ensemble

<sup>7</sup>Dans ce cours, on notera toujours  $\varepsilon$  et  $e$  les éléments neutres de  $\oplus$  et  $\otimes$ , quel que soit le dioïde considéré.

2.2.4. *Idempotence de l'addition et non simplifiabilité, impossibilité de la symétrisation.* Les propriétés combinatoires des dioïdes (associativité, commutativité, distributivité, etc.) sont similaires à celles des structures algébriques usuelles. La différence majeure provient du fait que l'addition ne définit pas une structure de groupe (pas de "signe moins" ou d'opposé). La structure la plus familière présentant cette difficulté est  $\mathbb{N}$  : on peut alors parler de semi-anneau car  $\mathbb{N}$  peut être plongé dans l'anneau  $\mathbb{Z}$ . On rappelle que la construction de  $\mathbb{Z}$  à partir de  $\mathbb{N}$  consiste à quotienter  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  par la relation d'équivalence sur les couples :  $(a, b) \sim (c, d)$  si  $a + d = b + c$ .

**Exercice 4.** Montrer qu'à cause de l'idempotence de  $\oplus$ , la même relation définie avec  $\oplus$  sur  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  n'est pas d'équivalence. Montrer de même que si l'addition était simplifiable (i.e.  $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$ ),  $\mathcal{D}$  serait réduit à  $\{\varepsilon\}$ . Montrer enfin que si tout élément avait un opposé (i.e.  $\forall a, \exists b : a \oplus b = \varepsilon$ ),  $\mathcal{D}$  serait également réduit à  $\{\varepsilon\}$ .

Ces considérations montrent que l'idempotence de l'addition est la "ligne de démarcation" entre les structures algébriques qui nous sont familières et les dioïdes. En fait cette idempotence est intimement liée à une structure d'ordre.

2.2.5. *Idempotence de l'addition et relation d'ordre.* On définit la relation suivante

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b .$$

**Exercice 5.** Montrer qu'une définition équivalente est

$$a \succeq b \iff \exists c : a = b \oplus c .$$

Montrer que  $\succeq$  est une relation d'ordre. Montrer que la relation d'ordre définit un ordre total si et seulement si  $a \oplus b = a$  ou  $b$  pour tout  $a$  et tout  $b$ . Montrer que  $\varepsilon$  est le plus petit élément d'un dioïde. Expliciter  $\succeq$  pour tous les exemples du §2.2.2. Qu'observe-t-on pour  $\mathbb{Z}_{\min}$ ? Quels exemples ne constituent pas des ensembles totalement ordonnés.

Cette relation d'ordre est *compatible* avec la structure de dioïde.

**Exercice 6.** Montrer que pour tout  $a, b, c$  dans un dioïde,

$$a \succeq b \Rightarrow a \oplus c \succeq b \oplus c \text{ ainsi que } a \otimes c \succeq b \otimes c ,$$

(même chose pour la multiplication à gauche, ce qui va de soi si le dioïde est commutatif).

La compatibilité de l'ordre avec la multiplication par n'importe quel  $c$  montre qu'en quelque sorte, dans un dioïde, tout élément est "non négatif", ce qui est confirmé par le fait que tout  $c$  est tel que  $c \succeq \varepsilon$ . Ceci ne nous empêche pas de manipuler, dans  $\mathbb{Z}_{\max}$  par exemple, des nombres tels que  $-5 \dots$

2.2.6. *Rappels sur les treillis.*

**Borne supérieure :** dans un ensemble ordonné  $\mathcal{E}$  (i.e. muni d'une relation d'ordre  $\succeq$ ), la borne supérieure de deux éléments  $a$  et  $b$ , si elle existe, est "le plus petit majorant"  $c$ , i.e.

$$\exists c \in \mathcal{E} , \quad c \succeq a , \quad c \succeq b : \quad \forall d \in \mathcal{E} , \quad d \succeq a , \quad d \succeq b \implies d \succeq c .$$

On note  $c = a \vee b$ .

**Demi-treillis supérieur :** c'est un ensemble ordonné tel que deux éléments ont toujours une borne supérieure. La Figure 3 montre un ensemble ordonné qui n'est pas un demi-treillis supérieur (ni inférieur d'ailleurs).

**Exercice 7.** Montrer qu'un dioïde est un demi-treillis supérieur avec  $\vee = \oplus$ .

**Demi-treillis supérieur complet :** c'est un ensemble ordonné tel que tout sous-ensemble (fini ou infini) admet une borne supérieure (qui n'appartient pas forcément au sous-ensemble).

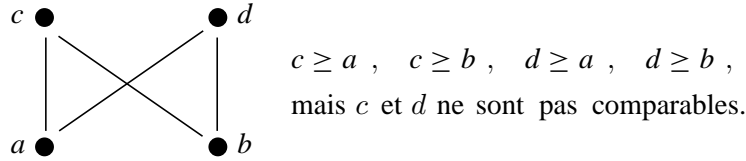


FIGURE 3. Cet ensemble ordonné n'est pas un demi-treillis

**Construction de la borne inférieure :** si le demi-treillis supérieur est complet, et s'il contient un plus petit élément (comparable à tout autre élément et plus petit), alors tout couple d'éléments  $(a, b)$  admet un "plus grand minorant"  $c$  (noté  $a \wedge b$ ) que l'on construit de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{E} \mid x \preceq a, x \preceq b\}, \quad c \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{x \in \mathcal{S}_{ab}} x,$$

en notant que  $c$  est bien défini car  $\mathcal{S}_{ab}$  est non vide puisqu'il contient le plus petit élément et la borne supérieure de  $\mathcal{S}_{ab}$  existe par hypothèse.

**Exercice 8.** Montrer que  $c$  est bien lui-même un minorant de  $a$  et  $b$ , i.e. que  $c \in \mathcal{S}_{ab}$ .

Cette construction de la borne inférieure s'étend sans difficulté au cas d'un sous-ensemble infini d'éléments.

**Treillis, treillis complet :** un treillis est un ensemble  $\mathcal{E}$  muni des opérations  $\vee$  et  $\wedge$  ; le treillis est complet si ces opérations sont définies sur des ensembles infinis. Les propriétés d'associativité et de commutativité de  $\vee$  et  $\wedge$  sont claires. Si le treillis est complet, il existe un plus petit élément ("bottom"), noté ici  $\varepsilon$ , et un plus grand élément ("top"), noté  $\top$ , qui sont des éléments neutres pour  $\vee$  et  $\wedge$  respectivement, et qui sont absorbants pour l'autre opération (e.g.  $\forall a \in \mathcal{E}, \top \vee a = \top$ ).

**Treillis distributif :** un treillis est distributif si  $\vee$  distribue par rapport à  $\wedge$ , c'est-à-dire

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

et réciproquement i.e. :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Pour un nombre fini d'éléments, une distributivité entraîne automatiquement l'autre (exercice ou [6]) ; pour un nombre infini d'éléments, on doit supposer les deux propriétés simultanément.

**Exemple 9.** Le treillis suivant n'est pas distributif. On considère l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$  muni de la relation d'inclusion. La borne supérieure de deux intervalles est le plus petit intervalle qui contient l'union (si  $a = [-3, -2]$  et  $b = [2, 3]$ , alors  $a \vee b = [-3, 3]$ ) ; la borne inférieure est simplement l'intersection ( $a \wedge b = \emptyset$ ). On considère de plus  $c = [-1, 1]$ . Alors

$$(a \vee b) \wedge c = c \neq (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = \emptyset.$$

**2.2.7. Dioïdes complets.** C'est un dioïde dans lequel toute somme (infinie) d'éléments est définie et tel que la distributivité (à droite et à gauche) de  $\otimes$  par rapport à  $\oplus$  s'étend aux sommes infinies.

En rajoutant l'élément  $+\infty$  à  $\mathbb{N}_{\max}, \mathbb{Z}_{\max}, \mathbb{R}_{\max}$ , on obtient des dioïdes complets notés  $\overline{\mathbb{N}}_{\max}, \overline{\mathbb{Z}}_{\max}, \overline{\mathbb{R}}_{\max}$ .

**Exercice 10.** Pourquoi cela n'est-il pas vrai pour  $\mathbb{Q}_{\max}$  ? À quoi est égal  $\infty + (-\infty)$  dans  $\overline{\mathbb{N}}_{\max}, \overline{\mathbb{Z}}_{\max}, \overline{\mathbb{R}}_{\max}$  ? Et dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  ? Pour les exemples du §2.2.2 qui constituent des dioïdes complets, expliciter l'opération  $\wedge$ .

2.2.8. *Diïdes distributifs.* Ce sont les diïdes munis d'une structure de treillis (ce qui est automatiquement vrai pour les diïdes complets) et tel que le treillis est distributif.

L'Exemple 9 (complété comme il se doit par une opération de multiplication) a montré que tout diïde n'est pas distributif. Par contre, tous les diïdes dont nous aurons besoin dans ce cours le seront.

**Exercice 11.** L'exemple (3) du §2.2.2 est-il un diïde complet? Distributif?

2.2.9. *Distributivité de  $\otimes$  par rapport à  $\wedge$ .* Celle-ci est rarement assurée en dehors des cas les plus simples.

**Exercice 12.** Montrer que pour un diïde totalement ordonné,  $\otimes$  distribue par rapport à  $\wedge$ .

Ces considérations montrent que  $\oplus$  et  $\wedge$  ne jouent pas des rôles symétriques en général dans un diïde complet.

**Exemple 13.** On considère l'exemple (3) du §2.2.2 avec  $n = 2$ . Prenons  $a = \{(1, 0)\}$ ,  $b = \{(0, 1)\}$  et  $c = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Alors (voir Figure 4)

$$(a \wedge b) \otimes c = \emptyset \neq (a \otimes c) \wedge (b \otimes c) = [0, 1] \times [0, 1] .$$

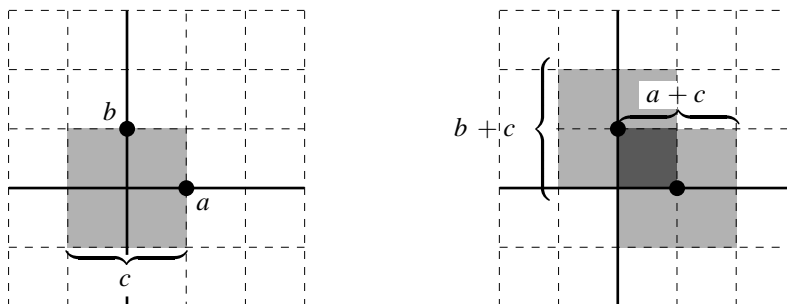


FIGURE 4

**Exercice 14.** D'une manière générale, montrer qu'on a toujours

$$(a \wedge b) \otimes c \preceq (a \otimes c) \wedge (b \otimes c) .$$

2.2.10. *Diïdes archimédiens et caractère absorbant de  $\top$  pour  $\otimes$ .* Dans un diïde complet  $\mathfrak{D}$ ,  $\top$  (plus grand élément) existe et est défini par  $\bigoplus_{x \in \mathfrak{D}} x$ . On peut se demander si  $\top$  est absorbant pour la multiplication (comme l'est  $+\infty$  pour la multiplication ordinaire), c'est-à-dire si  $\top \otimes a = \top$ ,  $\forall a \neq \varepsilon$ .

**Exercice 15.** Parmi les exemples du §2.2.2, en trouver un pour lequel  $\top$  n'est pas absorbant pour la multiplication.

Cependant, cette question trouve une réponse positive avec l'aide de l'hypothèse supplémentaire suivante :

**Diïde archimédien :** c'est un diïde tel que

$$\forall a \neq \varepsilon , \quad \forall b \in \mathfrak{D} , \quad \exists c \text{ et } d \in \mathfrak{D} : \quad a \otimes c \succeq b \text{ et } d \otimes a \succeq b .$$

Le diïde répondant à l'Exercice 15 ne l'est pas.

**Exercice 16.** Dans un diïde archimédien, montrer que  $\top$  est absorbant pour  $\otimes$ .

Les diïdes qui nous intéressent dans ce cours sont archimédiens.

**2.3. Autres phénomènes mettant en jeu l’algèbre des dioïdes.** L’algèbre des dioïdes est donc apparue (et continuera à être utilisée dans ce cours) comme la structure mathématique adéquate pour modéliser les phénomènes décrits au §2.1.2. Avant de continuer dans cette voie, mentionnons d’autres circonstances ou domaines des mathématiques où cette vision algébrique a un rôle à jouer.

2.3.1. *Plus courts/longs chemins dans un graphe, méthode PERT.* C’est historiquement l’une des origines de la théorie des dioïdes, aussi appelés pour cette raison “algèbres de chemins”. Nous verrons plus loin que le calcul des plus courts ou des plus longs chemins<sup>8</sup> dans un graphe valué se ramène à du calcul matriciel dans un dioïde.

La méthode PERT en Recherche Opérationnelle consiste, pour un projet donné comme la construction d’un immeuble, à tracer le graphe qui exprime les contraintes de précédence entre tâches et à placer la durée des tâches comme “poids” des arcs correspondants. La durée totale du projet est alors donnée par le chemin de poids maximal dans le graphe. Tout délai subi par une tâche située sur le(s) “chemin(s) critique(s)” (celui ou ceux de poids maximal) se traduira par le même délai sur la durée totale du projet.

2.3.2. *Programmation dynamique.* La programmation dynamique est un algorithme pour calculer le plus long chemin d’un point à un autre dans un graphe. Le lecteur initié connaît aussi le rôle que joue cette méthode en commande optimale de systèmes dynamiques régis par exemple par des équations récurrentes en temps discret (en s’appuyant sur le fameux “principe d’optimalité de Bellman”). L’équation de la programmation dynamique fait essentiellement intervenir les opérateurs min ou max et + : à ce titre, cette équation peut être vue comme un phénomène linéaire dans une structure de type  $\mathbb{R}_{\min}$  ou  $\mathbb{R}_{\max}$ .

2.3.3. *Exponentielles et phénomènes asymptotiques.* On considère les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}^+$  (ensemble noté  $(\overline{\mathbb{R}}^+)^{\mathbb{R}}$ ) et l’application

$$c : (\overline{\mathbb{R}}^+)^{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad c(f) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(f(x))}{x}.$$

On considère maintenant le sous-ensemble des fonctions qui sont des sommes finies d’exponentielles : une telle fonction est génériquement écrite  $\sum_{i \in I} \alpha_i \exp(a_i x)$  où  $I$  est un ensemble fini,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}^+$ , et  $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$  (si  $a_i = -\infty$ ,  $\exp(a_i x)$  est identifiée à la fonction identiquement nulle, et si  $a_i = +\infty$ , elle est identifiée à la fonction identiquement égale à  $+\infty$ ). Ce sous-ensemble de fonctions est fermé pour la somme et le produit, et pour des éléments génériques  $f$  et  $g$ , on a

$$c(f) = \max_{i \in I} a_i, \quad c(f + g) = \max(c(f), c(g)), \quad c(f \times g) = c(f) + c(g).$$

Donc l’application  $c$  “transporte” l’algèbre usuelle dans l’algèbre  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ . On réalise ainsi que  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$  est la structure algébrique adaptée à l’étude de certains phénomènes asymptotiques. Ce genre de considérations se rencontrent dans la théorie des grands écarts à la loi des grands nombres en théorie des processus stochastiques, lorsque l’on trace des lieux de Bode asymptotiques en Automatique classique, ou bien plus prosaïquement lorsque l’on “raisonne en ordres de grandeur” sur des nombres.

2.3.4. *Fonctions convexes.* Considérons une fonction polynômiale sur  $\mathbb{R}_{\max}$  :

$$p : x \mapsto \bigoplus_{i=1}^n a_i \otimes x^i.$$

Réécrite avec les notations usuelles<sup>9</sup>, la fonction polynômiale  $p$  apparaît comme l’enveloppe supérieure de fonctions affines à pentes entières, et donc comme une fonction convexe de  $x$ .

Nous ne développerons pas plus ces considérations ici, mais la théorie des dioïdes semble jouer à certains égards le rôle de “point de vue algébrique” sur la théorie de la convexité considérée jusqu’alors comme un chapitre de l’analyse fonctionnelle.

<sup>8</sup>plus précisément, de poids minimal ou maximal

<sup>9</sup> $x^i$  est à comprendre comme  $\underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{i \text{ fois}} = i \times x$

2.3.5. *Phénomènes de saturation pour des phénomènes continus.* Nous rencontrerons plus loin un exemple. On a déjà vu au §2.1.2 que les phénomènes de mélange ne sont pas spécifiques de la production manufacturière (discrète).

### 3. INTRODUCTION AUX RÉSEAUX DE PETRI (RdP)

**3.1. Généralités.** La présentation qui est faite ici des RdP est “minimale” étant donné que les RdP jouent pour nous seulement le rôle d’un outil agréable (dans les exemples simples!) de représentation graphique de systèmes que nous nous efforcerons de mettre en équations pour les étudier. On exclura en particulier de cette présentation toute l’étude des propriétés des RdP du type “vivacité”, “consistance”, . . .

3.1.1. *Places et transitions.* Un RdP est d’abord un graphe “bi-parti”, c’est-à-dire avec deux sortes de nœuds, les *places* (dessinées comme des ronds — voir Figure 5) et les *transitions* (dessinées comme des

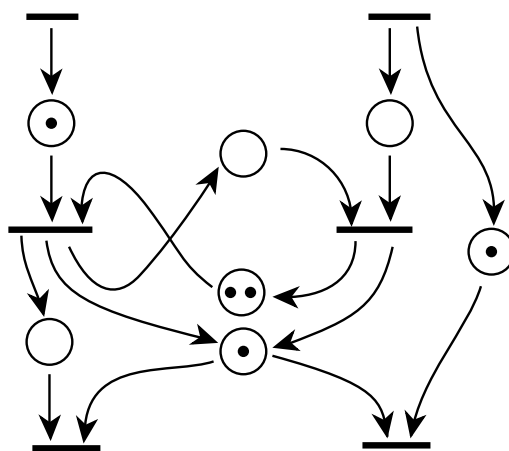


FIGURE 5. Un réseau de Petri

barres épaisses ou des rectangles) et des arcs allant d’une sorte de nœuds à l’autre et réciproquement, mais jamais de places à places ou de transitions à transitions directement.

3.1.2. *Marquage des places.* Les places sont “marquées” par des “jetons” (points noirs) qui vont “circuler” dans les places selon des règles définies ci-après. Ceci symbolise l’évolution dynamique du système. Le *marquage initial* (celui qu’on indique sur les dessins) donne la position initiale des jetons.

3.1.3. *Règles de fonctionnement et circulation des jetons.* Nous nous contentons d’indiquer une version simple de la règle (celle dont nous aurons besoin) : des versions plus générales nécessitent de définir des nombres entiers (ici canoniquement égaux à 1) attachés à chaque place qui servent à savoir combien de jetons présents sont requis dans les places amont pour pouvoir “brûler” une transition et combien sont alors produits dans les places aval. Ici la règle est la suivante : pour qu’une transition puisse être activée (ou “brûlée” selon la terminologie anglo-saxonne), *un* jeton au moins est requis dans *chaque* place en amont de la transition. L’effet de l’activation de la transition est de prélever ces jetons des places amont et de rajouter dans *chaque* place aval *un* nouveau jeton : voir Figure 6). On observe sur cette figure que le nombre de jetons ne reste pas constant au cours du fonctionnement. On verra plus loin (§3.3) que les jetons ne représentent pas vraiment les ressources mais plutôt l’état des ressources.

3.1.4. *Modélisation de la concurrence (ou logique) et de la synchronisation (et logique).*

**Concurrence à la fourniture de jetons dans une place :** c’est la convergence d’arcs sur une place (Figure 7a) ;

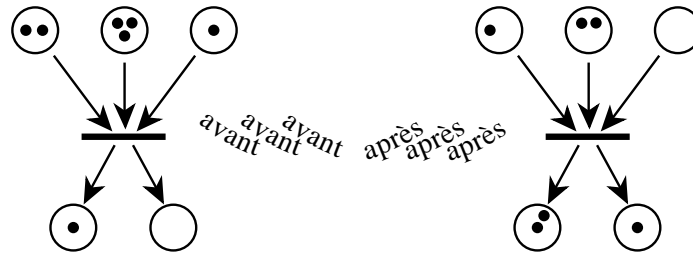


FIGURE 6. Activation d'une transition

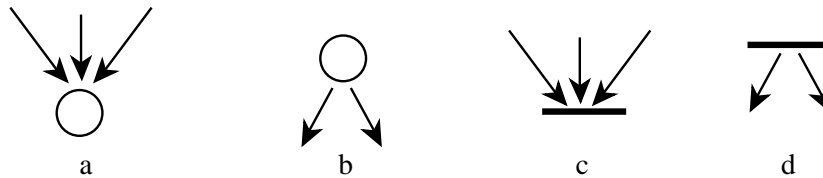


FIGURE 7. Concurrence et synchronisation

**Concurrence à la consommation des jetons d'une place :** c'est la divergence d'arcs à partir d'une place (Figure 7b) ; ce "conflit structurel" doit être arbitré (lorsqu'il se produit effectivement, c'est-à-dire lorsque les transitions aval en compétition pourraient effectivement toutes les deux être activées) par une règle de priorité quelconque ; sinon le comportement du système n'est pas entièrement spécifié ;

**Synchronisation dans la consommation de jetons de plusieurs places :** c'est la convergence de plusieurs arcs sur une transition (Figure 7c) ;

**Synchronisation dans la fourniture de jetons à plusieurs places :** c'est la divergence d'arcs à partir d'une transition (Figure 7d) ;

3.1.5. *Temporisation des places et/ou des transitions, séquentialisation des tâches et limitation de capacité des places.* Dans ce cours, nous nous intéressons aux aspects quantitatifs d'évaluation de performance : il nous faut donc introduire une notion de temporisation. A priori, on peut penser à l'activation d'une transition comme au déroulement d'une tâche : il faudrait alors mettre une temporisation sur les transitions ( $t$  sur la Figure 8a). Par ailleurs, si on pense à une place comme un endroit où une ressource

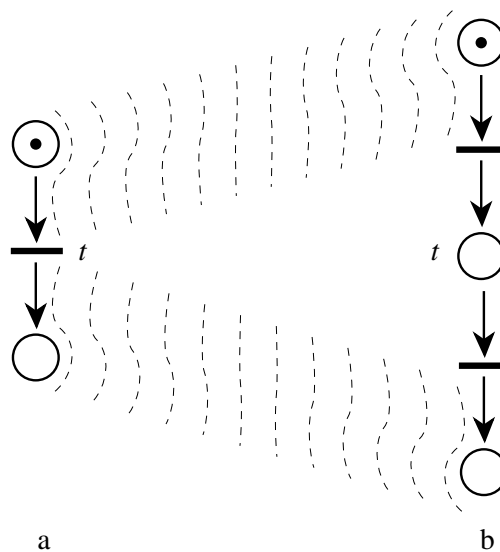


FIGURE 8. Temporisation des tâches



séjourne en attendant de poursuivre son parcours, il peut y avoir une durée *minimale* de séjour à respecter : penser par exemple au séjour d'une pièce dans un four pour atteindre une température souhaitée.

On a donc envie de mettre une durée d'activation pour les transitions (durée pendant laquelle un jeton de chaque place amont de la transition activée est "réservé" pour cette transition (avant de disparaître), et au delà de laquelle un jeton apparaît dans chaque place aval) ; et une durée *minimale* de séjour dans les places, durée pendant laquelle tout jeton qui vient d'être produit dans une place ne peut pas encore servir à l'activation de transitions aval.

En fait, il n'y a aucune perte de généralité à ne mettre de temporisations *que* sur les transitions, ou encore *que* sur les places. C'est ce dernier point de vue que nous adopterons ici, autrement dit, pour nous, toute activation de transition sera instantanée. La Figure 8 montre la transformation d'une transition de durée  $t$  en deux transitions instantanées (le début et la fin) séparée par une place de temporisation  $t$ .

**Exercice 17.** Si on avait plutôt opté pour mettre des durées sur les transitions, montrer comment il faudrait transformer des places de temporisation  $t$ .

Avec une transition instantanée marquant un début de tâche comme sur la Figure 8b, rien n'empêche les jetons d'être admis dans la nouvelle place de temporisation  $t$  infiniment vite, et donc de s'accumuler indéfiniment dans cette place (les tâches peuvent recommencer avant d'en avoir terminé). Si cette "salle d'attente" est de capacité finie  $n$ , on doit bloquer l'accès après un nombre d'entrées excédant de  $n$  le nombre de sorties. La Figure 9 représente le cas  $n = 1$ . La tâche de durée  $t$  ne peut pas recommencer avec un jeton avant d'en avoir terminé avec un précédent jeton. La temporisation  $\tau$  (optionnelle) placée sur la place en feedback permet même de respecter une durée minimale séparant la fin d'une tâche de la relance de la même tâche (durée de repos du serveur, de reconditionnement de la machine, etc.).

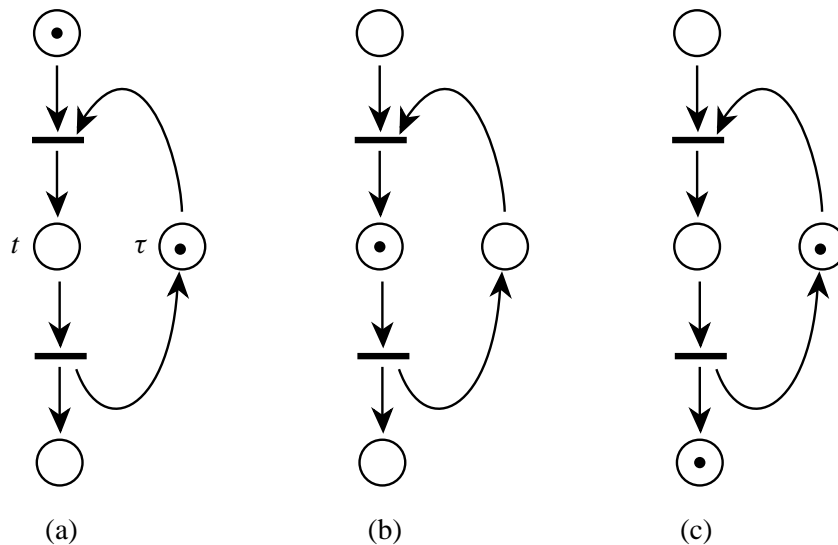


FIGURE 9. Séquentialisation des tâches et durée de reconditionnement

**Exercice 18.** Comment peut-on dessiner le cas d'une place de capacité  $n > 1$ ? Vérifiez en le fonctionnement.

### 3.2. Graphes d'événements.

3.2.1. *Restrictions et capacité de modélisation.* Les **graphes d'événements** sont une sous-classe de RdP pour lesquels les situations des Figures 7a et 7b ne se rencontrent pas. Autrement dit, *toute place n'a qu'une transition amont et qu'une transition aval*. Autrement dit encore, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence. On observera que pour les graphes d'événements, on peut abandonner le point de vue "graphe bi-parti" en considérant maintenant que les transitions sont les nœuds du graphe, et que les places sont les arcs.

À l'opposé, les *machines à états* refusent les configurations des Figure 7c et 7d (synchronisation) pour ne retenir que 7a et 7b (concurrency).

L'objet du cours est l'étude des graphes d'événements temporisés, les temporisations étant placées sur les transitions uniquement.

3.2.2. *Une propriété fondamentale des graphes d'événements.* On a vu qu'en général le nombre de jetons total d'un RdP ne reste pas constant au cours l'évolution de celui-ci, même pour un RdP fermé (i.e. tel que toute transition ait au moins une place amont et au moins une place aval). Cependant, pour un graphe d'événements, il existe un invariant : c'est le nombre total de jetons le long de tout circuit du graphe.

**Exercice 19.** Vérifier la propriété de conservation du nombre total de jetons par circuit sur des exemples. En donner une démonstration générale.

3.2.3. *Exemple : atelier flexible.*

**Description du système.** Pour illustrer la capacité de modélisation des graphes d'événements temporisés, on va examiner le modèle d'un atelier flexible de type "jobshop", c'est-à-dire où toutes les pièces ne circulent pas dans l'atelier dans le même sens de parcours des machines (par opposition aux "flowshops"). De plus toutes les pièces ne passent pas nécessairement sur toutes les machines. Ici, il y a trois machines  $M_1, M_2, M_3$ , et l'atelier fabrique trois types de pièces  $P_1, P_2, P_3$ . Chaque type de pièce doit subir un certain nombre d'opérations sur les machines dans un ordre précis. On suppose ici les étapes suivantes pour chaque type de pièce :

$$\begin{aligned} P_1 &: M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3, \\ P_2 &: M_3 \rightarrow M_2, \\ P_3 &: M_1 \rightarrow M_3. \end{aligned}$$

On doit de plus respecter des ratios de production 1/1/2 ce qui veut dire qu'on veut produire simultanément 25% de pièces de type  $P_1$ , 25% de type  $P_2$  et 50% de type  $P_3$ . Pour cela, on constitue une "séquence de base"  $P_1 - P_2 - P_3 - P_3$  respectant les ratios de production, et on doit définir l'ordre de passage de cette séquence de base pour chaque machine (c'est l'ordonnancement), cet ordre étant répété indéfiniment. Ici on adopte :

$$\begin{aligned} M_1 &: P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_3, \\ M_2 &: P_1 \rightarrow P_2, \\ M_3 &: P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_3. \end{aligned}$$

Enfin, on suppose que les pièces sont portées par des palettes spécialisées par type de pièce et qu'on a mis en service une palette pour  $P_1$ , une palette pour  $P_2$  et deux palettes pour  $P_3$ , ce qui est consistant avec les ratios de production désirés. Lorsqu'une pièce a subi les opérations requises, elle est dépalétisée et mise en stock, et une nouvelle ébauche de pièce du même type est palétisée. Cette opération de déchargement/rechargement peut être modélisée par le passage sur une "machine" ou "poste de travail" si nécessaire, i.e. si une durée non négligeable lui est associé.

**Modèle simple.** La Figure 10 représente le modèle de l'atelier qui vient d'être décrit. On peut voir la transition à l'intersection du circuit de la machine  $M_i$  et de la palette  $P_j$  comme le *début* de l'opération de passage de  $P_j$  sur  $M_i$ .

**Exercice 20.** En appelant  $t_{ij}$  le temps d'usinage correspondant, placer sur les places du graphe les nombres  $t_{ij}$ .

Le marquage initial détermine la façon dont les machines et les palettes démarrent le processus.

**Exercice 21.** Reprendre le dessin du graphe lorsque

- on modifie l'ordonnancement sur la machine  $M_3$  de la façon suivante :

$$M_3 : P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 ;$$

- on met en service non pas *une* mais *trois* palettes pour le type  $P_1$ .

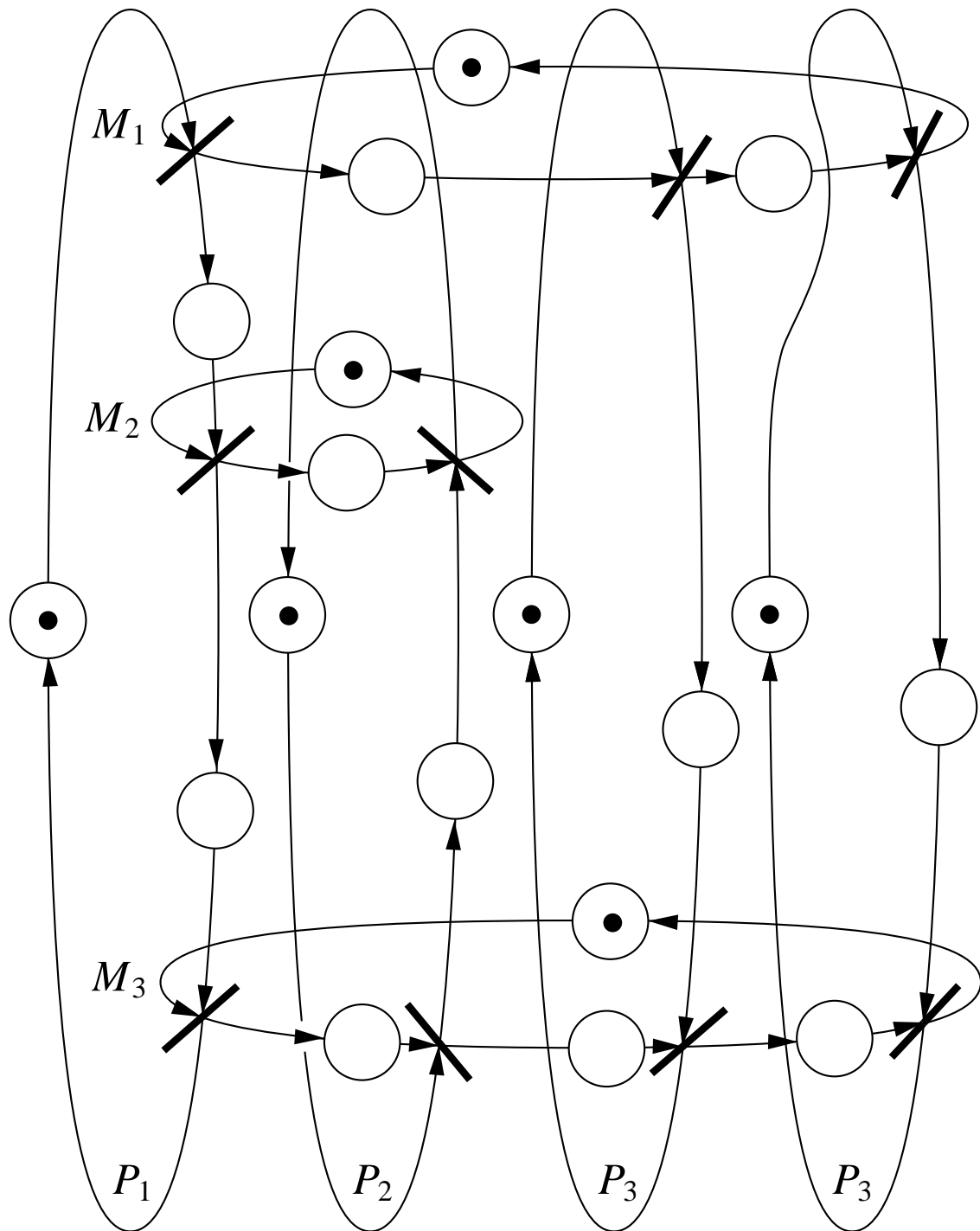


FIGURE 10. Jobshop, 3 machines, 3 types de pièces, ratios 1/1/2

**Modélisation des blocage par l’aval par des stocks de capacité limitée.** La modélisation précédente suppose implicitement que dès qu’une opération est terminée, la pièce peut quitter la machine pour être stockée dans un stock intermédiaire en attendant de passer sur la machine suivante. Que se passe-t-il si ces aires de stockage ont une capacité limitée et sont saturées? On peut objecter qu’il n’y a que quatre palettes dans l’atelier et que donc on peut contrôler parfaitement l’occupation des aires de stockage. Mais cette objection tombe si on augmente le nombre de palettes en service comme suggéré à l’exercice précédent.

**Exercice 22.** Le long du circuit vertical de  $P_1$ , supposons que l’on veuille limiter à deux le nombre de pièces de ce type entre  $M_1$  et  $M_2$  et que lorsque cette limite est atteinte,  $M_1$  est bloquée en attendant de pouvoir libérer la pièce dans le stock intermédiaire. En s’inspirant de la Figure 9, dessiner le graphe qui permet d’exprimer cette contrainte (indication : il faudra introduire une transition de début et une transition de fin de l’opération  $M_1/P_1$ ).

**3.3. Approche de la modélisation basée sur les ressources.** Ce qui suit constitue un ensemble d’indications susceptibles de faciliter l’approche de la modélisation de certains systèmes où la notion de ressources joue un rôle fondamental.

3.3.1. *Séquences d’étapes des ressources individuelles.* On suppose que chaque type de ressource peut être décrit par une suite d’étapes à parcourir dans un ordre prédéfini (i.e. les questions d’ordonnancement et de routage sont réglées d’avance). L’état instantané d’une ressource dans ce parcours est marqué par un jeton dans une certaine place à chaque instant. La place porte la durée de l’étape. On distingue les ressources “recyclables” (machines par exemple) et “non recyclables” (pièces qui entrent à un bout et sortent à l’autre par exemple). On leur associe les schémas de la Figure 11.

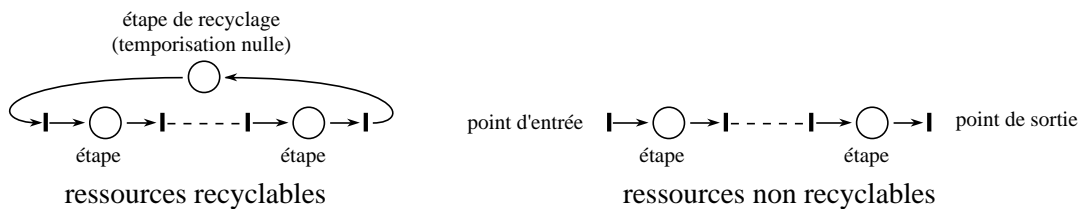


FIGURE 11

3.3.2. *Synchronisation.* Il s’agit de faire coïncider le début et la fin d’une étape pour plusieurs ressources impliquées simultanément dans une étape donnée. On fait appel à des “circuits de synchronisation” sans temporisation et sans jeton. Chacun des deux arcs du circuit de synchronisation implique une inégalité de sens opposé à l’autre sur les dates d’activation des transitions, d’où l’égalité des dates d’activation des transitions. Ces transitions synchronisées peuvent alors être fusionnées (Figure 12). L’existence

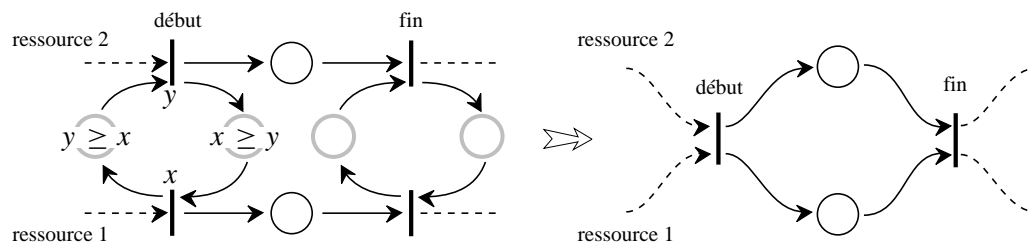


FIGURE 12. Synchronisation

de circuits sans jeton (et sans temporisation), bien qu’acceptable mathématiquement, est contraire à l’orthodoxie des RdP. On peut justifier ce fonctionnement en disant qu’on “emprunte” les jetons (absents du circuit de synchronisation) pour activer les transitions et qu’on est en mesure de “rendre” ces jetons

au bout d'un temps nul, du fait de l'absence de temporisation. La fusion des transitions synchronisées évite cette discussion.

On note qu'un nombre égal de flèches entrent et sortent des transitions synchronisées. En conséquence, le nombre *total* de jetons dans le graphe (et non pas seulement dans les circuits) est maintenant conservé au cours du fonctionnement. On récupère ainsi l'interprétation "ressource" des jetons eux-mêmes.

Une autre solution très différente permet aussi de synchroniser deux transitions. Cette solution évite les circuits de synchronisation au prix de l'introduction de transitions fictives en amont des transitions réelles. Elle est décrite par la Figure 13. On vérifiera par la "simulation" du fonctionnement du RdP, et

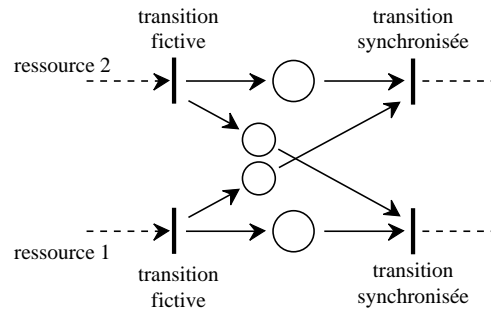


FIGURE 13. Autre solution pour la synchronisation

plus tard par la mise en équations, que la synchronisation est effective.

Cette diversité de solutions graphiques aboutissant à la même équation mathématique est une illustration de l'intérêt de procéder à une mise en équations des graphes d'événements.

### 3.3.3. État initial canonique.

- ressources recyclables : on marque initialement l'étape de recyclage par un nombre de jetons égal au nombre de ressources identiques (par exemple, machines travaillant en pool, places dans un stock . . . );
- ressources non recyclables : le chemin est initialement vide ; les jetons seront introduits aux points d'entrée au cours du fonctionnement ; les "commandes" du système (au sens de l'Automatique) sont les dates d'introduction.

À partir de cet état initial canonique, d'autres états sont atteignables, qui peuvent être pris comme état initial en changeant l'instant initial, mais il faut alors *aussi* préciser depuis combien de temps les jetons du marquage initial sont dans les places avec temporisation non nulle.

## 4. GRAPHES ET MATRICES

Cette section présente quelques rappels qui nous seront utiles à propos des interprétations en termes de graphes de certaines manipulations matricielles

**4.1. Graphes orientés.** Un *graphe orienté* est défini par un ensemble de nœuds  $\mathcal{V}$  et un ensemble d'arcs  $\mathcal{A}$  ayant une origine et une extrémité dans  $\mathcal{V}$ . On notera  $\overset{i}{\rightarrow}^j$  un arc d'origine  $i$  et d'extrémité  $j$ .

**4.1.1. Chemins, circuits.** Un *chemin* est une suite de nœuds que l'on peut parcourir séquentiellement en empruntant les arcs de  $\mathcal{A}$ . Un chemin est *élémentaire* si aucun nœud n'est rencontré deux fois. La *longueur* d'un chemin est égal à son nombre d'arcs. Un *circuit* est un chemin dont l'origine est confondue avec l'extrémité. Un circuit est élémentaire si tout nœud n'est l'origine que d'un seul arc appartenant au circuit (on peut dans cette définition remplacer le mot "origine" par le mot "extrémité"). Une *boucle* est un circuit de longueur 1.

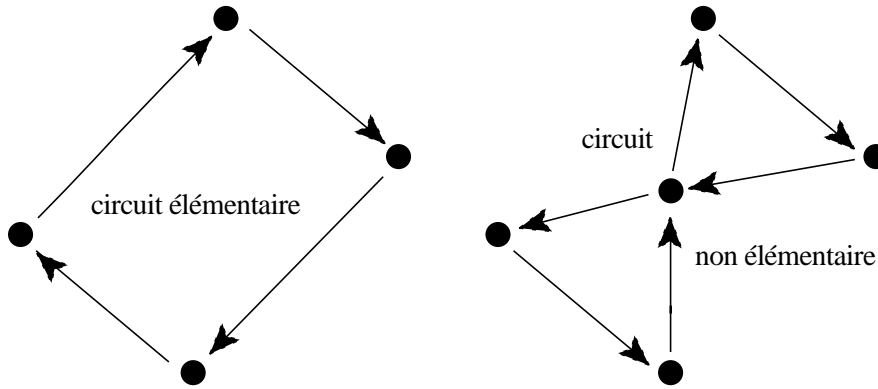


FIGURE 14

4.1.2. *Prédécesseurs, successeurs.* L'ensemble des **prédécesseurs immédiats** d'un nœud  $i$ , noté  $\pi(i)$  est l'ensemble des nœuds  $j$  tels que  $\overset{j}{\rightsquigarrow} i \in \mathfrak{A}$ . Pour deux "multi-applications"  $\theta$  et  $\tau$  (i.e. applications à valeurs "sous-ensembles"), on note

$$\theta^n(i) = \underbrace{(\theta \circ \dots \circ \theta)}_{n \text{ fois}}(i) \quad \text{avec} \quad (\theta \circ \tau)(i) = \bigcup_{j \in \tau(i)} \{\theta(j)\} .$$

On pose alors

$$\pi^+(i) = \pi(i) \cup \pi^2(i) \cup \dots , \quad (1)$$

que l'on appelle l'**ascendance** ou les *prédécesseurs* de  $i$  lorsqu'il s'agit de la multi-application  $\pi$  des prédécesseurs immédiats. On pose aussi

$$\pi^*(i) = \{i\} \cup \pi^+(i) . \quad (2)$$

On définira de même l'ensemble  $\sigma(i)$  des **successeurs immédiats** d'un nœud  $i$ , l'ensemble  $\sigma^+(i)$ , appelé **descendance** ou *successeurs* de  $i$ , et enfin l'ensemble  $\sigma^*(i)$ .

4.1.3. *Sources, puits.* Une **source** est un nœud  $i$  tel que  $\pi(i) = \emptyset$ . Les sources serviront d'entrées (de commandes au sens de l'Automatique) pour un graphe d'événements. De même, on appellera **puits** tout nœud  $i$  tel que  $\sigma(i) = \emptyset$ . Ces nœuds serviront de sorties (d'observations au sens de l'Automatique) pour un graphe d'événements.

4.1.4. *Graphes acycliques, arbres.* Un graphe **acyclique** sera pour nous un graphe sans circuit, c'est-à-dire

$$\nexists i \in \mathfrak{N} : i \in \pi^+(i)$$

(on peut remplacer  $\pi^+$  par  $\sigma^+$  dans cette définition). Un **arbre** est un graphe acyclique ayant un seul nœud source.

4.1.5. *Composantes fortement connexes, graphe réduit.* On définit d'abord une relation de *préordre* sur  $\mathfrak{N}$  : " $i$  précède  $j$ " si  $i \in \pi^*(j)$ . Ce n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas antisymétrique) sauf si le graphe est acyclique (on peut aussi tolérer un graphe dont les seuls circuits sont des boucles). À chaque fois qu'on est en présence d'une relation de préordre, on définit classiquement une relation d'équivalence :  $i \mathfrak{R} j$  si  $i$  et  $j$  se précèdent mutuellement. La relation de préordre devient alors une relation d'ordre sur l'ensemble quotient  $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}$ . On associe à cet ensemble quotient un **graphe réduit** : un nœud représente une classe d'équivalence  $[i]$  appelée la **composante fortement connexe**<sup>10</sup> contenant le nœud  $i$ . Un arc  $\overset{[i]}{\rightsquigarrow} [j]$  du graphe réduit (voir Figure 15) représente un chemin existant du graphe original allant de  $i$  à  $j$  et n'empruntant pas d'autres nœuds que ceux de  $[i] \cup [j]$ .

<sup>10</sup>On se laissera aller à dire simplement "composante connexe" car il ne sera question que d'une seule notion ici.

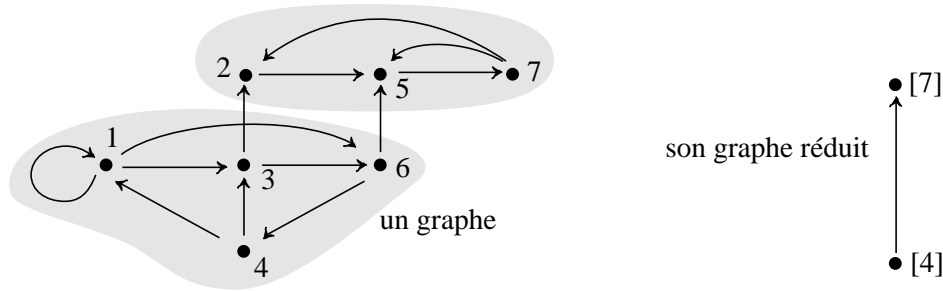


FIGURE 15

**Exercice 23.** Montrer qu’une définition équivalente de la relation  $\mathcal{R}$  est :  $i\mathcal{R}j$  si  $i$  et  $j$  appartiennent à un même circuit. Montrer que le graphe réduit est acyclique. Montrer que c’est un ensemble ordonné (de nœuds représentant les composantes fortement connexes). Montrer que cet ensemble ordonné est un demi-treillis inférieur si et seulement si le graphe réduit est un arbre.

**4.2. Représentations matricielles des graphes valués.** Un *graphe valué* est un graphe dans lequel chaque arc  $\overset{i}{\rightsquigarrow} \overset{j}{\leftarrow}$  porte un *poids*  $a_{ji}$  (noter que l’indice d’extrémité  $j$  précède l’indice d’origine  $i$ ). Pour notre propos, les poids seront à valeurs dans un dioïde. Le poids d’un chemin ou d’un circuit  $i_0, i_1, \dots, i_{k-1}, i_k$  est le *produit*  $a_{i_k i_{k-1}} \otimes \dots \otimes a_{i_1 i_0}$ .

**4.3. Matrice de transition.** Cette notion ne concerne que les graphes valués ne comportant que des nœuds sources numérotés de 1 à  $m$ , et des nœuds puits numérotés de  $m + 1$  à  $m + p$ . La *matrice de transition*  $T$  associée est de dimension  $p \times m$ , telle que (voir Figure 16)

$$T_{ij} = \begin{cases} a_{m+i,j} & \text{s'il y a un arc } \overset{j}{\rightsquigarrow} \overset{m+i}{\leftarrow} \text{ de poids } a_{m+i,j}, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement, il est facile d’associer un graphe de transition à une matrice  $T$  rectangulaire.

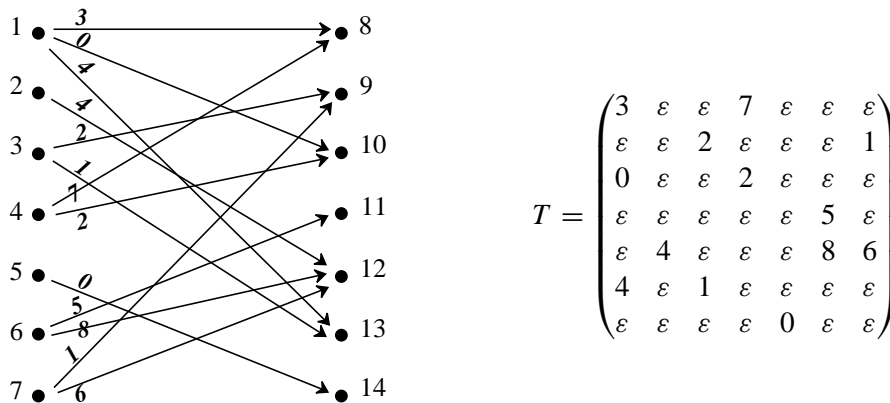


FIGURE 16. Graphe et matrice de transition associés

**4.3.1. Matrice de précédence.** Pour un graphe valué à  $n$  nœuds, la *matrice de précédence* est une matrice carrée  $A$  de dimension  $n \times n$  ayant pour élément  $A_{ij}$  le poids  $a_{ij}$  de l’arc  $\overset{j}{\rightsquigarrow} \overset{i}{\leftarrow}$  si celui-ci existe, et  $\varepsilon$  sinon. Inversement, à toute matrice carrée, on peut associer un graphe de précédence. Pour la même matrice que celle de la Figure 16 (qui était carrée), on obtient le graphe de la Figure 17 (dédit du graphe de transition de la Figure 16 en identifiant les nœuds de numéros égaux modulo 7).

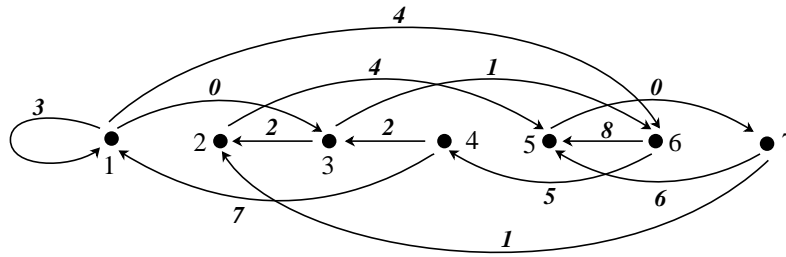


FIGURE 17. Graphe de précédence du graphe de transition de la Figure 16

4.3.2. *Matrice irréductible.* Une matrice carrée est **irréductible** s'il n'est pas possible de la mettre sous une forme bloc-triangulaire, avec des blocs carrés sur la diagonale, par une même permutation de ses lignes et de ses colonnes. Sur le graphe de précédence associé, cette permutation correspond à une renumérotation des nœuds.

**Exercice 24.** Montrer qu'une matrice est irréductible si et seulement si le graphe de précédence associé est fortement connexe.

Son graphe réduit consiste en un nœud unique.

**4.4. Opérations sur les graphes et matrices.**

4.4.1. *Composition parallèle de graphes et addition de matrices.* L'addition de deux matrices  $A$  et  $B$  n'est possible que pour des matrices de mêmes dimensions. Les graphes de transition ou de précédence associés ont donc le même ensemble de nœuds. L'addition  $A \oplus B$  correspond à la **composition parallèle** des graphes : il existera un arc  $\overset{i}{\rightarrow} \overset{j}{\leftarrow}$  de poids  $a_{ji} \oplus b_{ji}$  si et seulement si il existe au moins un tel arc dans l'un des deux graphes initiaux (car  $a_{ij} \oplus \varepsilon = a_{ij}$  et  $a_{ji} \oplus b_{ji} = \varepsilon \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = \varepsilon$ ). Pour le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ , cela revient à retenir le poids maximum pour des arcs parallèles (i.e. ayant les mêmes origine et extrémité). Il peut y avoir un ou plusieurs arcs des graphes de  $A$  et  $B$  qui réalise(nt) ce maximum pour une paire de nœuds donnée. Par contre, si les poids sont pris dans un dioïde non totalement ordonné, il se peut qu'aucun des arcs de  $A$  ou  $B$  ne réalise la borne supérieure des poids des arcs en parallèle.

4.4.2. *Composition séquentielle de graphes et produit de matrices.* Le produit  $A \otimes B$  de deux matrices (selon la définition habituelle, mais avec les opérations  $\oplus$  et  $\otimes$ ) est possible si le nombre de colonnes de  $A$  (soit  $n$ ) est égal au nombre de lignes de  $B$ . Selon la formule du produit matriciel donnant  $(A \otimes B)_{ij}$  (voir Figure 18), cela revient, sur les graphes de transition associés à  $A$  et  $B$ , à composer séquentiellement

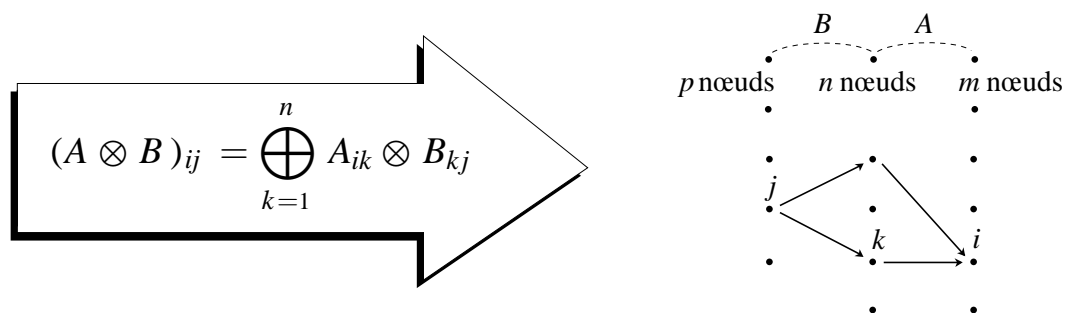


FIGURE 18. Produit matriciel  $A \otimes B$

ces graphes en identifiant les sorties de  $B$  aux entrées de  $A$  (et non pas le contraire!), puis à inventorier tous les chemins parallèles de longueur 2 allant de  $j$  à  $i$ , enfin à garder pour poids du chemin de  $j$  à  $i$  la  $\oplus$ -somme des poids de tous ces chemins de longueur 2 (on rappelle que le poids d'un chemin est égal au  $\otimes$ -produit des poids de ses arcs — voir §4.2).



On observe que pour un chemin quelconque dont un arc le composant serait “absent” (donc de poids égal à  $\varepsilon$ ), le poids du chemin serait aussi égal à  $\varepsilon$  grâce au fait que  $\varepsilon$  est absorbant pour le produit dans un dioïde.

4.4.3. *Poids maximal des chemins de longueur  $\ell$  dans un graphe.* Si le dioïde des poids est  $\mathbb{R}_{\max}$ , pour une matrice carrée  $A$  de dimension  $n \times n$ , l’élément  $(A^\ell)_{ij}$  représente le poids maximal des chemins de longueur  $\ell$  allant de  $j$  à  $i$  dans le graphe de précedence associé. Si on pose

$$A^+ = A \oplus A^2 \oplus \dots, \psi \quad (3)$$

alors  $(A^+)_{ij}$  représente le poids maximal des chemins de n’importe quelle longueur allant de  $j$  à  $i$ .

## 5. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS $x = Ax \oplus b$ DANS UN DIOÏDE

La section suivante nous amènera à rencontrer des équations linéaires qu’il faudra résoudre. Dans un dioïde, l’équation linéaire (en  $x$ ) la plus générale est, du fait de l’absence du signe “moins”, l’équation

$$ax \oplus b = cx \oplus d .$$

**Exercice 25.** Dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , étudier une équation de cette forme et examiner tous les cas possibles (0, 1, plusieurs solutions) en fonction des valeurs des coefficients.

On ne dispose pas de théorie pour étudier et résoudre des équations aussi générales. L’équation que nous rencontrerons est un cas particulier où  $c = e$  et  $d = \varepsilon$ . Pratiquement, nous rencontrerons des systèmes “carrés” d’équations de ce type, que l’on peut réécrire

$$x = Ax \oplus b, \psi \quad (4)$$

où  $x$  et  $b$  sont des vecteurs colonnes de taille  $n$  et  $A$  est une matrice  $n \times n$ . Mais si les coefficients sont dans un dioïde  $\mathcal{D}$ , on peut considérer que cette équation est (un bout d’) une équation dans le dioïde  $\mathcal{D}^{n \times n}$  en complétant les vecteurs  $x$  et  $b$  de façon triviale pour en faire des matrices carrées (pour chaque vecteur, on peut dupliquer  $n$  fois la même colonne, ou bien compléter avec des colonnes égales à  $\varepsilon$ ). On peut donc se contenter d’étudier (4) dans un dioïde abstrait auquel on pensera au choix comme à un dioïde “scalaire” ou “vectoriel”.

En fait, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, et parce que la théorie n’est pas plus compliquée, on va même s’intéresser aux inéquations du type

$$x \succeq Ax \oplus b, \psi \quad (5)$$

On envisage d’abord le cas où  $x, A, b$  sont des éléments d’un dioïde complet (par exemple  $\overline{\mathbb{R}_{\max}}$  ou  $(\overline{\mathbb{R}_{\max}})^{n \times n}$ ). On considère ensuite la situation pratique dans  $\mathbb{R}_{\max}$  ou  $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  qui ne sont pas complets.

**5.1. Cas d’un dioïde complet.** On pose

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A^i \quad (\text{avec } A^0 = e), \psi \quad (6)$$

qui est bien défini dans un dioïde complet. On rappelle (3) et donc

$$A^* = e \oplus A^+, \psi \quad A^+ = AA^*, \psi \quad (7)$$

On rapprochera les expressions (3) et (6) de (1) et (2) respectivement.

**Théorème 26.** La quantité  $A^*b$  est la plus petite solution de (5) et de (4).

*Démonstration.* On montre d'abord que  $A^*b$  est un minorant des solutions de (5) (et donc de (4), ce dernier sous-ensemble étant contenu dans l'autre). En effet, pour toute solution  $x$  de (5), on a

$$x \geq Ax \oplus b \geq A(Ax \oplus b) \oplus b \geq \dots \geq A^k x \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i b, \quad \forall k \geq 0. \quad (8)$$

Donc  $x \geq A^*b$ .

On montre maintenant que  $A^*b$  est une solution de (4) (et donc aussi de (5)). En effet, avec (7),

$$A^*b = (e \oplus A^+)b = b \oplus A(A^*b).$$

■

## 5.2. Cas de dioïdes non complets.

### 5.2.1. Cas de $\mathbb{R}_{\max}$ .

- Si  $A < 0 = e$ , alors  $A^* = e$ , donc  $b$  est solution et c'est l'unique solution comme on peut le voir en développant une suite d'égalités de la même façon que dans (8).
- Si  $A = e$ , il n'y a pas unicité. L'équation  $x = x \oplus b$  admet tout  $x \geq b$  comme solution.
- Si  $A > e$ ,  $A^k \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , et (8) montre que toute solution  $x \geq A^k x$ . Comme  $x = \varepsilon$  n'est solution que pour  $b = \varepsilon$ , dans tous les autres cas, il n'y a pas de solution car  $+\infty \notin \mathbb{R}_{\max}$ .

### 5.2.2. Cas de $(\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ .

- Dans le cas où le graphe de précedence associé à la matrice  $A$  est fortement connexe (i.e. lorsque  $A$  est irréductible), compte tenu de l'interprétation de  $(A^+)_{ij}$  comme le poids maximal des chemins de  $j$  à  $i$  de longueur arbitraire, la discussion précédente s'étend en discutant du signe (au sens habituel) du poids maximum des circuits du graphe de précedence de  $A$ . En effet, il faut bien noter qu'un circuit "maximal" peut toujours être rejoint en partant de n'importe quel nœud  $j$  grâce à la forte connexité, être parcouru un nombre arbitraire de fois, puis être quitté pour rejoindre un nœud  $i$ .
- Dans le cas de deux composantes connexes (voir Figure 19), on peut, modulo une numérotation

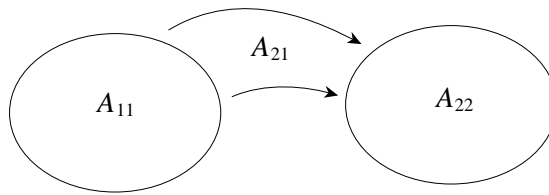


FIGURE 19. Deux composantes connexes

adaptée des nœuds du graphe, décomposer l'équation en deux :

$$x_1 = A_{11}x_1 \oplus b_1, \quad x_2 = A_{22}x_2 \oplus b_2 \oplus A_{21}x_1,$$

où chaque  $A_{ii}$  représente une composante fortement connexe. Le problème se ramène à discuter d'abord la première équation, puis la seconde en y reportant la (ou les) solutions de la première, si elle(s) existe(nt).

On notera que dans un dioïde complet et archimédien, l'élément  $\top$  est la plupart du temps une solution triviale ( $\top = A\top \oplus b$  si  $A \neq \varepsilon$ ). Par conséquent l'unicité est sans espoir, et on remplace cette notion par celle de "plus petite solution" qui singularise une solution "canonique" dont l'intérêt apparaîtra plus loin.

## 6. MISE EN ÉQUATIONS DES GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS TEMPORISÉS

Ce qui précède n'a constitué qu'un ensemble de préliminaires qui nous mettent enfin en mesure d'entrer dans le vif du sujet : la modélisation linéaire des graphes d'événements temporisés. On exposera deux points de vue qui conduisent tous deux à des modèles linéaires, mais dans des dioïdes différents. On reviendra plus tard sur les mérites comparés de ces deux approches.

### 6.1. Dateurs, domaine événementiel et algèbre $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ .

6.1.1. *Forme implicite.* Pour une transition nommée  $x$  par exemple, les activations successives de cette transition reçoivent des numéros successifs  $k$  à partir d'un instant initial<sup>11</sup> où l'on commence à numérotter les événements en partant d'une valeur de  $k$  possiblement négative, mais la même pour toutes les transitions : alors  $x(k)$  désigne la date de l'activation numérotée  $k$  de la transition  $x$ . La fonction  $x(\cdot)$  est appelée **dateur** associé à la transition  $x$ . Les dateurs sont définis sur le *domaine événementiel* car  $k$  est un numéro d'événement.

On considère l'exemple de la Figure 20. Les barres dans les places indiquent les temporisations (en

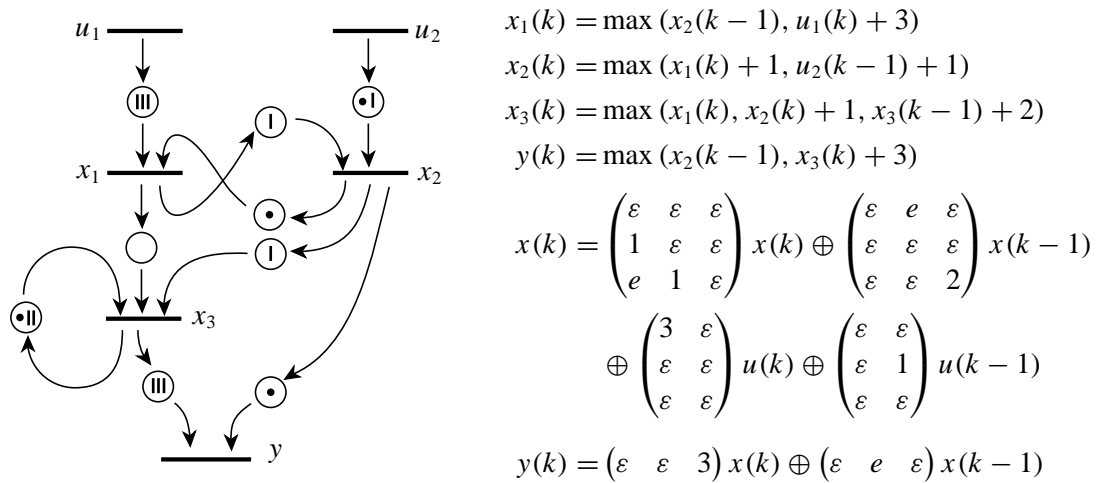


FIGURE 20. Un graphe d'événements temporisé et ses équations "dateurs"

nombre de tops d'horloge par exemple). Dans ces conditions, les dateurs sont à valeurs entières. Les équations sont indiquées sur la figure en notations traditionnelles puis en notation matricielle dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ . Le raisonnement est le suivant, en se concentrant par exemple sur la transition  $x_2$ . L'activation numéro  $k$  de  $x_2$  est conditionnée par

- l'activation numéro  $k$  de  $x_1$  car il n'y a pas de jeton dans la place entre  $x_1$  et  $x_2$  initialement ;
- l'activation numéro  $k - 1$  de  $u_2$  car il y a un jeton dans la place entre  $u_2$  et  $x_2$  initialement (en effet,  $x_2$  peut être activée une fois — si un jeton arrive du côté de  $x_1$  — en consommant le jeton du marquage initial du côté de  $u_2$  ; ensuite, il faut obligatoirement attendre que  $u_2$  soit activée avant de pouvoir assister à d'autres activations de  $x_2$ ).

Par ailleurs, comme un jeton arrivant dans la place entre  $x_1$  et  $x_2$  doit rester au moins une unité de temps dans cette place avant de devenir disponible (même chose entre  $u_2$  et  $x_2$ ), on doit décaler d'*au moins* une unité de temps les activations de  $x_2$  par rapport à celles de  $x_1$  (ou de  $u_2$ ) qui les conditionnent. On peut donc écrire

$$x_2 \geq x_1(k) + 1 \quad \text{et} \quad x_2 \geq u_2(k-1) + 1 \quad \text{soit} \quad x_2 \geq \max(x_1(k) + 1, u_2(k-1) + 1) \quad .$$

L'égalité que nous avons écrite provient du fait que puisqu'aucun autre événement ne conditionne l'activation  $k$  de  $x_2$ , la *date au plus tôt* de cette activation est la plus petite possible, donc elle est

<sup>11</sup>instant du marquage initial du RdP

égale à sa borne inférieure. Mais on peut aussi bien garder à l'esprit pour l'instant l'inégalité plutôt que l'égalité.

**Exercice 27.** En suivant un raisonnement analogue, vérifier les autres équations de la Figure 20 ainsi que l'écriture matricielle.

D'une manière générale, on obtient donc la forme :

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^a A(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B(j)u(k-j) , \quad (9)$$

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^c C(l)x(k-l) \left( \bigoplus_{m=0}^d D(m)u(k-m) \right) , \quad (10)$$

le dernier terme entre parenthèses pouvant résulter de la présence d'arcs directs entre les transitions "sources"  $u_i$  (entrées) et les transitions "puits"  $y_j$  (sorties). On peut aussi garder des inéquations (le premier membre est supérieur ou égal au second membre). L'équation ou inéquation (9) est implicite puisque  $x(k)$  apparaît dans les deux membres. C'est ce qui va être discuté maintenant.

Auparavant, rappelons que les Statisticiens (et avec eux les Automaticiens) appellent "forme ARMA" (pour Auto Regressive-Moving Average — en Français : auto régressif-moyenne mobile) une relation entrée-sortie de la forme

$$z(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^a A(i)z(k-i)}_{\text{AR}} + \underbrace{\sum_{i=1}^b B(i)u(k-i)}_{\text{MA}} .$$

### 6.1.2. Forme ARMA explicite.

**Suppression de la forme implicite.** Le sous-graphe de précedence associé à la matrice  $A(0)$  correspond aux arcs (ou places) entre deux transitions internes (c'est-à-dire qui ne sont ni sources ni puits) nommées  $x_i$ , et dont les places ne portent pas de jetons dans le marquage initial (d'une manière générale,  $A(i)$  correspond au sous-graphe avec  $i$  jetons sur chaque arc). Si le graphe d'événements ne contient aucun circuit sans jeton, le sous-graphe associé à  $A(0)$  est acyclique, le poids maximum des circuits de  $A(0)$  est donc égal à  $\varepsilon = -\infty$  et donc  $(A(0))^*$  existe même dans  $\mathbb{Z}_{\max}$  (voir discussion du §5.2 ; on peut aussi le voir en disant que les chemins de longueur supérieure ou égal à  $n$ ,  $n$  dimension de la matrice, n'existent pas et donc  $(A(0))^i = \varepsilon$  pour tout  $i \geq n$ ).

D'une manière générale, si on s'est placé dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ , alors  $(A(0))^*$  existe toujours, le cas où certains coefficients sont infinis correspondant au cas où certains dateurs seront infinis, donc certains événements seront repoussés "aux calendes grecques", ce qui traduit une situation de "deadlock" partiel ou total.

Dans tous les cas, en appliquant le Théorème 26, on peut passer à la forme ARMA explicite suivante à partir de (9) :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^a \overline{A}(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \overline{B}(j)u(k-j) , \quad (11)$$

avec  $\overline{A}(i) = (A(0))^* A(i)$  et  $\overline{B}(j) = (A(0))^* B(j)$ .

**Justification.** Nous venons de sélectionner la plus petite solution de l'équation ou de l'inéquation (9) en  $x(k)$ . Dans le cas de l'inéquation, on sait que la plus petite solution satisfait aussi l'équation. Ceci se justifie sous les deux hypothèses suivantes :

- le fonctionnement est "au plus tôt", i.e. les transitions sont activées dès que toutes les places amont sont marquées d'un jeton au moins ;
- les conditions initiales sont les plus favorables possibles, i.e. les jetons du marquage initial sont disponibles dès l'instant initial, quel que soit celui-ci (ou bien, à quelque instant que l'on commence la récurrence) ; on admettra donc que les jetons du marquage initial sont disponibles depuis l'instant  $-\infty$ , et on appellera ces conditions "conditions initiales canoniques".

On montrera plus loin comment traiter aussi, sans violer les hypothèses ci-dessus, des conditions initiales non canoniques, c'est-à-dire des cas où à l'instant initial, les jetons dans les places ne sont pas immédiatement disponibles.

**Interprétation et simplifications éventuelles.** Du point de vue du graphe d'événements, on a supprimé toutes les places internes (places situées entre deux transitions internes) sans jeton dans le marquage initial.

Dans l'exemple précédent, on a

$$(A(0))^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e & \varepsilon \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix},$$

et la forme explicite ainsi que le graphe correspondant sont indiqués sur la Figure 21. La forme de la

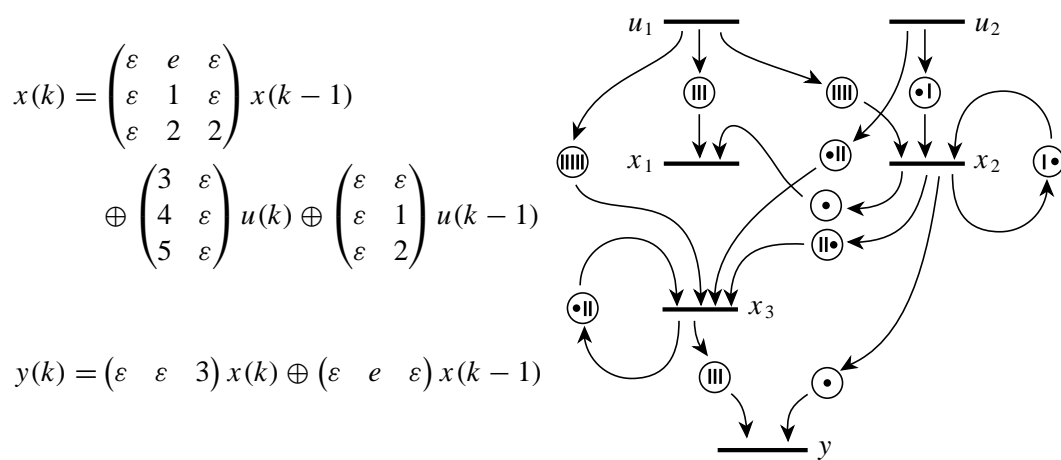


FIGURE 21. Suppression de la partie implicite

Figure 22 correspond à la remarque que  $x_1$  n'intervient ni dans la dynamique de  $x_2$  et  $x_3$ , ni dans l'équation de sortie  $y$ , et est donc inutile et peut être supprimé. Autrement dit, sur le graphe précédent, on note que  $x_1$  est un puits, mais cependant pas une sortie  $y$  à laquelle on est censé s'intéresser.

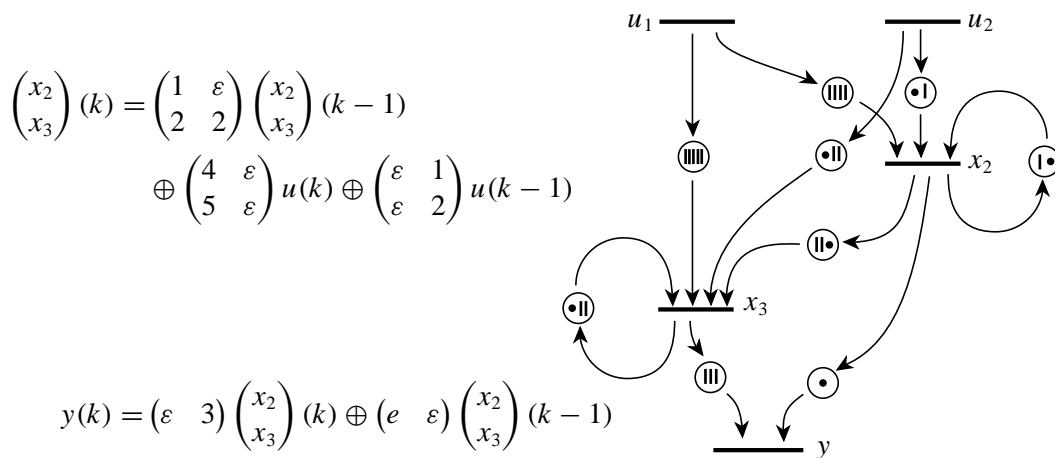


FIGURE 22. Élagage des transitions internes inutiles

6.1.3. *Forme récurrente "markovienne" ou forme d'état.* Il s'agit maintenant de passer à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR (ce qui est déjà réalisé sur l'exemple) et de 0 sur la partie MA, ainsi que sur l'équation de sortie (ce qui n'est pas encore le cas sur l'exemple). Ceci revient à effectuer des manipulations combinatoires tout-à-fait classique en théorie des systèmes, qui passent par une extension du vecteur d'état pour pouvoir se ramener à cette forme "markovienne" ou d'état (i.e. ne dépendant que du passé à un pas en arrière des variables  $x$ ).

**Suppression des retards dans la partie MA de (11) et interprétation.** Considérons pour simplifier une dynamique purement MA, par exemple :

$$x(k) = 1u(k) \oplus 2u(k - 1) \oplus u(k - 2) .$$

On la transforme ainsi :

$$\xi_1(k) = u(k) , \quad \xi_2(k) = \xi_1(k - 1) , \quad x(k) = 1u(k) \oplus 2\xi_1(k - 1) \oplus \xi_2(k - 1) ,$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x \end{pmatrix} (k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x \end{pmatrix} (k - 1) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} u(k) ,$$

ce qui est illustré par la Figure 23.

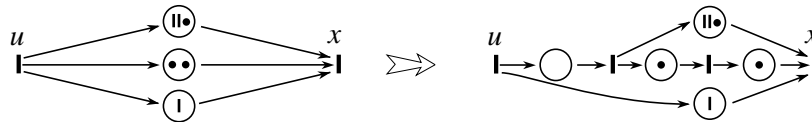


FIGURE 23. Réduction d'une partie MA à une forme d'état

**Réduction des retards dans la partie AR et interprétation.** Considérons une forme purement AR (avec quand même une entrée) :

$$x(k) = x(k - 1) \oplus 1x(k - 2) \oplus 2x(k - 3) \oplus u(k) .$$

On transforme ceci de la façon suivante :

$$\xi_1(k) = \xi_2(k - 1), \quad \xi_2(k) = x(k - 1), \quad x(k) = x(k - 1) \oplus 1\xi_2(k - 1) \oplus 2\xi_1(k - 1) \oplus u(k),$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x \end{pmatrix} (k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x \end{pmatrix} (k - 1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{pmatrix} u(k) ,$$

ce qui est illustré par la Figure 24.

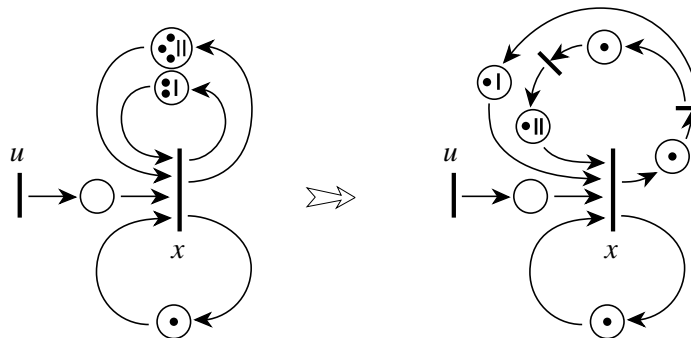


FIGURE 24. Réduction d'une partie AR à une forme d'état

**Suppression des retards dans l'équation de sortie (10).** Si  $a$  (nombre de retards dans la partie AR de (9)), respectivement  $b$  (nombre de retards dans la partie MA de (9)), est supérieur à  $c$  (nombre de retards en  $x$  dans (10)), respectivement  $d$  (nombre de retards en  $u$  dans (10)), alors il n'est plus nécessaire d'introduire de nouvelles variables d'états car on a déjà introduit suffisamment de versions retardées de  $x$ , respectivement  $u$ , dans le nouveau vecteur d'état  $\xi$  par les transformations ci-dessus pour que l'équation (10) puisse s'écrire  $y(k) = \overline{C}\xi(k) \oplus D(0)u(k)$  avec une définition appropriée de  $\overline{C}$ . Sinon, l'introduction de variables d'état supplémentaires sera encore nécessaire.

6.1.4. *Sup-convolution et réponse impulsionnelle.* Moyennant la manipulation d'un vecteur d'état assez grand (encore noté  $x$ ) mais pas nécessairement de taille minimale (problème ouvert), on s'est finalement ramené à une récurrence simple de la forme

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) , \quad y(k) = Cx(k) \oplus Du(k) . \quad (12)$$

En développant cette récurrence, on arrive à la forme

$$y(k) = CA^p x(k-p) \oplus Du(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^i Bu(k-i) , \quad \forall p \geq 1 .$$

Posons

$$h(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour } i < 0 ; \\ CB \oplus D & \text{pour } i = 0 ; \\ CA^i B & \text{pour } i > 0 . \end{cases} \quad (13)$$

Par ailleurs, en adoptant la convention que la première activation de toute transition (après l'instant initial 0) est numérotée 0, et avec les conditions initiales canoniques, on a  $x(j) = \varepsilon$  et  $u(j) = \varepsilon$  pour  $j < 0$ . Dans ces conditions, dès que, pour  $k$  donné,  $p$  est supérieur ou égal à  $k$ , on peut réécrire l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$y(k) = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)u(k-i) . \quad (14)$$

Il s'agit là d'une convolution, mais dans les notations de l'algèbre ordinaire il s'agit plutôt d'une "sup-convolution".

Interprétons la fonction matricielle  $h(\cdot)$  (de dimension  $p \times m$  s'il y a  $m$  entrées et  $p$  sorties). On voit que  $h_{ij}(k)$  est la valeur de la  $i$ -ème sortie à l'instant  $k$  causée par l'entrée

$$u(l) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour } l \neq 0 ; \\ \left( \varepsilon, \dots, \varepsilon, \underbrace{e}_{j\text{-ème position}}, \varepsilon, \dots, \varepsilon \right)' & \text{pour } l = 0 . \end{cases}$$

Cette entrée correspond à disposer d'une infinité de jetons depuis l'instant  $-\infty$  sur toutes les entrées sauf l'entrée  $j$  où une infinité de jetons devient disponible seulement à l'instant 0. On appelle une telle entrée une *impulsion* sur l'entrée  $j$ , et  $h_{ij}(\cdot)$  est la *réponse impulsionnelle* correspondante.

**6.2. Compteurs, domaine temporel et algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ .** En théorie des systèmes, on a plutôt l'habitude de considérer les équations d'évolution dans le *domaine temporel* (i.e. de décrire les systèmes par des fonctions du temps  $t$ ). L'analogie consiste ici à associer à une transition, de nom  $x$  par exemple, la fonction  $t \mapsto x(t)$  qui indique le numéro de la *dernière* activation de cette transition survenue *avant ou à*  $t$ . On appellera cette variable un "compteur" associé à la transition  $x$ .

On garde donc le même nom de variable que pour les dateurs. Seul l'argument  $t$ , au lieu de  $k$ , indique qu'il s'agit d'un compteur.

Le passage d'une description en termes de dateurs (i.e. schématiquement en termes de fonctions  $k \mapsto t(k)$ ) à une description en termes de compteurs (i.e. schématiquement en termes de fonctions  $t \mapsto k(t)$ ) est possible parce que les fonctions dateurs sont monotones non décroissantes. Cependant, comme elles ne sont pas *strictement* croissantes (plusieurs événements peuvent être simultanés), et comme à chaque instant  $t$ , il ne se produit pas nécessairement un événement, la fonction compteur réciproque n'est pas définie de manière unique. La définition ci-dessus n'est pas la seule possible (et mathématiquement, elle n'est pas non plus la plus agréable) : on peut adopter une autre définition des compteurs comme par exemple le numéro du *premier* événement à se produire *à ou après*  $t$ .

Passer aux fonctions réciproques des dateurs est une opération *non linéaire* qui n'a pas de raison de préserver la linéarité des équations. On obtient malgré tout des équations linéaires, mais dans une autre algèbre.

6.2.1. *Forme implicite.* Pour le graphe d'événements de la Figure 20, on obtient les équations suivantes en termes de compteurs :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \min(x_2(t) + 1, u_1(t - 3)) \quad , \\ x_2(t) &= \min(x_1(t - 1), u_2(t - 1) + 1) \quad , \\ x_3(t) &= \min(x_1(t), x_2(t - 1), x_3(t - 2) + 1) \quad , \\ y(t) &= \min(x_2(t) + 1, x_3(t - 3)) \quad . \end{aligned}$$

Le raisonnement est le suivant : la valeur du compteur  $x_2(t)$  dépend de la valeur des compteurs des transitions amont à l'instant  $t - 1$  pour  $x_1$  comme pour  $u_2$ , parce que les jetons doivent rester au moins une unité de temps dans les places correspondantes ; le compteur  $x_2(t)$  ne peut excéder le compteur  $x_1(t - 1)$  parce qu'il n'y a pas de jeton en réserve dans le marquage initial de la place entre ces deux transitions ; par contre,  $x_2(t)$  peut excéder  $u_2(t - 1)$  mais ne peut pas excéder  $u_2(t - 1) + 1$  car il y a un jeton en réserve dans le marquage initial de la place entre ces deux transitions ; finalement  $x_2(t)$  doit être inférieur ou égal à  $x_1(t - 1)$  et à  $u_2(t - 1) + 1$  ; l'égalité au min de ces deux nombres procède d'un raisonnement de "fonctionnement au plus tôt" produisant un "maximum d'événements".

**Exercice 28.** Vérifier les équations pour les autres transitions. Réécrire ces équations sous forme matricielle dans l'algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  en explicitant la valeur des matrices.

Les équations ci-dessus sont de la forme générale

$$x(t) = \bigoplus_{\theta=0}^a A(\theta)x(t - \theta) \oplus \bigoplus_{\tau=0}^b B(\tau)u(t - \tau) \quad , \quad (15)$$

$$y(t) = \bigoplus_{s=0}^c C(s)x(t - s) \left( \bigoplus_{\sigma=0}^d D(\sigma)u(t - \sigma) \right) \quad , \quad (16)$$

où les calculs matriciels s'effectuent dans l'algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  (les termes "nuls"  $\varepsilon$  sont égaux à  $+\infty$ ).

6.2.2. *Forme ARMA explicite.* Le passage à la forme explicite se fait comme précédemment par résolution de la partie implicite en sélectionnant la "plus petite solution" au sens de l'algèbre : comme dans l'algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ , l'ordre est inversé par rapport à l'ordre habituel ( $a = a \oplus b \Leftrightarrow a = \min(a, b)$ ), on sélectionne en fait la plus grande solution  $x(t)$  de l'équation implicite (15). Ceci correspond bien au fonctionnement "au plus tôt" qui produit le "maximum" d'événements à chaque instant.

Par ailleurs, l'existence de  $(A(0))^*$  dans  $\mathbb{Z}_{\min}$  (et non pas dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ), i.e. le fait que certains coefficients de  $(A(0))^*$  ne soient pas égaux à  $-\infty$ , nécessite que la matrice  $A(0)$  n'ait pas de circuit de poids *négatif*, le poids correspondant ici au nombre de jetons rencontrés le long du circuit. Il n'y a pas de risque : le nombre de jetons est un entier non négatif!

Du point de vue de l'interprétation, la suppression de la partie implicite correspond dans le graphe d'événements à une transformation au cours de laquelle les places "internes" (entre deux transitions nommées  $x_i$ ) sans temporisation (sans bâtonnet) sont supprimées.



6.2.3. *Forme récurrente “markovienne” ou forme d’état.* Le procédé est, mutatis mutandis, le même que précédemment. On aboutit à des équations analogues à (12) (avec  $t$  remplaçant  $k$ ). Ces équations correspondent à un graphe d’événements où les places internes ont un et exactement un bâtonnet.

6.2.4. *Inf-convolution et réponse impulsionnelle.* On obtiendra comme précédemment une relation du type (14), mais il s’agit ici d’une “inf-convolution” de l’entrée par la réponse impulsionnelle.

**6.3. Systèmes continus min- ou max-linéaires, analogie avec des graphes d’événements.** L’objet de ce paragraphe est de montrer que les systèmes linéaires dans l’algèbre max-plus ou min-plus ne sont pas nécessairement des systèmes à événements discrets. Certains phénomènes *continus* peuvent faire surgir les mêmes propriétés mathématiques. On se limitera ici à la forme “inf-convolution”.

On considère le système de la Figure 25. En raison de la limitation de débit, on peut écrire

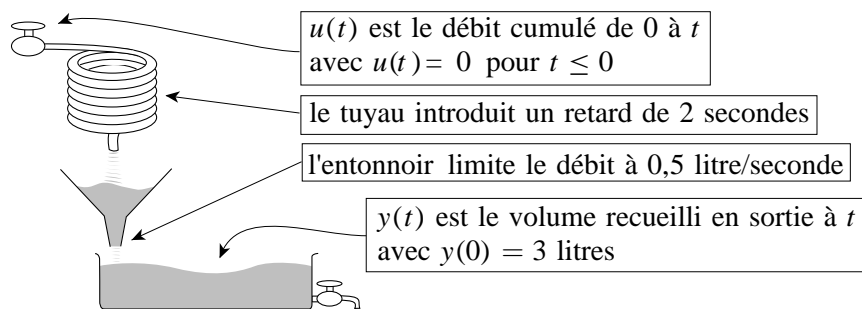


FIGURE 25. Un système min-plus linéaire continu

$$\forall t, \forall s \geq 0, \quad y(t) \leq y(t - s) + 0,5s .$$

En raison du retard et de la condition initiale sur  $y$ , on peut écrire

$$\forall t, \quad y(t) \leq u(t - 2) + 3 .$$

La solution maximale (fonctionnement au plus tôt) de ce système d’équations est

$$y(t) = \inf_{s \geq 0} (u(t - 2 - s) + 3 + 0,5s) = \inf_{\tau \geq 2} (u(t - \tau) + 3 + 0,5(\tau - 2)) ,$$

qui s’écrit encore, en tenant compte du fait que  $u(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ,

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbb{R}} (u(t - \tau) + h(\tau)) ,$$

à condition de poser

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 3 & \text{pour } t \leq 2 ; \\ 3 + 0,5(t - 2) & \text{pour } t > 2 . \end{cases}$$

Remarquer que  $h(\cdot)$  est bien la “réponse impulsionnelle”, c’est-à-dire la sortie obtenue lorsqu’à  $t = 0$ , on introduit une quantité infinie d’eau à l’entrée.

Ce système est un analogue continu du graphe d’événements de la Figure 26. Par exemple, la boucle ne laisse passer qu’un jeton toutes les deux secondes au plus, donc le débit maximal est de 0,5 jeton/seconde.

**Exercice 29.** Pour le RdP de la Figure 26, écrire les équations “compteurs” et la relation d’inf-convolution entrée-sortie. Comparer ces équations à celles du système continu.

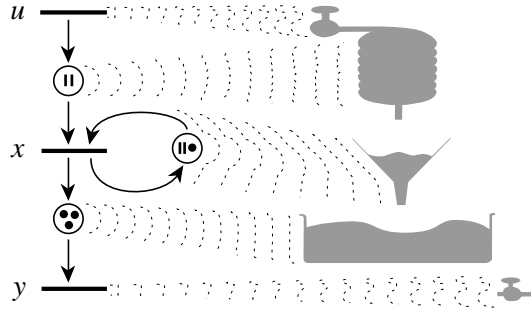


FIGURE 26. Analogie RdP/système continu

7. TRANSFORMÉES EN  $\gamma$  ET  $\delta$  ET MATRICE DE TRANSFERT

**7.1. Transformées en  $\gamma$  et  $\delta$ .** La transformée en  $\gamma$  est l'analogie de la transformée en  $z$  dans la théorie des systèmes classiques, qui elle-même joue pour les systèmes en temps discret le rôle de la transformée de Laplace pour les systèmes en temps continu. De même que la transformée de Laplace transforme les convolutions en produits, de même la transformée en  $\gamma$  va permettre d'écrire les convolutions précédentes comme des produits.

Pour un dateur  $x(\cdot)$ , on introduit la *série formelle*  $X(\gamma)$  ainsi définie :

$$X(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \gamma^k .$$

On peut interpréter  $\gamma$  comme un opérateur appelé "opérateur de retard" (bien qu'en fait la multiplication par  $\gamma$  "pousse le graphe de  $x(\cdot)$  vers la droite"). En effet,

$$\gamma X(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \gamma^{k+1} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k-1) \gamma^k ,$$

ce que l'on traduit très formellement en disant que  $\gamma x(k) = x(k-1)$ .

**Exercice 30.** Montrer que les séries formelles à coefficients dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$  (et à exposants dans  $\mathbb{Z}$ ) constituent un dioïde complet si on les munit de l'addition et de la multiplication habituelle des séries. Ce dioïde est-il archimédien?

À noter que la multiplication revient à une convolution sur les coefficients de la série. En effet,

$$Y(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \Rightarrow y(k) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} h(l)u(k-l) .$$

Nous n'y reviendrons pas avant le §10 mais il est clair que l'on peut introduire de la même façon un "opérateur retard"  $\delta$  pour les compteurs.

**7.2. Matrice de transfert.** Partant des équations (12), on obtient

$$X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (\gamma A)^* BU(\gamma) ,$$

d'où

$$Y(\gamma) = (D \oplus C(\gamma A)^* B) U(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \text{ avec } H(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} D \oplus C(\gamma A)^* B . \quad (17)$$

On note que  $H(\gamma)$ , appelée *matrice de transfert*, n'est rien d'autre que la transformée en  $\gamma$  de la réponse impulsionnelle (13).

**Exercice 31.** Si on se limite au dioïde non complet des séries formelles en  $\gamma$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$  (au lieu de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ ), donner une condition pour que  $(\mathbb{A}(\gamma))^*$  existe lorsque

$$\mathbb{A}(\gamma) = \bigoplus_{i=0}^a A(i) \gamma^i . \quad (18)$$

On peut partir aussi directement des équations (9)–(10) pour opérer la transformation en  $\gamma$ , ou bien encore de (11). Revenant aux équations de l'exemple de la Figure 20 dans leur forme initiale, on a<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}x_1(k) &= x_2(k-1) \oplus 3u_1(k) \Rightarrow X_1 = \gamma X_2 \oplus 3U_1 \\x_2(k) &= 1x_1(k) \oplus 1u_2(k-1) \Rightarrow X_2 = 1X_1 \oplus 1\gamma U_2 \\x_3(k) &= x_1(k) \oplus 1x_2(k) \oplus 2x_3(k-1) \Rightarrow X_3 = X_1 \oplus 1X_2 \oplus 2\gamma X_3 \\y(k) &= x_2(k-1) \oplus 3x_3(k) \Rightarrow Y = \gamma X_2 \oplus 3X_3\end{aligned}$$

Les calculs donnent

$$X_2 = 1\gamma X_2 \oplus 4U_1 \oplus 1\gamma U_2 \Rightarrow X_2 = (1\gamma)^*(4U_1 \oplus 1\gamma U_2) \Rightarrow X_1 = (3 \oplus 4\gamma(1\gamma)^*) U_1 \oplus 1\gamma^2(1\gamma)^* U_2 ,$$

puis

$$\begin{aligned}X_3 &= (3 \oplus 4\gamma(1\gamma)^*) U_1 \oplus 1(1\gamma)^*(4U_1 \oplus 1\gamma U_2) \oplus 2\gamma X_3 \\&= (3 \oplus (1\gamma)^*(4\gamma \oplus 5)) U_1 \oplus 2\gamma(1\gamma)^* U_2 \oplus 2\gamma X_3 \\&= (1\gamma)^*(5U_1 \oplus 2\gamma U_2) \oplus 2\gamma X_3 ,\end{aligned}$$

ce qui se voit en développant le facteur de  $U_1$ . D'où

$$X_3 = (2\gamma)^*(1\gamma)^*(5U_1 \oplus 2\gamma U_2) = (2\gamma)^*(5U_1 \oplus 2\gamma U_2) .$$

La dernière égalité découle du lemme suivant.

**Lemme 32.** Dans un dioïde commutatif,

$$a^*b^* = (a \oplus b)^* .$$

La démonstration est laissée en exercice.

Revenant à notre exemple, on a finalement

$$\begin{aligned}Y &= \gamma(1\gamma)^*(4U_1 \oplus 1\gamma U_2) \oplus 3(2\gamma)^*(5U_1 \oplus 2\gamma U_2) \\&= (4\gamma(1\gamma)^* \oplus 8(2\gamma)^*) U_1 \oplus (1\gamma^2(1\gamma)^* \oplus 5\gamma(2\gamma)^*) U_2 \\&= 8(2\gamma)^* U_1 \oplus 5\gamma(2\gamma)^* U_2 \\&= 5(2\gamma)^*(3U_1 \oplus \gamma U_2) ,\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité étant encore prouvée en développant les facteurs de  $U_1$  et  $U_2$ .

**Exercice 33.** Montrer que cette fonction de transfert est aussi celle du graphe d'événements de la Figure 27.

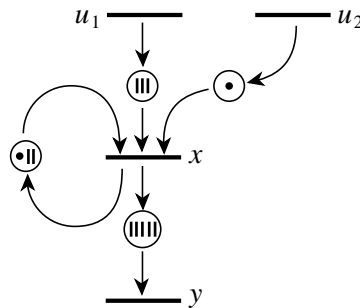


FIGURE 27

Les RdP des Figures 20 et 27 ont donc le même comportement entrée/sortie. Ceci illustre les formidables potentialités de simplification apportées par cette approche algébrique des RdP.

<sup>12</sup>on écrit désormais  $X$  au lieu de  $X(\gamma)$

**7.3. Conditions initiales non canoniques.** L'équivalence entrée/sortie que l'on vient de mentionner entre un graphe d'événements "compliqué" et une version plus simple suppose notre hypothèse sur les conditions initiales exposée au §6.1.2 : pour les deux graphes, on suppose que les jetons du marquage initial sont disponibles depuis  $-\infty$ . Ceci correspond à des conditions initiales "nulles" (au sens du dioïde) et donc aux conditions initiales les plus petites possible (engendrant donc la plus petite solution des équations implicites). Comme dans la théorie des systèmes classique, des conditions initiales non nulles engendrent une relation entrée/sortie qui n'est pas *linéaire* mais *affine*. On va montrer sur un exemple simple comment introduire de telles conditions initiales.

On considère une place  $p$  entre deux transitions  $x_1$  et  $x_2$  (Figure 28a). La fonction de transfert de  $x_1$  à  $x_2$

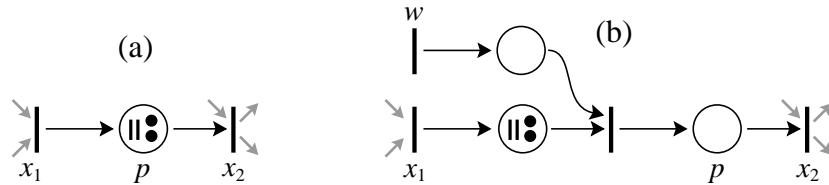


FIGURE 28. Comment imposer des conditions initiales non canoniques

est  $X_2 = 2\gamma^2 X_1$  pour les conditions initiales nulles. Si l'on veut introduire d'autres conditions initiales, on procède comme sur la figure de droite. On introduit une place et une transition fictives en amont de la place  $p$ . Il est clair que par le choix de l'entrée supplémentaire  $w$ , on peut entièrement contrôler la date à laquelle les deux jetons du marquage initial deviennent disponibles dans la place  $p$ . La fonction de transfert de  $x_1$  à  $x_2$  est maintenant  $X_2 = 2\gamma^2 X_1 \oplus W$ . Par exemple, si on veut que le premier jeton (numéroté 0) et le second jeton (numéroté 1) soient disponibles aux instants 1 et 2 respectivement, on posera  $W = 1 \oplus 2\gamma$ .

**7.4. Exemple d'utilisation de la matrice de transfert.** En théorie des systèmes classiques en temps discret, il est d'usage de faire intervenir  $u(k-1)$  plutôt que  $u(k)$  au second membre de l'équation (12) donnant  $x(k)$ . Est-il possible, au prix d'un changement de variable d'état  $x$ , de revenir aussi à cette forme dans le cas de (12)? Pour répondre à cette question, on va supposer que la relation entrée/sortie définie par (12) peut aussi être décrite par

$$\xi(k) = \bar{A}\xi(k-1) \oplus \bar{B}u(k-1) , \quad y(k) = \bar{C}\xi(k) \oplus \bar{D}u(k) , \quad (19)$$

dont la matrice de transfert est

$$\bar{D} \oplus \gamma \bar{C}(\gamma \bar{A})^* \bar{B} .$$

On doit donc réaliser l'égalité de cette série formelle en  $\gamma$  à coefficients matriciels avec la matrice de transfert de (12), à savoir  $D \oplus C(\gamma A)^* B$ . En considérant les premiers termes, on obtient

$$\bar{D} = D \oplus CB , \quad \bar{C}\bar{B} = CAB , \quad \bar{C}\bar{A}\bar{B} = CA^2B , \dots .$$

Ceci est réalisé en prenant

$$\bar{D} = D \oplus CB , \quad \bar{A} = A , \quad \bar{B} = AB , \quad \bar{C} = C .$$

En revenant aux équations (12) et (19), on s'aperçoit qu'une relation possible entre  $x$  et  $\xi$  est  $x(k) = \xi(k) \oplus Bu(k)$ . Mais il n'y avait aucune chance de trouver a priori  $\xi$  en fonction de  $x$  et  $u$  car il aurait fallu disposer du signe "moins".

## 8. VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DES SYSTÈMES AUTONOMES

**8.1. Fermeture de la boucle et système autonome.** Reprenons l'exemple de l'atelier flexible examiné au §3.2.3. On peut considérer que les circuits des machines font partie du modèle interne du système (les machines font partie des ressources recyclables décrites au §3.3 : elles cyclent indéfiniment sur plusieurs types de pièces). Au contraire, les circuits des palettes portant les pièces ont été obtenus en "rebouclant les entrées" (des palettes) sur les sorties (de ces mêmes palettes) car les pièces elles-mêmes sont des ressources non recyclables. Autrement dit, quand une palette sort, une autre est réintroduite dans l'atelier après un certain temps (temps de recyclage). Pour un type de pièces donné, il y aura un certain nombre de palettes en fonction. Le recyclage se traduit par une équation de feedback de la forme

$$u(k) = K(0)y(k) \oplus K(1)y(k-1) \oplus \dots \quad (20)$$

Pour une coordonnée  $u_i$  (un type de pièce  $i$ )<sup>13</sup>, il y a en général un seul terme non égal à  $\varepsilon$  et situé sur la diagonale (la sortie d'une palette portant une pièce de type  $i$  conditionne l'entrée d'une palette *de même type*) : si c'est  $K_{ii}(p_i)$ , l'interprétation de  $K_{ii}(p_i)$  est le temps de recyclage des palettes de type  $i$ , et il y a  $p_i$  palettes identiques prêtes à être recyclées initialement (nombre de jetons du marquage initial dans la place correspondant à l'opération de recyclage des pièces).

Le bouclage du système crée de nouveaux circuits. Il y a un risque de créer ainsi des circuits sans jeton. Ceci ne peut se produire en tout cas que si il existe des  $p_i$  égaux à 0, car dans tous les autres cas, un nouveau circuit empruntant l'arc avec  $p_i$  jetons ( $p_i > 0$ ) ne peut poser de problème. Si  $p_i = 0$ , il faut espérer qu'il existe au moins une autre position dans le circuit de cette palette où le marquage initial n'est pas nul : cela correspondrait à une pièce en cours d'usinage au début du jeu.

Mathématiquement, supposons que les équations décrivant le fonctionnement de l'atelier en boucle ouverte ont déjà été mises sous la forme (12). Cela implique, rappelons le, qu'il y a nécessairement un jeton dans chaque place entre deux transitions internes. En plaçant (20) dans les équations (12) (où on supposera — c'est généralement le cas — que  $D = \varepsilon$ ), on aboutit au système autonome (sans entrée)

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus B(K(0)Cx(k) \oplus K(1)Cx(k-1) \oplus \dots) \quad .$$

La partie implicite provient de la matrice  $BK(0)C$  si cette matrice n'est pas identiquement nulle. Le graphe de transition de cette matrice est la composition séquentielle des graphes de transition de  $C$ ,  $K(0)$  et  $B$  dans cet ordre : on va donc des transitions internes vers les transitions de sortie, puis des transitions de sortie vers les transitions d'entrée *en n'empruntant que des arcs de recyclage marqués d'aucun jeton*, puis des transitions d'entrée vers les transitions internes. Si ce graphe est sans circuit, alors  $(BK(0)C)^*$  existe et on peut éliminer la partie implicite dans l'équation ci-dessus. Ensuite, on réduit le processus auto-régressif à une forme markovienne au prix d'une certaine augmentation de la taille de  $x$  pour aboutir finalement à la forme

$$x(k) = Ax(k-1) \quad , \quad (21)$$

que nous allons étudier maintenant (ici  $x$  et  $A$  ne sont pas les mêmes que dans les équations (12) de départ).

**Exercice 34.** Recommencer cette analyse lorsque  $D \neq \varepsilon$  (indication : on traite le couple  $(x, y)$  comme  $x$  antérieurement).

**8.2. Interprétation du problème de valeur propre et questions.** Supposons qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  et un vecteur propre  $z \neq \varepsilon$  dans l'algèbre considérée ici, i.e.

$$Az = \lambda z \quad . \quad (22)$$

Ceci signifie qu'en partant de la condition initiale  $x(0) = z$ , l'équation récurrente (21) donne  $x(k) = \lambda^k z$ . Dans l'algèbre ordinaire,  $\forall i$  et  $\forall k$ ,  $x_i(k) = z_i + k \times \lambda$  : en toute transition, les événements successifs sont

<sup>13</sup>On a vu que certains types de pièces sont répétés éventuellement plusieurs fois dans la séquence de base pour respecter des ratios de production donnés. Ici ces types  $n$ -pliqués sont traités comme des types distincts.

séparés du même intervalle de temps  $\lambda$  (en particulier, dans un atelier flexible, tous les types de pièces sortent à la même cadence de 1 par  $\lambda$  unités de temps de façon périodique). Plus  $\lambda$  est grand, plus le taux de production est faible.

Les questions qui se posent alors sont les suivantes.

- (1) Une telle paire  $(\lambda, z)$  existe-t-elle?
- (2) Y a-t-il unicité de  $\lambda$  (taux de production) et de  $z$  (forme du régime périodique)?
- (3) En partant de n'importe quelle condition initiale, finit-on par être absorbé par l'un de ces régimes périodiques, et si oui, au bout de combien de temps?

**8.3. Existence de valeur propre/vecteur propre.** On va d'abord montrer quelques résultats conduisant à la caractérisation de la, ou des, valeur(s) propre(s) si elle(s) existe(nt) (cela répondra aussi dans une certaine mesure à la question de l'unicité), puis on prouvera l'existence en exhibant des vecteurs propres associés.

Les résultats sont énoncés et démontrés dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ . On réalisera facilement que ces résultats restent vrais dans d'autres dioïdes, tel que  $\mathbb{Z}_{\max}$  par exemple, mais dans ce dernier cas, on devra chercher  $\lambda$  dans  $\mathbb{Q}$ .

Certains résultats ci-dessous sont vrais que  $\lambda$  soit égal à  $\varepsilon$  ou non. D'autres ne le sont pas dans le cas  $\lambda = \varepsilon$ . On va donc traiter une fois pour toutes, pour l'écartier ensuite, le cas  $\lambda = \varepsilon$ .

### 8.3.1. Cas de la valeur propre nulle.

**Lemme 35.** *Il n'existe de vecteur  $z \neq \varepsilon$  tel que  $Az = \varepsilon$  que si le graphe de précedence associé à  $A$  contient des nœuds puits. Dans ce cas, il y a autant de vecteurs  $z$  indépendants<sup>14</sup> qu'il y a de puits, et chacun d'eux correspond à prendre toutes les coordonnées nulles sauf une qui correspond à un nœud puits.*

*Démonstration.* Si  $Az = \varepsilon$ , alors

$$\left\{ \forall i, \bigoplus_j A_{ij}z_j = \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ \forall i, j, A_{ij}z_j = \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ z_j \neq \varepsilon \Rightarrow A_{ij} = \varepsilon, \forall i \right\}.$$

Ceci montre que si  $z_j$  est non nul, alors  $\sigma(z_j) = \emptyset$  et  $z_j$  est un puits. Il est clair que tout vecteur vérifiant cette propriété peut s'écrire comme somme de vecteurs n'ayant qu'une seule coordonnée non nulle (sur un puits) et que ces derniers vérifient aussi  $Az = \varepsilon$ . ■

### 8.3.2. Caractérisation des valeurs propres.

**Lemme 36.** *Si  $z$  est un vecteur propre, si  $z_i = \varepsilon$ , alors  $z_j = \varepsilon$  pour tout  $j \in \pi^+(i)$ .*

*Démonstration.* En effet, d'après la ligne  $i$  de (22),

$$\{z_i = \varepsilon\} \Rightarrow \{A_{ij}z_j = \varepsilon, \forall j\} \Rightarrow \{z_j = \varepsilon \text{ si } A_{ij} \neq \varepsilon\},$$

i.e.  $z_j \in \pi(i)$ . Le résultat pour  $\pi^+$  est alors démontré de proche en proche. ■

**Corollaire 37.** *Sur une composante connexe du graphe de précedence de  $A$ , tous les  $z_i$  sont nuls ou non nuls simultanément.*

*Démonstration.* En effet, dans une composante connexe donnée, pour tous  $i$  et  $j$ ,  $i \in \pi^+(j)$  et  $j \in \pi^+(i)$ . ■

<sup>14</sup>Bien que nous n'ayons pas traité dans ce cours la question de l'indépendance linéaire des vecteurs, on pourra comprendre ici cette expression en disant qu'aucun vecteur ne peut être obtenu comme combinaison linéaire des autres.

On comprend maintenant comment est fait le graphe “support” d’un vecteur propre  $z$ , c’est-à-dire le sous-graphe sur lequel les coordonnées de  $z$  sont non nulles. On peut se limiter au graphe réduit, puisque chaque composante connexe (représentée par un nœud du graphe réduit) est toute entière dans le support ou non. Sur le graphe réduit, le support ne peut être obtenu qu’en supprimant des nœuds en amont d’un nœud appartenant au support, mais jamais en supprimant des nœuds en aval de ce nœud d’après le Lemme 36 (ou son énoncé contraposé).

**Corollaire 38.** *Si  $A$  est irréductible, aucune coordonnée d’un vecteur propre  $z$  n’est nulle.*

*Démonstration.* On rappelle qu’une matrice irréductible a un graphe de précédence fortement connexe. Comme il n’y a qu’une seule composante connexe, s’il y avait un  $z_i$  égal à  $\varepsilon$ , alors  $z$  tout entier serait égal à  $\varepsilon$ , ce qui ne peut être le cas d’un vecteur propre. ■

**Lemme 39.** *Si  $z$  est un vecteur propre correspondant à une valeur propre non nulle, si  $z_i \neq \varepsilon$ , alors il existe  $j \in \pi(i)$  tel que  $z_j \neq \varepsilon$ .*

*Démonstration.* Ceci est une sorte de réciproque du Lemme 36 qui se démontre de façon tout-à-fait similaire. En effet, d’après la ligne  $i$  de (22),

$$\{z_i \neq \varepsilon\} \Rightarrow \{\exists j : A_{ij}z_j = \lambda z_i\} \Rightarrow \{A_{ij}z_j \neq \varepsilon\} \Rightarrow \{z_j \neq \varepsilon \text{ et } A_{ij} \neq \varepsilon\} ,$$

et donc  $z_j \in \pi(i)$ . ■

**Corollaire 40.** *Si  $\lambda \neq \varepsilon$  et  $z_i \neq \varepsilon$ , alors il existe un circuit dans  $\pi^*(i)$  le long duquel les coordonnées de  $z$  sont toutes différentes de  $\varepsilon$ .*

*Démonstration.* En appliquant le Lemme 39 de proche en proche, on construit “à reculons” à partir d’un  $z_i \neq \varepsilon$  quelconque (il en existe un!), un chemin (inclus dans  $\pi^*(i)$ ) le long duquel tous les  $z_j$  correspondants sont différents de  $\varepsilon$ . Comme ce chemin est de longueur arbitrairement longue, on finit nécessairement par décrire un circuit<sup>15</sup>. ■

**Corollaire 41.** *Toute valeur propre non nulle est le poids moyen d’un circuit.*

*Démonstration.* Dans la construction du circuit de la démonstration du Corollaire 40, on peut toujours choisir le prédécesseur  $j$  d’un nœud  $k$  quelconque du circuit de telle sorte que  $A_{kj}z_j = \lambda z_k$  (<sup>16</sup>). Supposons sans perte de généralité que le circuit construit est  $\overset{1}{\rightsquigarrow} \overset{2}{\rightsquigarrow} \overset{3}{\rightsquigarrow} \dots \overset{p}{\rightsquigarrow} \overset{1}{\rightsquigarrow}$ . Alors

$$A_{21}z_1 = \lambda z_2 , \quad A_{32}z_2 = \lambda z_3 , \quad \dots , \quad A_{1p}z_p = \lambda z_1 ,$$

et aucun des  $z_j$  ci-dessus n’est nul. En multipliant ces  $p$  équations membre à membre entre elles et en simplifiant par  $\otimes z_i$ , on obtient

$$\lambda^p = A_{1p} \otimes \dots \otimes A_{32} \otimes A_{21} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p} (A_{1p} + \dots + A_{32} + A_{21})$$

dans les notations ordinaires. La valeur  $\lambda$  est donc la moyenne (arithmétique dans le cadre de l’algèbre ordinaire, géométrique dans le cadre de  $\mathbb{R}_{\max}$ ) des poids des arcs du circuit. ■

**Lemme 42.** *Toute valeur propre non nulle est supérieure ou égal au poids moyen de tous les circuits des composantes connexes du graphe associé sur lesquelles le vecteur propre correspondant est non nul.*

*Démonstration.* On a vu (Corollaire 37) que sur une composante connexe du graphe, les coordonnées de  $z$  sont toutes nulles ou non nulles simultanément. Sur toute composante connexe où les  $z_i$  sont non nulles et le long de tout circuit de cette composante connexe comportant des arcs génériques  $\overset{i}{\rightsquigarrow} \overset{j}{\rightsquigarrow}$ , on peut enchaîner les inégalités  $A_{ji}z_i \leq \lambda z_j$ ; on multiplie à nouveau ces inégalités entre elles et le résultat est établi. ■

<sup>15</sup>Le nœud  $i$  initial n’appartient pas nécessairement à ce circuit.

<sup>16</sup>il suffit de prendre un  $j$  qui réalise l’arg max dans  $\max_{\ell} (A_{k\ell} + z_{\ell})$

**Théorème 43.** *Pour une matrice irréductible, il ne peut exister qu'une unique valeur propre égale au poids moyen maximum des circuits du graphe.*

*Démonstration.* Il suffit de rassembler les résultats du Lemme 42 et des Corollaires 41 et 38. ■

8.3.3. *Existence d'un vecteur propre associé.*

**Cas d'une matrice  $A$  irréductible.** Jusqu'à maintenant, on s'est efforcé de caractériser les valeurs propres en supposant qu'elles existaient. Il faut maintenant montrer leur existence en exhibant un vecteur propre associé. Pour cela, on va d'abord procéder à une "normalisation" qui consiste à soustraire (au sens habituel) au poids de chaque arc la valeur propre qui est égal, dans le cas irréductible (voir Théorème 43) au poids moyen maximum. Autrement dit, on considère l'équation (22) sous la forme

$$Bz = z \quad \text{avec} \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{-1} A .$$

**Lemme 44.** *Tout circuit du graphe de  $B = \lambda^{-1} A$  est de poids inférieur ou égal à  $e = 0$ .*

*Démonstration.* Considérons un circuit de  $B$ , par exemple  $\overset{1}{\curvearrowright} \dots \overset{p-1}{\curvearrowright} \overset{p}{\curvearrowright} \overset{1}{\curvearrowright}$  de poids

$$B_{1p} \otimes B_{p,p-1} \otimes \dots \otimes B_{21} = \lambda^{-p} \otimes A_{1p} \otimes A_{p,p-1} \otimes \dots \otimes A_{21} .$$

Compte tenu de la valeur de  $\lambda$ , cette expression est inférieure ou égale à 0. ■

**Lemme 45.** *Si  $i$  appartient à un circuit de poids maximal  $e$  de  $B$ , alors  $(B^+)_{ii} = e$ .*

*Démonstration.* Cela résulte d'une part de l'interprétation de  $(B^+)_{ii}$  comme poids maximum des chemins de longueur quelconque allant de  $i$  à  $i$  (donc des circuits), d'autre part du fait que pour  $B$  tous les circuits sont de poids inférieur ou égal à  $e$ , et qu'il y a justement un circuit de longueur  $e$  passant par  $i$ . ■

**Théorème 46.** *Si  $i$  appartient à un circuit de poids maximal  $e$  de  $B$ , la colonne  $(B^+)_{.i}$  est un vecteur propre de  $A$ .*

*Démonstration.* En effet, comme  $B^* = e \oplus B^+$  ( $e$  matrice identité), les colonnes correspondantes de  $B^*$  et  $B^+$  ne diffèrent en général que par l'élément diagonal. Mais si  $(B^+)_{ii} = e$  alors  $(B^*)_{ii} = e \oplus (B^+)_{ii} = (B^+)_{ii}$  et donc  $(B^*)_{.i} = (B^+)_{.i}$ .

Par ailleurs, comme  $B^+ = BB^*$ , cela se traduit pour une colonne  $i$  quelconque par  $(B^+)_{.i} = B(B^*)_{.i}$  mais si  $i$  est tel que  $(B^*)_{.i} = (B^+)_{.i}$ , alors  $(B^+)_{.i} = B(B^+)_{.i}$ , ce qui traduit le fait que  $(B^+)_{.i}$  est vecteur propre de  $B$  pour la valeur propre  $e$ , donc de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ . ■

**Cas d'une matrice non irréductible.** On ne cherchera pas ici à traiter du cas général mais seulement à donner une idée de ce qui se passe dans le cas de deux composantes fortement connexes. Moyennant une renumérotation des nœud du graphe, on peut mettre  $A$  sous forme bloc-triangulaire (voir aussi Figure 19). L'équation (22) se réécrit alors par blocs sous la forme

$$A_{11}z_1 = \lambda z_1 \quad , \quad A_{21}z_1 \oplus A_{22}z_2 = \lambda z_2 \quad . \quad (23)$$

Par ailleurs, on notera  $\bar{\lambda}_1$ , resp.  $\bar{\lambda}_2$ , la valeur propre (unique) de la matrice irréductible  $A_{11}$ , resp.  $A_{22}$ , et  $\bar{z}_1$ , resp.  $\bar{z}_2$ , un vecteur propre associé.

**Lemme 47.** *La valeur propre  $\bar{\lambda}_2$  de  $A_{22}$  est toujours valeur propre de  $A$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'observer que dans les équations (23), le vecteur  $(\varepsilon, \bar{z}_2)$  (en colonne) convient toujours comme vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\bar{\lambda}_2$ . ■

**Lemme 48.** *La valeur propre  $\bar{\lambda}_1$  de  $\bar{A}_{11}$  est valeur propre de  $A$  si  $\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2$ .*



*Démonstration.* Remarquons d’abord que d’après le Corollaire 41, une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  ne peut être égale qu’à  $\bar{\lambda}_1$  ou  $\bar{\lambda}_2$ . Si  $(z_1, z_2)$  (en colonne) est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\bar{\lambda}_1$ , alors on voit que  $z_1$  est un vecteur propre de  $A_{11}$  (on le notera donc  $\bar{z}_1$ ). Quant à  $z_2$ , il doit être solution de

$$z_2 = \bar{\lambda}_1^{-1} (A_{22}z_2 \oplus A_{21}\bar{z}_1) ,$$

$\bar{z}_1$  étant donné. La plus petite solution de cette équation implicite en  $z_2$  fait intervenir la matrice  $(\bar{\lambda}_1^{-1}A_{22})^*$ . Celle-ci “explose” si  $\bar{\lambda}_1^{-1}A_{22}$  comporte des circuits de poids positif (et tous ses éléments explosent car elle est irréductible), c’est-à-dire précisément si  $\bar{\lambda}_1$  n’est pas supérieure ou égal au plus grand poids moyen des circuits dans  $A_{22}$ , poids moyen qui est précisément égal à  $\bar{\lambda}_2$  : alors la plus petite solution de l’équation en  $z_2$  est infinie. Dans le cas contraire, au moins une solution  $z_2$  peut être exhibée, venant compléter tout vecteur propre  $\bar{z}_1$  de  $A_{11}$  pour former un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\bar{\lambda}_1$ . ■

En résumé,

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 & \Rightarrow \text{une seule valeur propre } \bar{\lambda}_2 \text{ pour } A ; \\ \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 & \Rightarrow \text{une valeur propre } \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 \text{ pour } A ; \\ \bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 & \Rightarrow \text{deux valeurs propres } \bar{\lambda}_1 \text{ et } \bar{\lambda}_2 \text{ pour } A . \end{cases}$$

Une interprétation de ce résultat en termes concrets est la suivante. Les deux composantes connexes représentent deux ateliers. Celui de l’amont alimente celui de l’aval. Le fonctionnement indépendant des deux ateliers est caractérisé par leur débit  $1/\bar{\lambda}_i$  (car  $\bar{\lambda}_i$  représente le temps séparant deux sorties successives de produits en fonctionnement périodique établi). Si l’atelier aval est le plus lent ( $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2$ ), la seule vitesse compatible pour l’ensemble est cette vitesse la plus lente. Si l’atelier amont est le plus lent, la vitesse  $1/\bar{\lambda}_1$  est compatible avec le fonctionnement d’ensemble. Mais on a dit que  $\bar{\lambda}_2$  est aussi valeur propre pour le vecteur propre (en colonne)  $(\varepsilon, \bar{z}_2)$ . Ce  $\varepsilon$  s’interprète comme suit : l’atelier amont a accumulé un stock infini en amont de l’atelier aval (car  $\varepsilon$  représente l’entrée *la moins contraignante* pour l’atelier aval) en fonctionnant “à l’avance” : dans ces conditions (un peu artificielles!), la vitesse  $1/\bar{\lambda}_2$  devient compatible avec le fonctionnement d’ensemble.

**8.4. Structure de l’ensemble des vecteurs propres.** On se limitera à nouveau ici à une matrice  $A$  irréductible, bien que certains des résultats s’appliquent aussi au cas non irréductible, à condition de se limiter à la plus grande valeur propre. On travaillera à nouveau avec la matrice normalisée  $B = \lambda^{-1}A$  dont tous les circuits sont de poids inférieur ou égal à  $e$ .

8.4.1. *Graphe critique.* Il s’agit du sous-graphe de  $B$  composé des nœuds et des arcs qui appartiennent à au moins un circuit de poids égal à  $e$ , c’est-à-dire, en revenant aux poids de la matrice  $A$  originale, à un circuit réalisant le maximum des poids moyens (circuit dit “critique”).

**Lemme 49.** *Tout circuit du graphe critique est critique.*

*Démonstration.* Considérons un circuit du graphe critique, par exemple  $\overset{i}{\rightarrow} \overset{j}{\rightarrow} \overset{j}{\rightarrow} \overset{k}{\rightarrow} \overset{k}{\rightarrow} \overset{k}{\rightarrow} \overset{i}{\rightarrow}$  sur la Figure 29. Tout

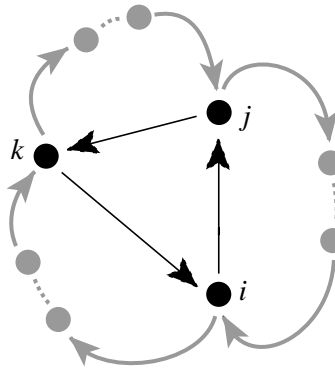


FIGURE 29. Un graphe critique

arc de ce circuit appartient à un circuit critique et on a représenté en gris le reste de ces circuits critiques (dont on se souviendra que le poids total est  $e$ ). Alors, ou bien le circuit noir est de poids supérieur à  $e$ , mais ceci est impossible, ou bien il est inférieur à  $e$ , mais dans ce cas c'est le circuit constitué par tous les arcs gris qui serait de poids supérieur à  $e$  — la somme (au sens ordinaire) valant  $e$  — ce qui est tout aussi impossible, donc le poids du circuit noir est exactement  $e$ . ■

On notera que, bien que l'on ait supposé le graphe initial fortement connexe (matrice  $A$  irréductible), le graphe critique n'a pas de raison d'être fortement connexe.

8.4.2. *Dépendance et indépendance linéaire des vecteurs propres.* On a vu précédemment que si  $i$  est un nœud du graphe critique, alors la colonne  $(B^+)_{\cdot i}$  est un vecteur propre.

**Lemme 50.** *Si  $i$  et  $j$  appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, alors  $(B^+)_{\cdot i}$  et  $(B^+)_{\cdot j}$  sont "proportionnels".*

*Démonstration.* Si  $i$  et  $j$  sont dans la même composante fortement connexe du graphe critique, alors un circuit du graphe critique passe par  $i$  et  $j$  et ce circuit est critique. Donc  $(B^+)_{ij} (B^+)_{ji} = e$ . Par ailleurs, comme d'une manière générale  $B^+ B^+ = B^2 \oplus B^3 \oplus \dots \leq B^+$ , pour tout  $k$ ,

$$(B^+)_{kj} (B^+)_{ji} \leq (B^+)_{ki} = (B^+)_{ki} \underbrace{(B^+)_{ij} (B^+)_{ji}}_e = \underbrace{(B^+)_{ki} (B^+)_{ij}}_{B^+ B^+ \leq B^+} (B^+)_{ji} \leq (B^+)_{kj} (B^+)_{ji} ,$$

et l'égalité des termes extrêmes implique l'égalité des deux premiers termes, vraie pour tout  $k$ , et donc les vecteurs colonnes  $(B^+)_{\cdot j}$  et  $(B^+)_{\cdot i}$  sont proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant  $(B^+)_{ji}$ . ■

On peut montrer le résultat réciproque : si deux colonnes de  $B^+$  correspondent à des nœuds du graphe critique n'appartenant pas à la même composante fortement connexe de ce graphe, elles ne sont pas proportionnelles. Nous nous contenterons ici de l'exemple de la Figure 30. Comme ici  $B^2 = B$ , alors

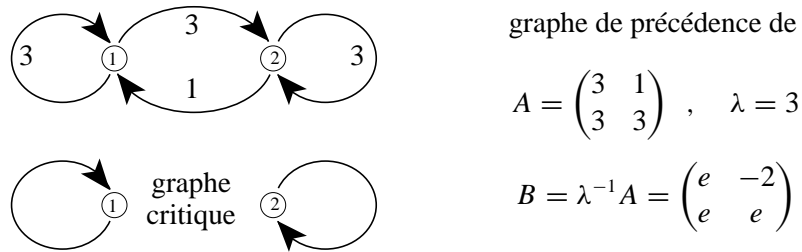


FIGURE 30

$B^+ = B$  et les deux colonnes de  $B$  sont des vecteurs propres car les nœuds 1 et 2 sont chacun sur un circuit critique (d'ailleurs  $B^2 = B$  exprime justement que les deux colonnes de  $B$  sont des vecteurs propres pour la valeur propre  $e$ ). Il est clair que ces deux colonnes ne sont pas proportionnelles.

**Lemme 51.** *Tout vecteur propre est une combinaison linéaire de colonnes de  $B^+$  correspondant à des nœuds du graphe critique.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que d'après le Lemme 50, il suffit de garder dans la combinaison linéaire un seul nœud par composante fortement connexe du graphe critique effectivement représentée. Pour prouver le résultat ci-dessus, on observe d'abord que si  $z$  est vecteur propre de  $B$  pour la valeur propre  $e$ , on voit très simplement qu'il est aussi vecteur propre de  $B^+$  pour cette valeur propre, et donc  $z = B^+ z$ , ce qui montre que  $z$  est effectivement combinaison linéaire des colonnes de  $B^+$ . Il s'agit ensuite de montrer qu'on peut se limiter à des colonnes indicées par des nœuds du graphe critique. Nous admettrons ce résultat. ■

En conclusion, pour une matrice irréductible, on peut dire que les vecteurs propres sont tous engendrés par des combinaisons linéaires de vecteurs en nombre égal au nombre de composantes fortement connexes du graphe critique<sup>17</sup>.

## 8.5. Itérées $A^k$ d'une matrice irréductible. Périodicité de la réponse impulsionnelle.

8.5.1. *Convergence de  $A^k$  et cyclicité.* On se restreint à nouveau au cas d'une matrice irréductible de valeur propre unique  $\lambda$ . Si on part, pour l'équation (21), d'une condition initiale  $x(0)$  égale à un vecteur propre  $z$ , on est immédiatement dans un régime "périodique" :  $x(k) = \lambda^k x(0)$ , i.e., avec l'arithmétique traditionnelle,  $\forall i, x_i(k) = x_i(0) + k\lambda$ . Mais que se passe-t-il si on part d'une condition initiale quelconque? On va énoncer (sans démonstration) un résultat qui montre que, après un régime transitoire, on entre à nouveau dans un régime "périodique" (non unique mais de cadence moyenne toujours définie par  $\lambda$ ). Ceci découle du fait que  $x(k) = A^k x(0)$  et du résultat suivant sur  $A^k$ , énoncé sans démonstration (voir [4]).

**Théorème 52.** *Pour une matrice irréductible  $A$  de valeur propre  $\lambda$ , il existe deux entiers  $K$  et  $c$  tels que*

$$\forall k \geq K, \quad A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k.$$

L'entier  $c$  est appelé *cyclicité* de  $A$ . On va donner une formule permettant de l'évaluer. Auparavant, on notera que, dans l'arithmétique traditionnelle, la propriété ci-dessus signifie que, après un régime transitoire de longueur  $K$ , le régime devient "périodique" en ce sens que

$$\forall i, \quad x_i(k+c) = x_i(k) + c\lambda.$$

On a donc toujours en moyenne un événement toutes les  $\lambda$  unités de temps, mais la moyenne ne s'établit qu'en observant des paquets de  $c$  événements consécutifs.

Du point de vue mathématique, lorsque le régime transitoire est terminé, il est clair que chaque  $x(k)$  est devenu un vecteur propre de  $A^c$  pour la valeur propre  $\lambda^c$ . On notera que  $A^c$  n'est pas forcément irréductible, même si  $A$  l'est. Des résultats plus précis sur les projecteurs spectraux sont disponibles (façon dont toute condition initiale  $x(0)$  est attirée par un certain régime périodique).

Le calcul de  $c$  se fait de la façon suivante. On considère le graphe critique de  $A$ . Dans chacune de ses composantes fortement connexes, on considère le p.g.c.d. des longueurs des circuits (tous critiques). La cyclicité  $c$  est égale au p.p.c.m. de tous ces nombres (un par composante).

**Exercice 53.** Pour la matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ e & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix},$$

dessiner le graphe, évaluer  $\lambda$ , dessiner le graphe critique, évaluer  $c$ , vérifier la périodicité de  $A^k$ , trouver les vecteurs propres indépendants.

8.5.2. *À propos du régime transitoire.* En ce qui concerne la longueur du transitoire déterminée par  $K$ , il n'est pas possible de donner une estimation. Même pour un très petit système, le transitoire peut être arbitrairement long. Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} -\eta & -1 \\ e & e \end{pmatrix}$$

<sup>17</sup>On évite de parler de "dimension" du sous-espace propre, ou d'"indépendance linéaire" de vecteurs dans la mesure où ces questions n'ont pas été abordées ici.

où  $\eta$  est un très petit nombre positif (ce qui signifie que  $e$  est valeur propre, la boucle  $\xrightarrow{2,2}$  étant le circuit critique, mais la boucle  $\xrightarrow{1,1}$  est “presque critique”). On a  $c = 1$  (le graphe critique est réduit à une boucle) et on doit donc avoir  $A^{k+1} = A^k$  après un transitoire. On montre facilement que

$$\begin{pmatrix} -\eta & -1 \\ e & e \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \max(-n\eta, -1) & -1 \\ e & e \end{pmatrix},$$

le second membre étant écrit dans l’arithmétique ordinaire. On voit que le régime stationnaire est atteint quand  $-n\eta \leq -1$ , i.e.  $n \geq 1/\eta$  qui est d’autant plus grand que  $\eta$  est proche de  $e = 0$ .

Cet exemple pathologique suggère qu’une simulation sur ordinateur d’un système à événements discrets peut mettre un temps arbitrairement long à fournir des évaluations correctes du taux de production alors que le calcul algébrique fournissant le même renseignement peut être très simple.

Cette situation n’est finalement pas très différente de celle des systèmes linéaires continus. Considérons un système dynamique linéaire décrit par un système différentiel ordinaire  $dx(t)/dt = Ax(t)$  de dimension 2 et supposons que  $A$  ait deux valeurs propres réelles négatives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Toute solution est de la forme  $\exp(\lambda_1 t)x_1 + \exp(\lambda_2 t)x_2$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les composantes de la condition initiale sur les sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres. Si  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ , au bout d’un temps très court, on ne verra plus que le “mode” associé à  $\lambda_1$  (sauf le cas — numériquement instable — où  $x_1 = 0$ ). Par contre, si  $\lambda_2$  est très proche de  $\lambda_1$ , les deux modes propres superposés resteront visibles assez longtemps.

**8.5.3. Périodicité de la réponse impulsionnelle.** On a vu par l’équation (13) que  $CA^iB$  est le terme général de la réponse impulsionnelle dès que  $i > 0$ , ou si l’on préfère le coefficient de  $\gamma^i$  dans l’expression de la matrice de transfert (voir (17)). Le Théorème 52 montre que la réponse impulsionnelle d’un système dont la matrice  $A$  est irréductible<sup>18</sup> a également un comportement “périodique” au delà d’un transitoire. Cependant, comme le montre l’exercice suivant, si la représentation interne n’est pas “minimale”, il se peut que la cyclicité constatée sur la réponse impulsionnelle soit inférieure à celle apparaissant sur la matrice  $A$ .

**Exercice 54.** Écrire les équations en dateurs pour le RdP de la Figure 31. Montrer que la matrice  $A$

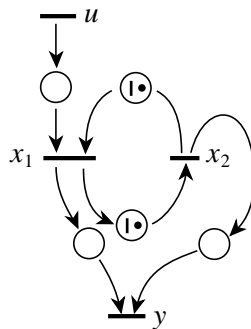


FIGURE 31

obtenue est de cyclicité 2. Calculer la fonction de transfert. Montrer que la cyclicité qui apparaît sur cette fonction de transfert est égale à 1. Dessiner un RdP plus simple qui a la même fonction de transfert.

**8.6. À propos des algorithmes de calcul de valeurs propres.** Nous ne faisons ici qu’évoquer cette question. Le calcul du poids moyen maximum (en fait, minimum) d’un circuit a été considéré par R.M. Karp<sup>19</sup> qui propose un algorithme efficace. D’autres possibilités découlent de certaines propriétés rencontrées précédemment. La première consiste tout simplement à énumérer les circuits du graphe et à calculer leur poids moyen. Ceci n’est évidemment praticable que pour des petits graphes. Le calcul des puissances successives de la matrice associée jusqu’à apparition de la cyclicité est une autre possibilité.

<sup>18</sup>on verra plus loin que cette propriété peut être vue comme une notion de “stabilité”

<sup>19</sup>Richard M. Karp. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23:309–311, 1978.

Également, le calcul de la matrice de transfert et son développement en  $\gamma$  fait aussi apparaître la propriété de cyclicité, et donc permet l'évaluation de la valeur propre.

Pour les vecteurs propres, on a vu qu'ils sont donnés par certaines colonnes de  $(\lambda^{-1}A)^+$  (celles où l'élément diagonal vaut  $e$ ). Dans le calcul de cette matrice, on peut s'arrêter à la puissance  $n - 1$  de  $\lambda^{-1}A$  ( $A$  étant une matrice  $n \times n$ ), car, au delà, les chemins sont de longueur supérieure ou égal à  $n$ , ils comportent donc obligatoirement des circuits, tous de poids inférieur ou égal à  $e$ , et donc dont le poids ne peut plus augmenter par rapport à des chemins de longueur inférieure.

Une façon efficace de calculer  $B^*$  pour une matrice  $B$  donnée est de prendre les carrés successifs de  $(e \oplus B)$  : au bout de  $k$  fois, on a calculé

$$(e \oplus B)^{2^k} = e \oplus B \oplus \dots \oplus B^{2^k} .$$

On a vu que dans le cas qui nous intéresse, il suffit que  $2^k \leq n - 1$  donc  $k$  est de l'ordre de  $\log(n)$ .

**8.7. Valeurs propres généralisées.** Nous avons étudié des systèmes autonomes obtenus par rebouclage de l'entrée sur la sortie. On a vu qu'en partant d'un graphe d'événements quelconque, on obtient d'abord un système dynamique de la forme (9)–(10) que l'on transforme, après un certain nombre de manipulations, en la forme (12). L'introduction d'un feedback de la forme (20) oblige encore à des manipulations pour revenir à la forme (21) caractérisée par un retard unitaire, ce qui veut dire que le RdP correspondant est tel que toute place comporte un et un seul jeton. Les places jouant le rôle des arcs, on peut dire que les poids moyens des circuits sont obtenus en divisant la somme (au sens habituel), le long de ces circuits, des temporisations dans les places (qui jouent le rôle des poids des arcs) par le nombre total de jetons le long de ces mêmes circuits. On va voir qu'en effet, pour un graphe d'événements plus général comportant de 0 à  $a$  jetons par place, ce qu'il faut utiliser au dénominateur de la fraction donnant le poids moyen des circuits, c'est bien le nombre total de jetons, et non pas le nombre d'arcs, de ces circuits.

On considère donc encore un graphe d'événements modélisant un système dynamique autonome (obtenu par bouclage des transitions d'entrée sur les transitions de sortie<sup>20</sup>) qui conduit aux équations générales

$$x(k) = A(0)x(k) \oplus A(1)x(k-1) \oplus \dots \oplus A(a)x(k-a) . \quad (24)$$

On suppose que  $A(0)$  ne contient pas de circuit afin qu'il y ait existence et unicité de la solution de (24) dans  $\mathbb{R}_{\max}^n$ . On peut donc d'abord se ramener à la forme explicite

$$x(k) = (A(0))^* (A(1)x(k-1) \oplus \dots \oplus A(a)x(k-a)) , \quad (25)$$

puis à la forme markovienne

$$\xi(k) = \bar{A}\xi(k-1) \quad (26)$$

(cf. (21)) avec

$$\xi(k) = \begin{pmatrix} x(k-a+1) \\ x(k-a+2) \\ \vdots \\ x(k) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & e \\ (A(0))^*A(a) & \dots & \dots & \dots & (A(0))^*A(1) \end{pmatrix} .$$

Pour une matrice polynômiale  $\mathfrak{A}(\gamma)$  (voir (18)), la **valeur propre généralisée** est un nombre  $\lambda$  (différent de  $\varepsilon$  et  $+\infty$ ) tel qu'il existe un vecteur  $z$  non trivial (non identique à  $\varepsilon$  ou à  $+\infty$ ), appelé **vecteur propre généralisé** qui soit solution de l'équation

$$z = \mathfrak{A}(\lambda^{-1})z . \quad (27)$$

<sup>20</sup>le graphe ne comporte plus alors de source ni de puits

Ici,  $\lambda^{-1}$  doit être compris au sens du dioïde, c'est-à-dire que c'est  $-\lambda$  en notations habituelles. Autrement dit,  $z$  est vecteur propre de  $\mathbb{A}(\lambda^{-1})$  pour la valeur propre  $e$ .

**Théorème 55.** *Il est équivalent de dire que*

- (1)  $\lambda$  est valeur propre généralisée de la matrice polynômiale associée à (24) ;
- (2)  $\lambda$  est valeur propre généralisée de la matrice polynômiale associée à (25) ;
- (3)  $\lambda$  est valeur propre généralisée de la matrice polynômiale associée à (26) ;
- (4)  $\lambda$  est valeur propre ordinaire de la matrice  $\bar{A}$ .

*Démonstration.* L'équivalence de (3) et (4) est évidente. Celle de (1) et (2) l'est aussi compte tenu de l'hypothèse faite sur  $A(0)$ . Montrons l'équivalence de (2) et (4). Si  $\zeta$  est vecteur propre de  $\bar{A}$  pour la valeur propre  $\lambda$ , d'après la forme de la matrice  $\bar{A}$  et en partitionnant  $\zeta$  en sous-vecteurs de façon consistante avec la partition de  $\bar{A}$  en blocs, on voit facilement, en exploitant les  $a - 1$  premières équations par blocs, que  $\zeta_i = \lambda^{i-a} \zeta_a$ ,  $i = 1, \dots, a - 1$ . Alors, en posant  $z = \zeta_a$ , on arrive avec la dernière équation par blocs, à la conclusion (2). Réciproquement, partant de (2) et posant  $\zeta_a = z$  et  $\zeta_i = \lambda^{i-a} \zeta_a$ ,  $i = 1, \dots, a - 1$ , on montre facilement (4). ■

Considérons maintenant (27) qui signifie que  $e$  est valeur propre au sens habituel de la matrice "numérique"  $\mathbb{A}(\lambda^{-1})$ . Alors  $e = 0$  est le poids moyen d'un circuit du graphe de précedence associé à cette matrice, et donc ce circuit est aussi de poids 0. Supposons, sans perte de généralité, que ce circuit est  $\xrightarrow{1\ 2} \dots \xrightarrow{p-1\ p} \xrightarrow{p\ 1}$ . Pour tout arc  $\xrightarrow{j\ j+1}$ , il existe au moins un entier  $i(j)$  tel que

$$(\mathbb{A}(\lambda^{-1}))_{j+1,j} = \lambda^{-i(j)} (A(i(j)))_{j+1,j} .$$

Le poids du circuit est donc (avec la convention  $p + 1 \sim 1$ )

$$e = 0 = \bigotimes_{j=1}^p \lambda^{-i(j)} (A(i(j)))_{j+1,j} = \sum_{j=1}^p (A(i(j)))_{j+1,j} - \left( \sum_{j=1}^p i(j) \right) \times \lambda ,$$

et donc

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^p (A(i(j)))_{j+1,j}}{\sum_{j=1}^p i(j)} .$$

Au numérateur, on a la somme (au sens habituel) des temporisations sur les arcs du circuit, et au dénominateur, il s'agit de la somme des jetons sur ces mêmes arcs dans la mesure où la matrice  $A(i)$  représente la partie du graphe d'événements constituée des arcs portant  $i$  jetons exactement. C'est donc cette règle qui sera appliquée à l'avenir pour un graphe d'événements avec un marquage initial quelconque.

## 9. STABILISATION PAR FEEDBACK ET OPTIMISATION DE RESSOURCES

**9.1. Stabilisation par feedback.** La notion de *stabilité* d'un système récurrent comme (25) ou (21) ne peut correspondre, comme en théorie des systèmes classiques, au fait que "la sortie tend vers zéro", puisque les trajectoires sont monotones non décroissantes. Une notion appropriée de stabilité est que toutes les transitions du graphe d'événements "marchent en moyenne à la même vitesse" après un transitoire, ce qui évite par exemple l'accumulation de produits à l'intérieur d'un atelier flexible. Une condition suffisante pour qu'une telle propriété soit réalisée est que le graphe correspondant soit fortement connexe, puisqu'alors il y a unicité de la valeur propre qui fixe la vitesse moyenne de toutes les transitions.

Un graphe d'événements se présente d'abord "en boucle ouverte" : les entrées sont les transitions-source où il faut amener les jetons de l'extérieur (les matières premières, les pièces à usiner, les palettes portant ces pièces, etc.) ; les sorties sont les transitions-puits (la sortie des pièces usinées, etc.). Les circuits internes de ce système en boucle ouverte correspondent, comme on l'a vu, à des ressources "recyclables" (les machines par exemple).

Pour essayer d'obtenir un graphe fortement connexe, donc un système stable, on reboucle les entrées sur les sorties (on n'introduit de nouvelles pièces, ou on recycle des palettes, que lorsque des pièces

sont sorties — idée de “production à la demande”). Les notions de *commandabilité structurelle* et d'*observabilité structurelle* définies ci-dessous permettent d'assurer qu'il existe un rebouclage qui rend effectivement le graphe fortement connexe.

On dit qu'un système est *structurellement commandable* si pour toute transition interne, il existe dans le graphe un chemin d'au moins une entrée vers cette transition.

On dit qu'un système est *structurellement observable* si de toute transition interne, il existe dans le graphe un chemin vers au moins une sortie.

**Lemme 56.** *Si un système est structurellement commandable et observable, son graphe peut être rendu fortement connexe par rebouclage, et donc le système est stabilisable.*

*Démonstration.* En effet, pour deux transitions internes  $x_1$  et  $x_2$ , il existe des transitions d'entrée  $u_1, u_2$ , et de sortie  $y_1, y_2$ , telles que les chemins  $u_i \rightarrow x_i \rightarrow y_i$  existent pour  $i = 1, 2$ . On constitue un circuit passant par  $x_1$  et  $x_2$  en bouclant  $u_2$  sur  $y_1$  et  $u_1$  sur  $y_2$ . ■

**9.2. Préservation de la vitesse intrinsèque du système.** Par bouclage, on a créé de nouveaux circuits par rapport à ceux qui existaient initialement (ceux des machines par exemple) et on risque d'avoir ralenti le système : le maximum des poids moyens des circuits n'a pu qu'augmenter avec l'apparition de nouveaux circuits.

Dans un atelier flexible, la machine qui a le circuit de poids maximum (total des temps d'usinage le long de ce circuit) constitue le goulot d'étranglement du système et c'est elle qui fixe la cadence la plus rapide possible de production de l'atelier. Mais si après rebouclage son circuit n'est plus critique, cela signifie qu'elle est inactive une partie du temps, et l'atelier ne fonctionne pas à son maximum. On va voir que dans certaines conditions, on peut stabiliser le système sans dégrader sa performance, ce qui constituera un analogue d'un résultat classique en Automatique (théorème de placement de pôles par feedback dynamique pour un système commandable et observable), sauf qu'ici la valeur propre du système bouclé ne peut être placée n'importe où a priori, mais seulement sur la demi-droite  $[\lambda_0, +\infty[$ ,  $\lambda_0$  étant la plus grande valeur propre du système avant rebouclage.

En effet, si, après rebouclage, un circuit critique s'établit avec un poids moyen supérieur au poids moyen maximum des circuits du système en boucle ouverte, c'est que ce circuit a été nouvellement créé par les arcs de rebouclage, et donc il emprunte au moins un tel arc de rebouclage. Si sur cet arc on a la possibilité d'ajouter autant de jetons que l'on veut dans le marquage initial sans faire augmenter dans les mêmes proportions la temporisation de cet arc, alors le ratio (temporisation totale du circuit/nombre de jetons du circuit) va forcément diminuer jusqu'à cesser de réaliser le maximum parmi tous les circuits. Le circuit critique se reforme alors ailleurs. Si un nouvel arc de rebouclage est en cause, et si on peut répéter l'opération avec ce nouvel arc, on continue ainsi jusqu'à ce que le circuit critique n'emprunte plus d'arc de rebouclage : alors le résultat recherché est atteint car le circuit ultimement critique correspond à un circuit préexistant dans le système en boucle ouverte.

**9.2.1. Application à un flowshop.** Dans un flowshop, les pièces “descendent” l'atelier, c'est-à-dire qu'elles visitent les machines toutes dans le même ordre (mais elles peuvent sauter certaines machines). Les arcs représentant les pièces peuvent donc être dessinés verticalement et de haut en bas (entrée en haut, sortie en bas). Les circuits des machines sont représentés horizontalement. Pour pouvoir dessiner un tel graphe, il faut d'abord fixer l'ordre de passage des pièces sur les machines (ordonnancement).

Supposons qu'après rebouclage du système, un circuit critique se forme, et que ce circuit n'est pas purement horizontal : donc ce n'est pas celui de la machine la plus lente. Puisque ce circuit a au moins un arc vertical, il en a au moins deux, car s'il descend, il doit remonter. Or les seuls arcs “remontant” sont ceux des arcs de recyclage des palettes : rajouter des jetons sur ces arcs revient à mettre plus de palettes en service à l'entrée du système à l'instant initial.

On vient donc de démontrer que quel que soit l'ordre de passage des pièces sur les machines que l'on a choisi a priori, il est toujours possible de saturer la machine la plus lente en mettant assez de palettes en service. Il s'agit là d'un résultat d'*indépendance de la vitesse de l'atelier par rapport à*

*l'ordonnancement* : même avec un “mauvais” ordonnancement (on dira plus loin en quel sens), l’atelier peut fonctionner à sa vitesse maximale pourvu qu’il y ait assez d’“en cours”, i.e. de pièces en cours d’usinage, pièces portées par les palettes.

9.2.2. *Application à un jobshop*. La différence avec le cas du flowshop tient au fait qu’ici les pièces peuvent visiter les machines dans des ordres différents. Par conséquent, il peut exister des circuits empruntant des arcs verticaux même avant rebouclage : donc la machine la plus lente peut très bien ne pas être saturée. Cette situation dépend en général de l’ordonnancement choisi : elle peut se produire avec certains ordonnancements mais pas avec d’autres.

Pour pouvoir saturer la machine la plus lente malgré tout, il faut éventuellement pouvoir rajouter des jetons sur des arcs verticaux — donc obligatoirement des arcs correspondant à des palettes mais qui ne sont pas forcément des arcs de rebouclage : cela peut correspondre à rajouter des palettes qui à l’instant initial se trouveront entre deux machines, et non plus à l’entrée de l’atelier, et donc au milieu du processus de fabrication (pièces à moitié usinées). Si ceci est praticable, alors le résultat précédent (possibilité de saturer la machine la plus lente indépendamment de l’ordonnancement choisi) s’étend au cas du jobshop.

**9.3. Optimisation de ressources.** On vient donc de voir que dans un système structurellement commandable et observable, on peut toujours préserver la vitesse intrinsèque du système en boucle ouverte, tout en le stabilisant, par simple ajout de jetons sur les arcs de feedback (donc en introduisant des retards dans les équations — feedback dynamique). Cependant, on souhaiterait obtenir ce résultat “au moindre coût”. Par exemple, dans un atelier, il est souhaitable de diminuer les en-cours pour diverses raisons économiques et pratiques (diminution des immobilisations, de l’encombrement du réseau de transport interne et des aires de stockage, coût des palettes elles-mêmes, etc.).

Le problème est donc de mettre en service le moins de moyens possible (minimisation d’une *fonction coût* représentant la somme des valeurs immobilisées dans le processus de fabrication) tout en atteignant la performance de vitesse souhaitée (*contrainte*, celle imposée par le circuit-machine critique si le nombre de machines est déjà fixé — sinon, ce nombre est aussi une ressource à optimiser).

On peut formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers<sup>21</sup>. Contentons nous ici de faire remarquer que l’approche progressive “par en dessous” décrite précédemment (on part avec un minimum de jetons — au moins un par circuit — et on ajoute progressivement des jetons pour “casser” les circuits critiques gênants qui ne permettent pas de satisfaire la contrainte) est une façon heuristique de chercher une solution à ce problème.

Finalement, on doit réaliser que la valeur optimale du “seuil”, en nombres de jetons du marquage initial, qui permet de saturer la machine la plus lente dans un atelier flexible, dépend de la forme du graphe qui dépend elle-même de l’ordonnancement du passage des pièces sur les machines choisi a priori. Si comme on l’a vu, en particulier pour un flowshop, *quel que soit l’ordonnancement*, la performance optimale peut être atteinte à condition d’y mettre les moyens, la quantité de moyens nécessaire dépend elle de l’ordonnancement : c’est cela qui distingue un bon d’un mauvais ordonnancement. L’optimisation de l’ordonnancement de ce point de vue est une question difficile pour laquelle la visualisation des circuits critiques peut apporter une certaine aide dans une approche heuristique.

#### 9.4. Exemples.

9.4.1. *Un jobshop*. On considère un jobshop avec deux machines 1 et 2 et deux types de pièces A et B. Les pièces de type A doivent passer d’abord sur la machine 2 puis sur la machine 1, tandis que les pièces de type B passent dans l’ordre sur la machine 1 puis 2. Les temps d’usinage sont donnés par la table suivante :

	A	B
1	4	7
2	6	3

<sup>21</sup>S. Gaubert a montré comment le calcul formel sur des séries en plusieurs indéterminées permet d’arriver de façon efficace à la formulation de ce programme en nombres entiers ; voir : S. Gaubert. *Théorie Linéaire des Systèmes dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris, Paris, 1992.



La machine la plus lente est donc la machine 1 qui met 11 unités de temps à traiter une séquence de base contre 9 pour la machine 2. On considère alors quatre situations d'ordonnancement décrites par les Figures 32a–b–c–d. Les temporisations sont indiquées en chiffres dans les places. Les transitions

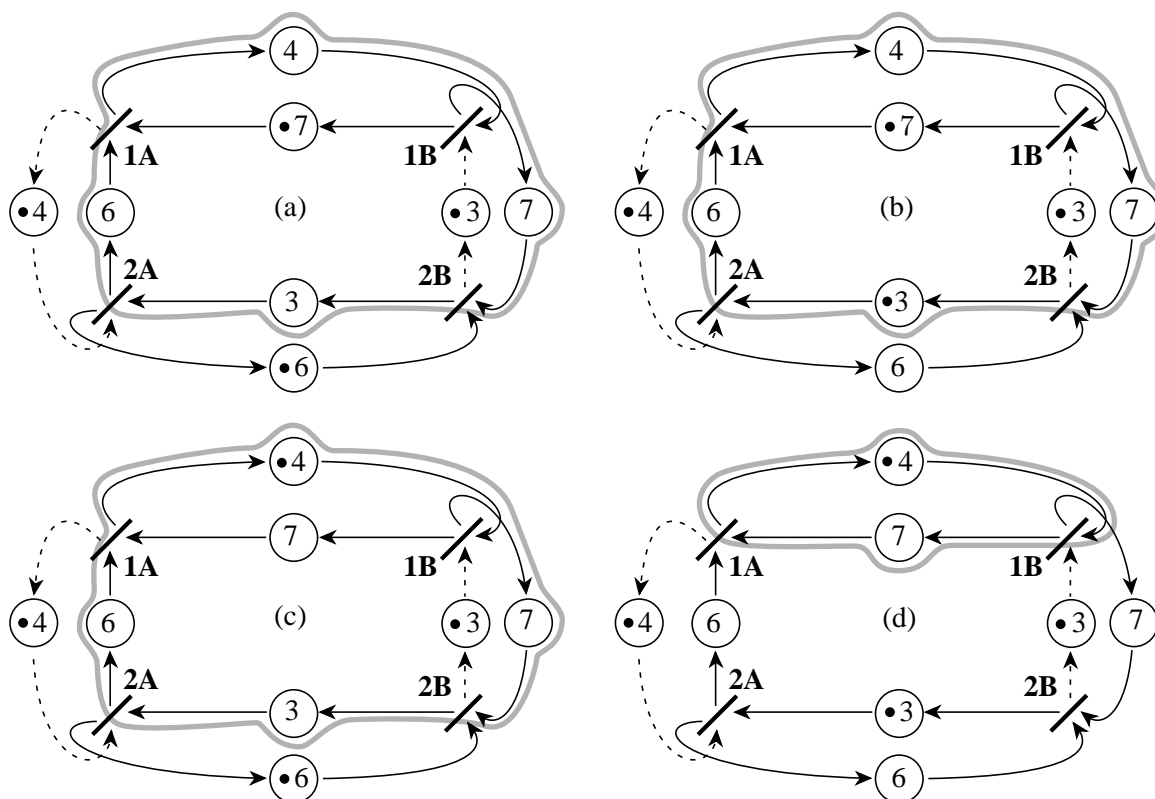


FIGURE 32

représentent les événements “début d’usinage”. Les arcs en pointillés correspondent aux arcs de recyclage des palettes et ils portent le marquage initial représentant les palettes dans leur position initiale. La position des jetons sur les circuits verticaux des palettes montrent bien que les pièces de type A commencent par la machine 2 tandis que les pièces de type B commencent par la machine 1.

- L’ordonnancement sur la machine 1 est A–B et il est B–A sur la machine 2. Autrement dit, la machine 1 commence sa séquence de base avec une pièce de type A tandis que la machine 2 commence avec une pièce de type B, ce qui est reflété par la position des jetons sur les circuits horizontaux des machines. Cette situation correspond à un deadlock visualisé par le circuit gris sans jeton sur la Figure 32a. La machine 1 attend une pièce A qui voudrait d’abord passer sur la machine 2 qui attend d’abord une pièce de type B qui voudrait d’abord passer sur la machine 1.
- L’ordonnancement sur les machines 1 et 2 est A–B. Le circuit critique est le circuit gris sur la Figure 32b avec un poids moyen de 20. Pour abaisser ce poids moyen au dessous de 11, il faut rajouter un second jeton, mais le circuit ne comporte aucun arc de recyclage (arcs en pointillés). Il faut donc pouvoir démarrer avec une pièce en cours d’usinage (soit un jeton entre 2A et 1A correspondant à une palette supplémentaire de type A déjà passée sur la machine 2, soit un jeton entre 1B et 2B correspondant à une palette supplémentaire de type B déjà passée sur la machine 1). Il faut donc au total 3 palettes pour saturer la machine la plus lente.
- L’ordonnancement sur les machines 1 et 2 est B–A. Le circuit critique est le circuit gris sur la Figure 32c avec un poids moyen de 20. La situation appelle les mêmes observations que dans le cas précédent.
- L’ordonnancement sur la machine 1 est B–A et il est A–B sur la machine 2. Le circuit critique est le circuit gris sur la Figure 32b avec un poids moyen de 11. La performance optimale est

donc atteinte dans ce cas avec une seule palette de chaque type.

9.4.2. *La technique du “kanban”*. Cet exemple est proposé par S. Gaubert<sup>22</sup> et il correspond à la stabilisation d’un système par feedback selon une technique d’origine japonaise appelée “kanban” (qui veut dire “étiquette” en Japonais). Considérons le RdP de la Figure 33a qui représente un atelier composé

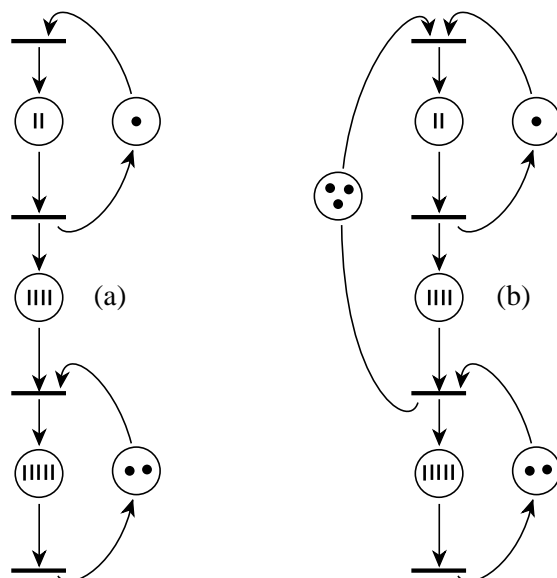


FIGURE 33

de deux cellules en série. La cellule amont contient une seule machine traitant une pièce en 2 unités de temps. Les pièces transitent dans un four de capacité “infinie” où elles doivent séjourner pendant au moins 4 unités de temps avant de pouvoir être traitées par la seconde cellule qui comporte deux machines identiques capables de travailler en parallèle. Le temps d’usinage dans la seconde cellule est de 5 unités de temps. Dans cette configuration, le circuit amont est de poids moyen 2 tandis que le circuit aval est de poids moyen 2,5. La cellule amont étant plus rapide, les pièces vont avoir tendance à s’accumuler dans le four, inutilement.

Pour éviter ce phénomène et stabiliser le système, on installe un tableau à l’entrée de la première cellule avec des étiquettes. Toute pièce qui entre est étiquetée. Cette étiquette accompagne la pièce jusqu’à l’entrée de la seconde cellule : lorsqu’une pièce est admise dans cette cellule, l’étiquette est enlevée et remise sur le tableau de la première cellule. Aucune pièce ne peut être admise dans l’atelier sans qu’une étiquette soit disponible sur le tableau. Cette situation est représentée par la Figure 33b. Le nouveau graphe est fortement connexe donc le système est stable. Mais il faut au moins 3 kanbans pour que le circuit nouvellement créé ne soit pas critique et que l’atelier ne soit pas ralenti. Ainsi, il n’y aura jamais plus de 3 pièces simultanément dans le four.

**Exercice 57.** Écrire pour les systèmes avant et après bouclage les équations aux dateurs et calculer les fonctions de transfert de l’entrée à la sortie de l’atelier dans le cas où  $n$  kanbans sont disponibles. Discuter en fonction de  $n$ .

## 10. REPRÉSENTATION DES GRAPHES D’ÉVÉNEMENTS TEMPORISÉS DANS UN DOMAINE 2D

Nous avons vu qu’il y a deux représentations possibles des graphes d’événements temporisés, les dateurs (domaine événementiel) et les compteurs (domaine temporel), qui conduisent toutes deux à une représentation linéaire, mais dans des algèbres différentes ( $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  ou  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ). Les compteurs sont “grosso

<sup>22</sup>travaux dirigés du cours

modo” les fonctions inverses de applications dateurs  $k \mapsto t(k)$  qui sont monotones non décroissantes<sup>23</sup>. Cette opération d’inversion est évidemment non linéaire, le miracle étant qu’il existe pourtant un contexte où les représentations restent linéaires toutes les deux. Fondamentalement, cette inversion n’est envisageable que parce que les fonctions manipulées sont monotones. On peut dire qu’en dehors du changement de l’algèbre linéaire habituelle en l’algèbre des dioïdes, une autre originalité marquante de cette nouvelle théorie des systèmes par rapport à la théorie classique est le fait que l’on ne s’intéresse qu’à des trajectoires monotones.

Puisque l’on est en présence de deux représentations, on peut se demander laquelle est préférable, ou s’il est indifférent de manipuler l’une ou l’autre. On va voir au travers de diverses considérations qu’*aucune* de ces deux représentations n’est totalement satisfaisante, et nous évoluerons alors vers une représentation dans un domaine *bi-dimensionnel* (on dira “2D”) qui est en fait le produit cartésien des domaines événementiel et temporel.

### 10.1. Une comparaison des représentations dateurs et compteurs.

10.1.1. *Monotonie des trajectoires.* La propriété de monotonie n’est pas une propriété “naturelle” des solutions d’équations linéaires récurrentes dans les dioïdes, même pour des entrées monotones. Considérons par exemple le RDP de la Figure 34. Les équations récurrentes en dateurs et en compteurs sont<sup>24</sup>

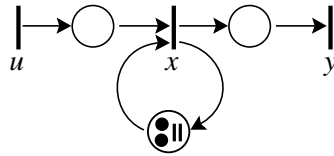


FIGURE 34

$$y(k) = 2y(k - 2) \oplus u(k) ; \quad y(t) = 2y(t - 2) \oplus u(t) .$$

Pour l’entrée

$$u(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 , \\ e & \text{si } k \geq 0 , \end{cases}$$

on peut vérifier que la sortie

$$y(k) = \begin{cases} k + 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ k - 1 & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

est bien solution, ce qui donne

$k$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y(k)$	...	-1	-2	1	0	3	...

qui n’est effectivement pas monotone. La même constatation pourrait évidemment aussi être faite en compteurs.

La fonction de transfert du système en dateurs est  $(2\gamma)^* = e \oplus 2\gamma^2 \oplus 4\gamma^4 \oplus \dots$  et donc la réponse impulsionnelle est  $e, \varepsilon, 2, \varepsilon, 4, \varepsilon, \dots$ <sup>(25)</sup> qui n’est pas monotone non plus. Par ailleurs, lorsque nous avons parlé de réponse impulsionnelle au §6.1.4, nous avons admis (sans trop insister!) que l’“impulsion

<sup>23</sup>Nous ne serons pas plus précis ici mais il faudrait examiner attentivement comment on lève, dans la définition des fonctions inverses, les difficultés dues au fait que ces applications ne sont pas *strictement croissantes* (plusieurs événements peuvent se produire simultanément) et qu’elles sont “moralement discontinues” (i.e. on peut avoir  $t(k + 1) > t(k) + 1$ ).

<sup>24</sup>On rappelle que les fonctions dateurs ou compteurs sont notées avec le même symbole qui est celui de la transition à laquelle elles sont attachées. Seul l’argument noté  $k$ , respectivement  $t$ , permet de savoir de quoi on parle. On rappelle aussi que le symbole  $\oplus$  n’a pas le même sens dans les deux contextes.

<sup>25</sup>puisque les coefficients des monômes  $\gamma, \gamma^3$ , etc. sont égaux à  $\varepsilon$

à 0", qui correspond à placer une infinité de jetons à l'instant 0 sur l'entrée<sup>26</sup>, avait  $e$  pour transformée en  $\gamma$  (<sup>27</sup>). Or  $e = 0\gamma^0 \oplus \varepsilon\gamma \oplus \varepsilon\gamma^2 \oplus \dots$  ne correspond pas une fois de plus à une suite monotone. D'ailleurs, si une infinité de jetons sont arrivés à 0, on devrait avoir pour transformée en  $\gamma$  de cette suite d'événements  $0\gamma^0 \oplus 0\gamma \oplus 0\gamma^2 \oplus \dots = \gamma^*$ . Il va donc nous falloir expliquer pourquoi, *en un certain sens*,  $e = \gamma^*$ .

**Exercice 58.** Calculer  $(2\gamma)^*\gamma^*$  (qui serait la réponse impulsionnelle du système de la Figure 34 si l'impulsion était codée  $\gamma^*$ ). La suite des coefficients des monômes en  $\gamma$  est-elle monotone pour cette suite?

10.1.2. *Simplifications.* Considérons la situation de la Figure 35a. On peut écrire, en dateurs, que

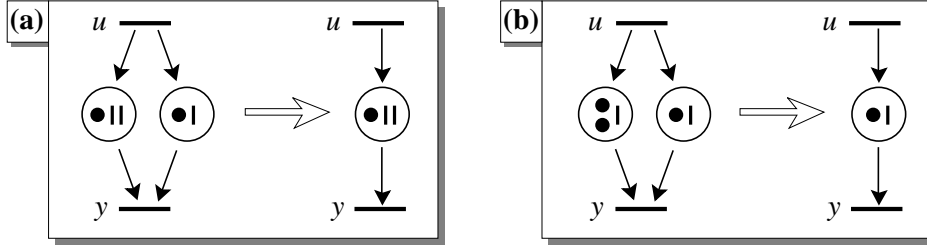


FIGURE 35

$$y(k) = 2u(k-1) \oplus 1u(k-1) = (2 \oplus 1)u(k-1) = 2u(k-1) ,$$

ce qui résulte à la fois de l'algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et de l'intuition du fonctionnement de ce RdP. Mais alors, il faudrait, en compteurs, que

$$y(t) = 1u(t-2) \oplus 1u(t-1) = 1(u(t-2) \oplus u(t-1)) = 1u(t-2) ,$$

ce qui ne devient clair que si l'on se sert du fait que  $u(t-2) \leq u(t-1)$  puisque  $t \mapsto u(t)$  est non décroissante, et du fait que  $\oplus$  veut dire "min" pour les compteurs<sup>28</sup>. En transformée en  $\gamma$  et en  $\delta$ , on en déduit les règles

$$t\gamma^k \oplus \tau\gamma^k = \max(t, \tau)\gamma^k , \quad k\delta^t \oplus k\delta^\tau = k\delta^{\max(t, \tau)} . \quad (28)$$

Si l'on considère maintenant le cas de la Figure 35b, on a

$$y(t) = 2u(t-1) \oplus 1u(t-1) = (2 \oplus 1)u(t-1) = 1u(t-1) ,$$

ce qui résulte à la fois de l'algèbre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  et de l'intuition du fonctionnement. Il faut donc que

$$y(k) = 1u(k-2) \oplus 1u(k-1) = 1(u(k-2) \oplus u(k-1)) = 1u(k-1) ,$$

ce qui s'explique ici encore par le fait que  $k \mapsto u(k)$  est non décroissante, donc  $u(k-1) \geq u(k-2)$ , mais qu'ici  $\oplus$  signifie "max". On en déduit donc les règles

$$k\delta^t \oplus \kappa\delta^t = \min(k, \kappa)\delta^t , \quad t\gamma^k \oplus t\gamma^\kappa = t\gamma^{\min(k, \kappa)} . \quad (29)$$

Si on décidait de noter  $\gamma^k\delta^t$  les monômes  $t\gamma^k$  et  $k\delta^t$ , alors les règles (28) et (29) se résumeraient à

$$\gamma^k \oplus \gamma^\kappa = \gamma^{\min(k, \kappa)} , \quad \delta^t \oplus \delta^\tau = \delta^{\max(t, \tau)} . \quad (30)$$

<sup>26</sup>rappelons que le premier jeton, ou la première activation de la transition  $u$ , est numéroté 0

<sup>27</sup>et si  $U(\gamma) = e$ , alors on a bien  $Y(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) = H(\gamma)$ , donc on obtient bien le codage  $H(\gamma)$  pour la sortie correspondant à l'entrée impulsionnelle

<sup>28</sup>Dans le contexte des compteurs, du fait que l'ordre du dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  est inversé par rapport à l'ordre habituel, il faut préciser par rapport à quel ordre nous parlons de "croissance": il s'agit bien sûr de l'ordre naturel ici. C'est pour éviter cette difficulté de langage que nous dirons souvent "monotone", en dateurs comme en compteurs, en laissant le lecteur y mettre un sens plus précis en fonction du contexte.

10.1.3. *Ordre du système.* Considérons à nouveau le RdP de la Figure 34 mais avec un seul bâtonnet dans la boucle au lieu de deux. Alors les équations seraient

$$y(k) = 1y(k-2) \oplus u(k) , \quad y(t) = 2y(t-1) \oplus u(t) .$$

Ce système est d'ordre 2<sup>(29)</sup> dans sa représentation en dateurs, et seulement d'ordre 1 dans sa représentation en compteurs. Évidemment, nous aurions abouti à la conclusion inverse si nous avions supposé qu'il y avait un seul jeton et deux bâtonnets dans la boucle.

Cependant, on observera que pour le système autonome (i.e. quand l'entrée est non contraignante), un écart de  $\Delta t$  se traduit de toute façon par un écart  $\Delta k = 2 \times \Delta t$ , et donc, même si apparemment il faut 2 fois plus de mots mémoire pour simuler le système en dateurs qu'il n'en faut en compteurs, en nombre de bits, les mots peuvent être deux fois plus courts en dateurs qu'en compteurs pour assurer une simulation comportant le même nombre d'événements. La "complexité" du système, comptée en nombre de bits plutôt qu'en nombre de mots mémoire, est donc la même dans les deux cas. Mais il y a une certaine dissymétrie dans les représentations, ce que nous chercherons à éviter avec la représentation 2D.

10.1.4. *Histoire de circulation de jetons.* Considérons maintenant le RdP de la Figure 36a. Indépen-

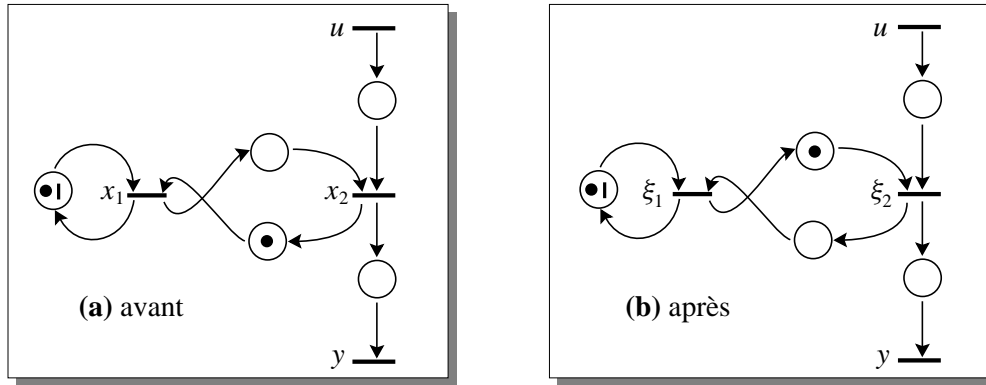


FIGURE 36. Avant et après activation de la transition  $x_1$

damment de l'arrivée de jetons par  $u$ , le RdP peut passer à la situation de la Figure 36b par activation de la transition  $x_1$ . Nous avons renommé les variables internes  $\xi$  puisque cette activation a affecté les compteurs d'événements internes et que nous allons remettre en équations le système après activation *en repartant de conditions initiales canoniques*. Par contre, les variables externes  $u$  et  $y$  restent les mêmes puisqu'aucun jeton n'est entré ou sorti. Les équations avant et après activation de la transition  $x_1$  sont

<p><b>Avant</b></p> $\begin{aligned} x_1(k) &= 1x_1(k-1) \oplus x_2(k-1) , \\ x_2(k) &= x_1(k) \oplus u(k) , \\ y(k) &= x_2(k) , \end{aligned}$	<p><b>Après</b></p> $\begin{aligned} \xi_1(k) &= 1\xi_1(k-1) \oplus \xi_2(k) , \\ \xi_2(k) &= \xi_1(k-1) \oplus u(k) , \\ y(k) &= \xi_2(k) . \end{aligned}$
---	---

Après quelques manipulations simples laissées en exercice, on parvient à la forme d'état

**Avant**

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} u(k) , \quad y(k) = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} ,$$

**Après**

$$\begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(k-1) \\ \xi_2(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} u(k) , \quad y(k) = \begin{pmatrix} e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{pmatrix} .$$

<sup>29</sup>ramené à une forme d'état (12), il faut un  $x(k)$  de dimension 2

**Exercice 59.** En utilisant *les deux* règles de simplification pour les monômes en  $\gamma$  données en (28) et (29), montrer que la fonction de transfert correspondant aux deux séries d'équations ci-dessus est la même et qu'elle est égale à  $e \oplus \gamma(1\gamma)^*$ .

On en déduit donc que l'on est en présence de deux réalisations internes de la même fonction de transfert. Cette situation est classique en théorie des systèmes, et, d'habitude, il existe un changement de base qui fait passer d'un vecteur d'état ( $x$ ) à l'autre ( $\xi$ ). Écrivons les deux réalisations sous la forme

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) , & y(k) &= Cx(k) , \\ \xi(k) &= \bar{A}\xi(k-1) \oplus \bar{B}u(k) , & y(k) &= \bar{C}\xi(k) . \end{aligned}$$

Dans le cas précis, on se convainc assez facilement qu'un tel changement de base n'existe pas. En effet, soit  $T$  l'hypothétique matrice  $2 \times 2$  *inversible* telle que  $x = T\xi$ . Alors, on devrait avoir les relations

$$A = T\bar{A}T^{-1} , \quad B = T\bar{B} , \quad C = \bar{C}T^{-1} .$$

Ceci impliquerait par exemple, dans le cas considéré ici,

$$\{B = T\bar{B}\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{première ligne}} \{T_{11} \oplus T_{12} = \varepsilon\} \Rightarrow \{T_{11} = T_{12} = \varepsilon\} ,$$

ce qui est incompatible avec le fait que  $T$  est inversible.

En fait, en fonction de l'interprétation physique de la situation, il est clair que la relation à laquelle on s'attend entre  $x$  et  $\xi$  est

$$\begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k) \end{pmatrix} .$$

C'est pourquoi il est difficile de trouver un changement de base *statique*. Cependant, si nous avons adopté une représentation en compteurs, la même relation se serait écrite

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} ,$$

et donc la matrice de changement de base serait alors

$$x(t) = S\xi(t) \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} .$$

**Exercice 60.** Écrire les équations en compteurs des deux RdP de la Figure 36. Les mettre sous forme d'état. Montrer que le changement de base ci-dessus permet effectivement de passer des matrices  $A, B, C$  aux matrices  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  avec par exemple  $\bar{A} = S^{-1}AS$ .

L'explication est simple. En compteurs, les jetons du marquage initial interviennent dans la détermination des coefficients des matrices, alors qu'ils interviennent dans les retards pour les équations en dateurs. Dans ces conditions, en compteurs, l'activation d'une transition interne, prélevant un jeton sur chaque place amont, diminue de 1 les coefficients correspondants de la matrice  $A$  (graphe de précedence interne) et de  $B$  (graphe de transition entre les entrées et les transitions internes)<sup>30</sup>. Ces coefficients sont rangés dans la ligne correspondant à cette transition. Matriciellement, cela se traduit par une *pré*-multiplication par une matrice diagonale qui dans notre cas est bien la matrice

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} .$$

De plus, les places aval de la transition voient leur marquage augmenter de 1, ce qui affecte la colonne correspondante de  $A$  et  $C$ , ceci étant obtenu matriciellement par une *post*-multiplication par la matrice inverse de la précédente.

<sup>30</sup>Ceci n'est évidemment possible que si cette diminution de 1 n'entraîne pas une valeur négative, ce qui suppose qu'il y avait bien au départ des jetons dans les places amont de la transition activée.

Alors, faut-il en conclure que l'on a trouvé enfin un bon argument pour préférer la représentation en compteurs à celle en dateurs? Eh bien non! L'exercice suivant explique pourquoi.

**Exercice 61.** Pour un graphe d'événements temporisé, montrer que si l'on supprime un bâtonnet dans toute place en amont d'une transition *interne* donnée (à supposer que ce soit possible) et qu'on rajoute un bâtonnet sur toute place en aval de la même transition, la relation entrée-sortie (exprimée par la fonction de transfert) ne change pas. Montrer que les équations d'état en dateurs avant et après avoir réalisé cette opération sont reliées par un changement de base alors que ce ne sera pas en général le cas en compteurs.

## 10.2. "Filtrage" des trajectoires monotones.

10.2.1. *Théorie.* La propriété de monotonie d'une trajectoire de dateur  $d(k)$  ou de compteur  $c(t)$  se traduit par

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \{d(k) \geq d(k-1)\} &\Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \quad \{c(t) \geq c(t-1)\} &\Leftrightarrow \{c(t-1) = c(t-1) \oplus c(t)\}. \end{aligned}$$

On se souviendra en effet que l'ordre naturel de dioïde est inversé entre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ . En passant aux transformées en  $\gamma$  et en  $\delta$ , on obtient donc, comme caractérisation de cette propriété,

$$\{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} \Leftrightarrow \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}, \quad (31)$$

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta)\} \Leftrightarrow \{C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)\}. \quad (32)$$

La démonstration de ces équivalences est laissée en exercice.

**Théorème 62.** On considère le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  des séries formelles en  $\gamma$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et à exposants dans  $\mathbb{Z}$  muni de l'addition et de la multiplication habituelle des séries formelles.

- (1) Le sous-ensemble, noté  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ , des éléments de la forme  $\gamma^* D(\gamma)$  est un dioïde d'éléments neutres  $\varepsilon$  pour l'addition et  $\gamma^*$  pour la multiplication<sup>31</sup>. Ce dioïde sera aussi noté  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$ .
- (2) Dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ , la relation

$$\{D_1(\gamma) \mathfrak{R} D_2(\gamma)\} \Leftrightarrow \{\gamma^* D_1(\gamma) = \gamma^* D_2(\gamma)\}$$

est une relation d'équivalence compatible avec la structure de dioïde (et donc le quotient  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]/\mathfrak{R}$  est aussi un dioïde).

- (3) Toute classe d'équivalence — i.e. tout élément de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]/\mathfrak{R}$  — contient un et un seul élément de  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$  qui est de plus la borne supérieure de la classe. Cet élément est "la meilleure approximation par dessus" de tout élément de la classe par un élément de  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$ , c'est-à-dire le plus petit élément de  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$  supérieur ou égal à  $D(\gamma)$ , pour un élément quelconque  $D(\gamma)$  de la classe<sup>32</sup>.
- (4) Les dioïdes  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]/\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$  sont isomorphes.

*Démonstration.*

- (1) Le sous-ensemble  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  est stable par addition et par multiplication (i.e. la somme et le produit de deux éléments du sous-ensemble appartiennent aussi au sous-ensemble). L'élément  $e$  n'appartient pas à ce sous-ensemble. Par contre, puisque  $\gamma^* \gamma^* = \gamma^*$ , alors  $\gamma^*$  est l'élément neutre (forcément unique) de la multiplication pour les éléments du sous-ensemble.
- (2) Le fait que  $\mathfrak{R}$  soit une relation d'équivalence est immédiat. La compatibilité de  $\mathfrak{R}$  avec l'addition du dioïde signifie que la classe d'équivalence de  $D_1 \oplus D_2$  ne dépend que de la classe de  $D_1$  et de celle de  $D_2$ , et non pas de ces deux représentants particuliers. Ceci résulte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour la multiplication, grâce à la commutativité qui est très importante ici, et à l'associativité, on a  $\gamma^*(D_1 D_2) = (\gamma^* D_1) D_2 = D_1 (\gamma^* D_2)$ , ce qui montre que, là aussi, la classe d'équivalence du produit de deux éléments ne dépend que de

<sup>31</sup>Nous ne disons pas que c'est un sous-dioïde de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  car il n'admet pas  $e$  comme élément neutre.

<sup>32</sup>On aurait donc pu aussi définir la relation d'équivalence en disant que deux éléments sont équivalents s'ils ont la même "meilleure approximation par dessus" dans  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$ .

leurs classes d'équivalence respectives. On peut donc définir sans ambiguïté une addition et une multiplication pour la structure quotient qui devient elle aussi un dioïde.

- (3) Il est clair que pour tout élément  $D$ , l'élément  $\gamma^* D$  est dans la même classe d'équivalence, qu'il appartient à  $\mathfrak{D}[\gamma]$ , et qu'il est supérieur ou égal à  $D$  puisque  $\gamma^* \succeq e$ . Soit  $D'$  un autre élément tel que  $D' \succeq x$  et  $D' \in \mathfrak{D}[\gamma]$ , donc  $D' = \gamma^* D''$  pour un certain  $D''$ . Alors  $\gamma^* D' \succeq \gamma^* D$ , mais  $\gamma^* D' = D'$  donc  $D' \succeq \gamma^* D$ .
- (4) Il y a donc une correspondance biunivoque entre une classe d'équivalence (un élément de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ ) et son unique représentant dans  $\mathfrak{D}[\gamma]$  (qu'on peut appeler "représentant canonique"). Il est clair que cette correspondance est un isomorphisme de dioïde puisqu'ajouter ou multiplier deux classes peut se faire en additionnant ou en multipliant leurs représentants canoniques. ■

Il doit maintenant être clair que le véritable dioïde des transformées en  $\gamma$  des dateurs est le dioïde  $\mathfrak{D}[\gamma]$  et non pas  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ . Ceci dit, pratiquement, quand nous faisons des calculs, nous manipulons des séries formelles en  $\gamma$ , donc des éléments de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ . Mais il faut garder à l'esprit que ce faisant, nous parlons en fait de la "meilleure approximation non décroissante" de l'élément manipulé. Comme on vient de le voir, une classe d'équivalence peut avoir plusieurs représentants<sup>33</sup>, et donc on peut formellement faire des calculs différents qui "veulent dire la même chose" dans  $\mathfrak{D}[\gamma]$ . Par exemple, on vient de voir que  $e$  est équivalent à  $\gamma^*$ . Ceci constitue a posteriori la justification que l'arrivée d'une infinité de jetons à l'instant 0 puissent être codée  $e$  alors que, "mot pour mot", cette situation devrait être codée  $\gamma^*$ .

**Exercice 63.** Montrer que si

$$Y(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} y(k)\gamma^k = \gamma^* X(\gamma) = \gamma^* \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\gamma^k \right) ,$$

alors

$$y(k) = \bigoplus_{l \leq k} x(l) = \sup_{l \leq k} x(l) .$$

En déduire, dans  $\mathfrak{D}[\gamma]$ , les règles de simplification (28) et (29) (pour ce qui concerne les monômes en  $\gamma$ ).

10.2.2. *Interprétation géométrique.* Étant donné un élément de  $X(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\gamma^k$  dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ , on lui associe l'ensemble des points  $(k, x(k))$  dans le plan "discret". Cet ensemble peut être considéré comme le graphe de l'application  $k \mapsto x(k)$ . Étant donné que  $x(k)$  est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ , l'addition de deux séries correspond à prendre l'enveloppe supérieure des graphes correspondants. Une autre façon de procéder est d'associer à  $X(\gamma)$  l'hypographe de l'application  $k \mapsto x(k)$ , c'est-à-dire la partie du plan discret qui se situe sous le graphe de l'application, y compris le graphe lui-même (voir Figure 37). Cela

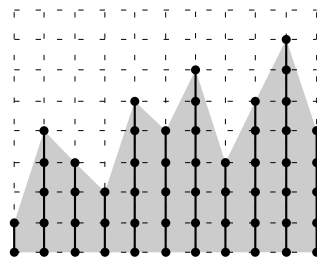


FIGURE 37. Hypographe

correspond à l'idée que si le monôme  $x(k)\gamma^k$  existe dans la série  $X(\gamma)$ , alors on ne change pas cette série en lui rajoutant tout monôme  $y\gamma^k$  pour  $y \leq x(k)$ . Dans ces conditions, la somme de séries se traduit simplement par l'union des hypographe correspondants.

**Exercice 64.** Montrer que le produit de séries correspond à la somme vectorielle des hypographe correspondants.

<sup>33</sup>Il n'y a guère que la classe de  $\varepsilon$  qui contient un seul élément.



Finalement, le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  est isomorphe au dioïde des hypographe (considérés comme des parties du plan discret) muni de l'union pour addition et de la somme vectorielle pour intersection. Si on se place dans  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  plutôt que dans  $\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{Z}}$  <sup>(34)</sup>, il faut considérer que  $\varepsilon$  correspond à l'ensemble vide et que  $\top$  correspond à tout le plan.

**Exercice 65.** À quoi correspond  $e$  dans le dioïde des hypographe?

Examinons maintenant à quoi correspond le dioïde  $\mathcal{D}[[\gamma]]$ . Puisqu'il est isomorphe à  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ , regardons à quoi correspond un élément générique  $\gamma^* X$ . C'est le produit de  $X$ , associé à un hypographe du type de celui de la Figure 37, par  $\gamma^*$  qui code la demi-droite horizontale issue de l'origine du plan et s'étendant vers la droite (c'est-à-dire la collection des points  $(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots$ ), ou plus exactement l'hypographe correspondant, c'est-à-dire le cône "Sud-Est" de sommet  $(0, 0)$ . Alors, le produit  $\gamma^* X$  correspond à la somme vectorielle qui se traduit géométriquement par le fait d'accrocher à chaque point de l'hypographe de  $X$  un cône Sud-Est<sup>35</sup>. Cette opération est représentée sur la Figure 38 où les nouveaux points rajoutés par rapport à ceux de la Figure 37 sont figurés comme des carrés. Le

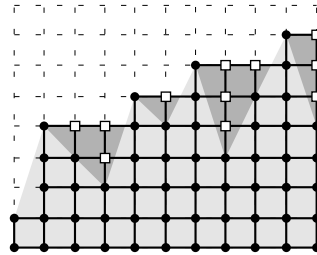


FIGURE 38. Meilleure approximation monotone "par dessus"

résultat obtenu est bien le plus petit hypographe d'une fonction monotone qui contient l'hypographe de  $X$ .

**10.3. Passage à la représentation 2D.** On vient de voir qu'en "filtrant" les éléments de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  pour ne garder que ceux qui présentent une propriété de monotonie de leur trajectoire, on est arrivé à une structure algébrique  $\mathcal{D}[[\gamma]]$  où les règles de calcul sur les séries formelles en  $\gamma$  se sont enrichies d'une règle de simplification supplémentaire qui porte sur les exposants (la seconde des règles (29)) en plus de celle naturelle sur les coefficients (la première des règles (28)). On soupçonne qu'une situation analogue devrait normalement se produire si nous partions initialement d'une représentation en compteurs et des transformées en  $\delta$  correspondantes, et si nous réalisons un filtrage analogue des éléments monotones. Ceci nous conduirait aux règles en  $\delta$  dans (28)–(29).

**Exercice 66.** Sachant que la propriété de monotonie se caractérise par la propriété (32), énoncer un théorème similaire au Théorème 62 pour le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ .

Plutôt que de suivre cette voie, qui nous conduirait à nouveau à une situation où les domaines événementiel et temporel sont traités de façon dissymétrique, nous allons essayer d'évoluer vers la représentation 2D où les opérateurs  $\gamma$  et  $\delta$  sont traités de façon symétrique.

10.3.1. *Autre représentation de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ .* Considérons l'application

$$\overline{\mathbb{Z}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}} : x \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{si } x = \varepsilon = -\infty, \\ \mathbb{Z} & \text{si } x = \top = +\infty, \\ \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

<sup>34</sup>ce qui engendrerait des difficultés sur lesquelles nous ne souhaitons pas nous étendre ici

<sup>35</sup>La somme vectorielle de deux sous-ensembles est en effet l'union des translatés de l'un des sous-ensemble par tous les points de l'autre.

Cette application est un isomorphisme de dioïde entre  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et l'ensemble des demi-droites de  $\mathbb{Z}$  s'étendant vers  $-\infty$ , ensemble muni de l'union pour l'addition et la somme vectorielle pour multiplication.

**Exercice 67.** Montrer que l'ensemble des demi-droites de  $\mathbb{Z}$  s'étendant vers  $-\infty$  muni des opérations indiquées est bien un dioïde et qu'il est bien isomorphe à  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ . Quel est l'élément neutre de la multiplication dans ce dioïde de demi-droites.

Nous allons maintenant coder les sous-ensembles (quelconques) de points de  $\mathbb{Z}$  par des séries d'une variable formelle  $\delta$  à coefficients booléens et à exposants dans  $\mathbb{Z}$  : on notera  $\mathbb{B}$  le dioïde booléen  $\{\varepsilon, e\}$  et  $\mathbb{B}[[\delta]]$  les séries en  $\delta$ . Le codage est réalisé de la façon suivante : à un sous-ensemble  $T$  de  $\mathbb{Z}$ , on associe la série telle que, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de  $\delta^t$  est égal à  $e$  si  $t \in T$ , et à  $\varepsilon$  sinon. En particulier à  $\emptyset$  est associé la série identiquement nulle et à  $\mathbb{Z}$  lui-même est associée la série  $\delta^* \oplus (\delta^{-1})^*$ .

**Exercice 68.** Montrer que le dioïde des parties de  $\mathbb{Z}$  muni de l'union et de la somme vectorielle est isomorphe au dioïde  $\mathbb{B}[[\delta]]$  muni des opérations habituelles des séries par le codage ci-dessus.

La dernière étape de notre construction consiste à trouver le dioïde inclus dans  $\mathbb{B}[[\gamma]]$  qui correspond au dioïde de demi-droites de l'Exercice 67. Pour cela, on remarque qu'une demi-droite s'étendant vers  $-\infty$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  caractérisé par la propriété que si on le translate d'une unité vers la gauche, on obtient un nouveau sous-ensemble *inclus* dans le sous-ensemble de départ. On remarque par ailleurs (exercice) que l'opération de translation ci-dessus est traduite dans  $\mathbb{B}[[\gamma]]$  par la multiplication d'un élément (représentant une partie de  $\mathbb{Z}$ ) par  $\delta^{-1}$ . Donc, par isomorphisme, l'image  $C(\delta)$  d'une demi-droite dans  $\mathbb{B}[[\gamma]]$  est caractérisée par la propriété (32).

**Exercice 69.** Dédurre de tout ce qui précède que  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et  $(\delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\delta]]$  sont deux dioïdes isomorphes. Quel est l'élément neutre de la multiplication dans ce dernier dioïde?

10.3.2. *Le dioïde  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ .* Nous avons vu que le dioïde des dateurs est  $\mathfrak{D}[[\gamma]] = \gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  et que  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  est isomorphe à  $(\delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\delta]]$ . Donc  $\mathfrak{D}[[\gamma]]$  est isomorphe à  $\gamma^* [(\delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\delta]]][[\gamma]]$  qui est lui-même isomorphe à  $\gamma^* (\delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . Ce dernier dioïde est noté  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ . Pour aboutir à ce dioïde, nous aurions pu partir de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  que nous aurions quotienté par la relation d'équivalence

$$\{C_1(\delta) \mathfrak{R}' C_2(\delta)\} \Leftrightarrow \{(\delta^{-1})^* C_1(\delta) = (\delta^{-1})^* C_2(\delta)\}$$

(“filtrage” des trajectoires monotones) pour aboutir à un dioïde isomorphe à  $(\delta^{-1})^* \overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ . Puis, en remarquant que  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  est isomorphe à  $\gamma^* \mathbb{B}[[\gamma]]$  (par une construction analogue à celle du §10.3.1), nous aurions obtenu un dioïde isomorphe à  $(\delta^{-1})^* [\gamma^* \mathbb{B}[[\gamma]]][[\delta]]$ , lui-même isomorphe à  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ .

Enfin, nous aurions pu partir directement du dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  des séries formelles en deux indéterminées  $(\gamma, \delta)$  à coefficients dans  $\mathbb{B}$ . Ce dioïde est isomorphe au dioïde des parties de  $\mathbb{Z}^2$  muni de l'union et de la somme vectorielle comme addition et multiplication, respectivement<sup>36</sup>. Ensuite, en quotientant ce dioïde par la relation d'équivalence

$$\{X_1(\gamma, \delta) \mathfrak{R}'' X_2(\gamma, \delta)\} \Leftrightarrow \{\gamma^* (\delta^{-1})^* X_1(\gamma, \delta) = \gamma^* (\delta^{-1})^* X_2(\gamma, \delta)\} ,$$

on aurait encore abouti à un dioïde isomorphe à  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ .

La multiplication par  $\gamma^* (\delta^{-1})^*$  d'un élément de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  revient à “accrocher” à chaque point du sous-ensemble qui est associé à cet élément (par l'application inverse de celle recherchée à l'exercice de la note 36 de bas de page) un “cône Sud-Est”, dans la mesure où  $\gamma^* (\delta^{-1})^*$  est le codage d'un tel cône de sommet  $(0, 0)$ .

**Exercice 70.** Pour un élément de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , on appelle *valuation* en  $\gamma$ , resp. *degré* en  $\delta$ , le degré minimum en  $\gamma$ , resp. maximum en  $\delta$ , des monômes apparaissant dans cet élément (i.e. avec un coefficient égal à  $e$ ). Ces valeurs peuvent être égales à  $\pm\infty$ . Montrer que deux éléments de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  représentant le même élément de  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$  ont nécessairement la même valuation en  $\gamma$  et le même degré en  $\delta$ , qu'on peut donc appeler la valuation (en  $\gamma$ ) et le degré (en  $\delta$ ) de l'élément de  $\mathfrak{M}_{\min}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ . En fait, les précisions entre

<sup>36</sup>**Exercice.** Définir l'application des parties de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  qui représente cet isomorphisme.

parenthèses ne sont pas nécessaires car, a contrario, le degré en  $\gamma$  et la valuation en  $\delta$  sont des notions sans intérêt pour des éléments de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ . Pourquoi?

Le diagramme commutatif de la Figure 39 résume tous les cheminements que nous avons décrits pour aboutir à  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ . Dans ce dioïde, on manipule des séries formelles en  $(\gamma, \delta)$  à coefficients

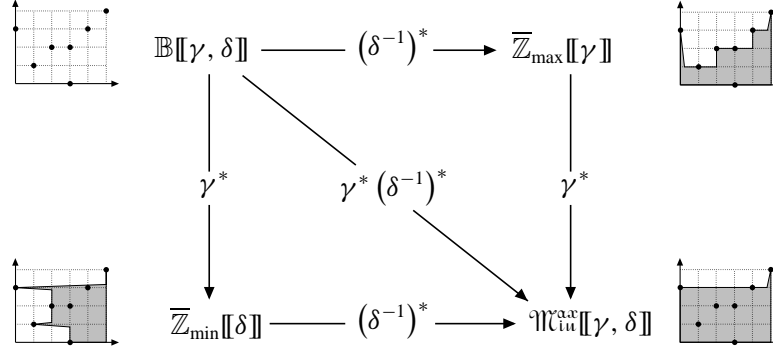


FIGURE 39. Plusieurs façons d'obtenir  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$

booléens et à exposants dans  $\mathbb{Z}$  avec en plus des règles de calcul habituelles sur les séries, les règles de simplification (30).

**Exercice 71.** Montrer que dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ , on a les égalités

$$\gamma^* (\delta^{-1})^* = \gamma^* \oplus (\delta^{-1})^* = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* .$$

Revenons au RdP de la Figure 20. Les équations de ce RdP dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  s'écrivent<sup>37</sup>

$$\begin{aligned} X_1 &= \gamma X_2 \oplus \delta^3 U_1 , \\ X_2 &= \delta X_1 \oplus \gamma \delta U_2 , \\ X_3 &= X_1 \oplus \delta X_2 \oplus \gamma \delta^2 X_3 , \\ Y &= \gamma X_2 \oplus \delta^3 X_3 . \end{aligned}$$

**Exercice 72.** Calculer pour ce RdP la matrice de transfert dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ .

10.3.3. *Interprétation "informationnelle" des calculs dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ .* Lorsqu'un dateur (i.e. une suite d'événements de même nature, comme les activations successives d'une même transition) est codé par un élément  $X(\gamma, \delta)$  de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ , si cet élément contient le monôme  $\gamma^k \delta^t$  avec le coefficient  $e$ , on peut interpréter ce fait comme un élément d'information qui s'énonce :

*l'événement numéroté  $k$  a lieu au plus tôt à l'instant  $t$ .*

En effet, la représentation de  $X(\gamma, \delta)$  dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  par une série formelle de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  n'est pas unique (puisque  $X(\gamma, \delta)$  ne définit qu'une classe d'équivalence dans le dioïde quotient  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\mathcal{R} \sim \mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ ), et si le monôme  $\gamma^k \delta^t$  est présent dans  $X$ , il se peut qu'il ne soit pas déterminant dans la date exacte de l'événement  $k$  si il existe un autre monôme  $\gamma^\kappa \delta^\tau$  "au Nord-Ouest du point  $(k, t)$ ", i.e. tel que

$$\kappa \leq k \quad \text{et} \quad \tau \geq t , \quad \text{ce que nous écrivons} \quad (\kappa, \tau) \succeq (k, t) .$$

Par contre, tout monôme  $\gamma^l \delta^\theta$  "au Sud-Est" de  $\gamma^k \delta^t$ , i.e. tel que  $(l, \theta) \preceq (k, t)$ , ne sert à rien car on peut le rajouter à  $X$  sans changer cet élément en tant qu'élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ . En Français, cela revient à dire que l'information "l'événement numéroté  $l$  a lieu au plus tôt à l'instant  $\theta$ " est plus faible que l'information analogue donnée par  $(k, t)$  si  $l \geq k$  et  $\theta \leq t$ . Le lecteur est invité à y réfléchir et à s'en convaincre!

On peut donc voir la somme  $X(\gamma, \delta)$  de monômes comme une somme d'informations sur la trajectoire du dateur  $x(k)$ . Les règles de simplification dans l'algèbre de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  vise à éliminer les informations

<sup>37</sup>nous écrivons  $X$  pour  $X(\gamma, \delta)$  afin d'alléger les notations

inutiles. Ces informations sont “véhiculées” par les arcs (c’est-à-dire les places) du graphe d’événements qui opèrent des décalages : une place avec un marquage initial de  $a$  jetons et avec  $b$  bâtonnets décale l’information d’une quantité  $a$  en ce qui concerne les numéros d’événements (domaine événementiel) et d’une quantité  $b$  en ce qui concerne les dates (domaine temporel). Ceci est obtenu dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  par la multiplication par le monôme  $\gamma^a \delta^b$ . Enfin, les transitions “additionnent” les informations véhiculées par les arcs qui aboutissent à ces transitions (ou les “recoupent”) en opérant éventuellement les éliminations des informations inutiles déjà évoquées.

## 11. RATIONALITÉ, RÉALISABILITÉ, PÉRIODICITÉ

L’un des résultats fondamentaux de la théorie des systèmes linéaires classiques est le suivant : une condition nécessaire et suffisante pour qu’une matrice de transfert soit réalisable par un système linéaire stationnaire avec état de dimension finie est que ce soit une matrice de transfert rationnelle, c’est-à-dire dont les coefficients sont des fractions rationnelles de la variable  $s$  (opérateur symbolique de dérivation en temps continu) ou  $z$  (opérateur symbolique d’avance en temps discret). Nous allons très brièvement évoquer un résultat analogue pour les matrices de transfert dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$ . Cependant ici l’équivalence entre rationalité et réalisabilité s’accompagne d’une autre équivalence avec la notion de périodicité. En effet, nous avons déjà vu au §8.5.3 que la réponse impulsionnelle d’un système linéaire stationnaire de dimension finie présente une propriété de périodicité. L’équivalence de cette propriété avec la rationalité — cette dernière notion va être définie — est à mettre en parallèle avec le fait bien connu qu’un nombre rationnel a un développement décimal périodique.

**11.1. Rationalité, causalité.** On dira qu’un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est *rationnel* s’il l’un de ces représentants au moins peut être obtenu par un nombre *fini* d’opérations  $\oplus$ ,  $\otimes$  et  $*$  à partir de l’ensemble  $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$ . On dira qu’une matrice à coefficients dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

En fait, cette notion contient aussi une notion de *causalité* dans la mesure où, par les opérations autorisées, on ne peut obtenir que des exposants non négatifs de  $\gamma$  et  $\delta$ . Mais, pour ce qui est des exposants de  $\delta$ , on peut obtenir d’autres représentants d’un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  en multipliant l’un d’entre eux par  $(\delta^{-1})^*$ . Par conséquent, on ne peut donner une définition de la causalité en parlant du signe non négatif des exposants en  $\delta$  d’un représentant *quelconque* d’un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$ . On vérifiera que le fait qu’il existe un représentant à exposants uniquement non négatifs peut être caractérisé par la définition alternative suivante : on dira qu’un élément  $X$  de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est *causal* s’il est égal à  $\varepsilon$ , ou si, d’une part, sa valuation (en  $\gamma$  — voir Exercice 70), notée  $\text{val } X$ , est non négative, et si, d’autre part,  $X \succeq \gamma^{\text{val } X}$  pour l’ordre  $\succeq$  naturel de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$ .

**Exercice 73.** Montrer que le sous-ensemble des éléments causaux de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est un sous-dioïde.

**11.2. Réalisabilité, polynômialité.** On dira qu’un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est *réalisable* s’il existe un graphe d’événements mono-entrée/mono-sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément, s’il existe trois matrices  $C, A, B$  à coefficients *polynômiaux et causaux* dans  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  telles que cet élément puisse s’écrire  $CA^*B$ . Évidemment, pour que cette écriture soit possible, il faut que les dimensions (finies!) des trois matrices soient compatibles, en particulier que  $C$  soit une matrice-ligne et que  $B$  soit une matrice-colonne. On ne perd rien à supposer que  $A$  est carrée (il suffit de compléter  $C$  ou  $B$  par des  $\varepsilon$ ).

Un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est *polynômial* s’il admet au moins un représentant polynômial dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . Ainsi  $e$  est polynômial même si une autre représentation de  $e$  est la série  $\gamma^* (\delta^{-1})^*$  qui contient une infinité de termes. Une autre caractérisation des éléments polynômiaux de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est la suivante : un élément  $X$  est polynômial s’il est égal à  $\varepsilon$  ou si sa valuation (en  $\gamma$ ), notée  $\text{val } X$  et son degré (en  $\delta$  — voir Exercice 70), noté  $\text{deg } X$ , sont tous les deux finis. On observera que  $\gamma^{\text{val } X} \delta^{\text{deg } X} \succeq X$  : en fait  $\gamma^{\text{val } X} \delta^{\text{deg } X} \succeq X$  est le plus petit monôme qui a cette propriété. Un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{int}}^{\text{cau}}[\gamma, \delta]$  est *monômial* s’il est égal à  $\varepsilon$  ou s’il admet un représentant monômial. Une définition équivalente revient à dire, si  $X \neq \varepsilon$ , que  $X$  est monômial si  $X = \gamma^{\text{val } X} \delta^{\text{deg } X}$ .

On dit qu'une matrice est réalisable si elle est la matrice de transfert d'un graphe d'événements (ayant donc un nombre d'entrées, resp. de sorties, égal au nombre de colonnes, resp. de lignes, de cette matrice). Il revient au même de dire qu'une matrice est réalisable si tous ses coefficients sont réalisables. En effet, la première définition implique que chaque coefficient  $(i, j)$  de la matrice est la fonction de transfert de l'entrée  $u_j$  vers la sortie  $y_i$  lorsque l'on met toutes les autres entrées  $u_n, n \neq j$ , égales à  $\varepsilon$ . Réciproquement, si on sait réaliser chaque coefficient  $(i, j)$  de la matrice par un triplet  $(C_{ij}, A_{ij}, B_{ij})$ , alors on sait réaliser la matrice sous la forme  $CA^*B$ . Montrons le pour une matrice  $2 \times 2$ . Supposant que chaque coefficient  $(i, j)$  s'écrit  $C_{ij}A_{ij}^*B_{ij}$  pour des matrices polynômiales, on vérifie que la matrice  $2 \times 2$  s'écrit  $CA^*B$  avec

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & A_{12} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & A_{21} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \varepsilon \\ \varepsilon & B_{12} \\ B_{21} & \varepsilon \\ \varepsilon & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Évidemment, on ne prétend pas que cette réalisation est de taille minimale!

On peut donner une définition apparemment beaucoup plus restrictive, mais en fait équivalente, de la réalisabilité. On peut dire qu'une matrice est réalisable si elle peut s'écrire  $C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^*B$  où les quatre matrices  $C, A_1, A_2$  et  $B$  sont maintenant à coefficients **booléens**.

**11.3. Périodicité.** On dira qu'un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{fin}}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$  est **périodique** s'il peut s'écrire  $P \oplus QM^*$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes et  $M$  est un monôme. Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Une autre définition de la périodicité, apparemment plus restrictive mais en fait équivalente, est la suivante : un élément de  $\mathfrak{M}_{\text{fin}}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$  est périodique s'il admet un représentant dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  qui peut s'écrire

$$P \oplus (\gamma^v \delta^\tau) Q (\gamma^r \delta^s)^* ,$$

où  $v, \tau, r, s$  sont des entiers non négatifs, et  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $(\gamma, \delta)$  à exposants positifs et de degré en  $(\gamma, \delta)$  inférieur ou égal à  $(v - 1, \tau - 1)$ , resp.  $(r - 1, s - 1)$ . Le polynôme  $P$  représente ici la partie transitoire de largeur  $(v - 1)$  et de hauteur  $(\tau - 1)$ , tandis que le polynôme  $Q$  représente le motif périodique commençant après ce transitoire (à cause de la translation par  $\gamma^v \delta^\tau$ ), de largeur  $(r - 1)$  et de hauteur  $(s - 1)$ , répété indéfiniment selon la pente  $s/r$  (à cause de la multiplication par  $(\gamma^r \delta^s)^*$ ). La Figure 40 donne un exemple pour  $v = 5, \tau = 4, r = 4, s = 3$ .

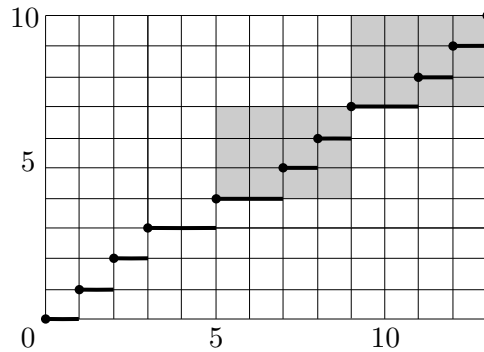


FIGURE 40. Représentation de  $e \oplus \gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4 (e \oplus \gamma^2 \delta \oplus \gamma^3 \delta^2) (\gamma^4 \delta^3)^*$

**11.4. Théorème fondamental.** Nous pouvons maintenant énoncer (sans démonstration — cf. [4]) le théorème suivant.

**Théorème 74.** Pour un élément  $H$  de  $\mathfrak{M}_{\text{fin}}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ , ou pour une matrice  $H$  à coefficients dans  $\mathfrak{M}_{\text{fin}}^{\text{rat}}[[\gamma, \delta]]$ , les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $H$  est rationnelle ;

- (2)  $H$  est réalisable ;  
 (3)  $H$  est périodique.

L'un des problèmes ouverts à l'heure actuelle est celui de la réalisation minimale.

## 12. DATES AU PLUS TARD

Jusqu'à maintenant, on a supposé que des dates d'entrée étaient données aux transitions-source et que l'on cherchait à calculer les dates de sortie aux transitions-puits dans l'hypothèse d'un fonctionnement au plus tôt. On peut se poser le problème dual suivant : étant données des dates désirées de sortie, quelles sont les dates d'entrée au plus tard qui assurent le respect de ces objectifs (non pas exactement, mais avec des dates de sortie inférieures ou égales aux dates désirées données)? Il s'agit donc d'une sorte de problème inverse, les données étant fournies aux sorties et les résultats recherchés concernant les entrées.

Sur le cas de l'exemple de la Figure 20, on établit les équations récurrentes de ces dates au plus tard : à toute transition, pour calculer la date au plus tard d'une activation numéotée  $k$ , on doit considérer toutes les transitions *en aval* de celle-ci, et prendre parmi elles la date la plus contraignante, c'est-à-dire la plus petite, en tenant compte "en marche arrière" des décalages habituels induits par les jetons du marquage initial et des temporisations des places intermédiaires. Ceci donne le résultat indiqué sur la Figure 41 en partant des sorties et en remontant jusqu'aux entrées (on désigne par  $x(k)$  la date au plus tard d'activation de numéro d'ordre  $k$  de la transition nommée  $x$ ). La forme matricielle est écrite dans

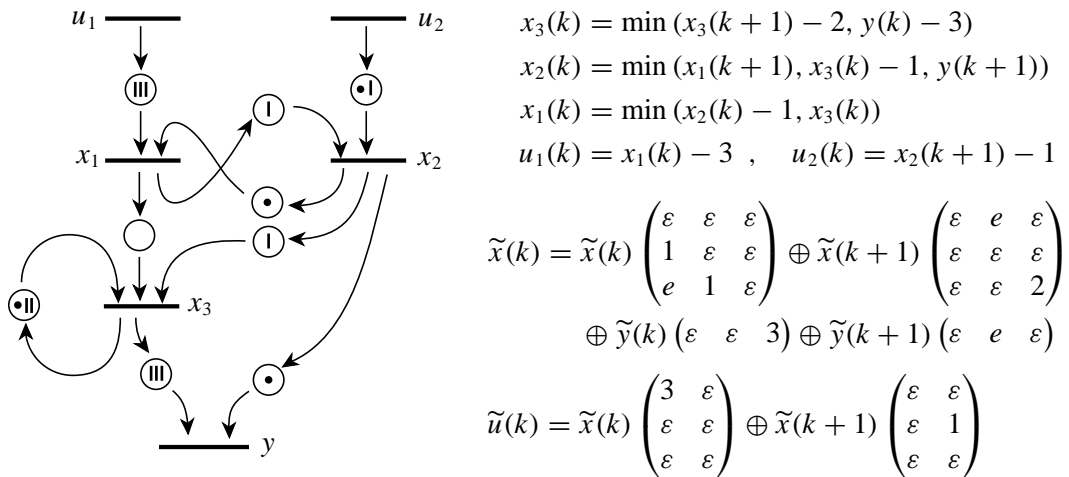


FIGURE 41. Dates au plus tard

$\mathbb{Z}_{\max}$  (et non pas  $\mathbb{Z}_{\min}$ ) grâce à un changement de signe sur les deux membres des équations (formule classique :  $\max(-a, -b) = -\min(a, b)$ ) et on a posé :

$$\tilde{x} = (-x_1 \quad -x_2 \quad -x_3), \quad \tilde{y} = -y, \quad \tilde{u} = (-u_1 \quad -u_2).$$

Noter aussi que l'on utilise ici des vecteurs-ligne qui opèrent à gauche des matrices (qui sont exactement les mêmes que celles qui interviennent dans les équations directes des dates au plus tôt). Le fait d'opérer à gauche provient du fait que l'on "remonte le graphe", c'est-à-dire que les dates d'une transition sont maintenant calculées à partir des dates des transitions *en aval*. Les décalages en  $k$  sont aussi rétrogrades : on remonte à la fois le graphe et les numéros d'événements (sens rétrograde dans le domaine événementiel). Ces équations sont très analogues aux équations de l'"état adjoint" en théorie classique de la commande optimale. Observer aussi que les différences entre "dates au plus tôt" et "dates au plus tard" (correspondant aux sorties imposées obtenues lors du calcul au plus tôt) permettent de calculer des "marges" : celles-ci qui sont nulles mettent en évidence les événements sur lesquels tout délai accidentel entraînera un retard sur la sortie.